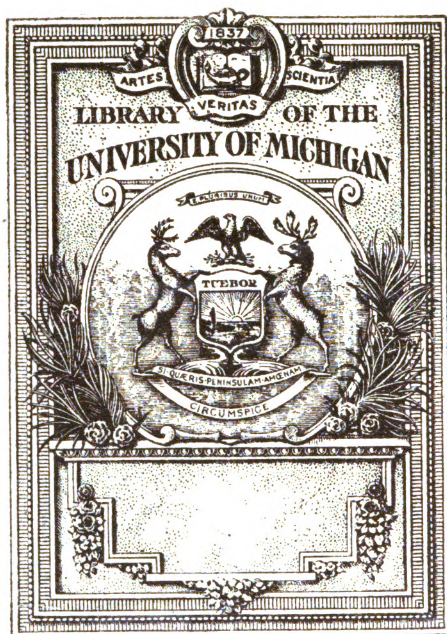

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

DEL MEDESIMO AUTORE



Elementi di Calcolo Algebrico ad uso delle Scuole Normali in conformità dei programmi ministeriali vigenti



MARCO NASSÒ

ALGEBRA ELEMENTARE

AD USO DEI LICEI
E
DEGLI ISTITUTI TECNICI (I° BIENNIO)

SECONDO I PROGRAMMI GOVERNATIVI

CON COPIOSE NOTE STORICHE
MOLTI CONSIGLI PRATICI PER INDIRIZZARE L'ALUNNO
ALLA RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
PIU' DI 2000 ESERCIZI E PROBLEMI GRADUATI DA RISOLVERE
E CIRCA 400 ESERCIZI E PROBLEMI
MINUTAMENTE RISOLTI



TORINO
TIPOGRAFIA E LIBRERIA SALESIANA

1898

(N° 936 — MD)

PARTE PRIMA

LIBRO PRIMO

I numeri razionali

Preliminari.

L'OPERAZIONE PIÙ E L'ADDIZIONE ARITMETICA. *

1. Ogni numero ha il numero *successivo*. **

Esempio 1°. Il successivo di 0 è 1; il successivo di 1 è 2; il successivo di 2 è 3; il successivo di 3 è 4; ecc.

Il numero 0 non è il successivo di alcun numero.

2. DEFINIZIONE. L'operazione *più* è quell'operazione per cui si passa da un numero al successivo.

COROLLARIO. Fare sopra un numero l'operazione *più* significa passare da questo numero al successivo.

Osservazione. Il segno dell'operazione ***più*** è + che si legge ***più***, e si scrive a destra del numero dato.

Esempio. 0+ significa che su 0 si fa l'operazione ***più***, ossia si passa da 0 al successivo; 5+ significa che su 5 si fa l'operazione ***più***, ossia si passa da 5 al successivo; ecc. ***

---

* I tre libri contengono tutta e sola la materia strettamente prescritta pel corso liceale dai programmi ministeriali vigenti; l'Appendice è utile complemento. Per le note storiche mi sono servito delle principali pubblicazioni storiche italiane ed estere, ed in particolare della pregevolissima opera che il prof. Moritz Cantor sta pubblicando a Lipsia col titolo: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

** Dicendo *numero* intenderemo *numero intero positivo*. Questa proposizione ci dice che *dopo ogni numero ne viene un altro;* od anche: *non vi è un numero che sia l'ultimo di tutti i numeri.* Essa si suole enunciare anche così: *La serie dei numeri interi è illimitata.*

*** Se, partendo da zero, alla destra di ogni numero scriviamo il numero successivo, avremo i numeri scritti in quest'ordine: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,..... ove i punti tengono il luogo dei numeri che non si scrivono; e potremo anche dire che, *fare sopra un numero l'operazione più, significa passare da questo numero a quello che gli sta immediatamente a destra.* All'insieme dei numeri scritti in quest'ordine daremo, per brevità, il nome di *successione naturale dei numeri.*

3. DEFINIZIONE. Fare sul numero *a* l'operazione *più* *b* volte, significa fare su *a* l'operazione *più;* sul risultato fare l'operazione *più;* sul nuovo risultato fare l'operazione *più;* ecc. fino a *b* volte. *

Ossia significa: *passare dal numero a al successivo; poi da questo al successivo; poi da questo al successivo; ecc. b volte.*

Si indica scrivendo $a+b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $a+b=m$. **

Esempio. Fare su 4 l' operazione ***più*** 3 volte, significa fare su 4 l'operazione ***più,*** cioè passare da 4 al successivo che è 5; poi fare su 5 l'operazione ***più,*** cioè passare dal 5 al successivo che è 6; poi fare su 6 l'operazione ***più,*** cioè passare da 6 al successivo che è 7. Il numero 7 è il risultato cercato; e scriveremo $4+3=7$.

Osservazione 1ª. Invece di dire che *si fa su a l' operazione* ***più*** *b volte,* diremo più brevemente: *si fa su a l'operazione* ***più*** *b*, e scriveremo: *si fa su a l'operazione* $+b$. ***

---

* Si può definire nel seguente modo il significato di *fare su a l'operazione più b volte.*

Fare sul numero a l'operazione più $1+1$ *volta (ossia* 2 *volte), significa fare su a l'operazione più una volta, e poi sul risultato fare l'operazione più ancora* 1 *volta.* Per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* $1+1$ volta, si scrive $a+(1+1)$; e per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* 1 volta, e poi sul risultato si fa l'operazione *più* ancora 1 volta, si scrive $(a+1)+1$. Avremo quindi per definizione: $a+(1+1)=(a+1)+1$.

Fare sul numero a l'operazione più $2+1$ *volta (ossia* 3 *volte), significa fare su a l'operazione più* 2 *volte, e poi sul risultato fare l'operazione più ancora* 1 *volta.* Per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* $2+1$ volta, si scrive $a+(2+1)$; e per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* 2 volte, e poi sul risultato si fa l'operazione *più* ancora 1 volta, si scrive $(a+2)+1$. Avremo quindi per definizione: $a+(2+1)=(a+2)+1$.

Fare sul numero a l'operazione più $3+1$ *volta (ossia* 4 *volte), significa fare su a l'operazione più* 3 *volte, e poi sul risultato fare l'operazione più ancora* 1 *volta.* Per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* $3+1$ volta, si scrive $a+(3+1)$; e per indicare che su *a* si fa l'operazione *più* 3 volte, e poi sul risultato si fa l'operazione *più* ancora 1 volta, si scrive $(a+3)+1$. Avremo quindi per definizione: $a+(3+1)=(a+3)+1$.

Ed in generale, essendo *a*, *b*, numeri qualunque, stabiliremo:

DEFINIZIONE. Fare sul numero *a* l'operazione *più* $b+1$ volta, significa fare su *a* l'operazione *più* *b* volte, e poi, sul risultato, fare l'operazione *più* ancora 1 volta. Ossia: $a+(b+1)=(a+b)+1$.

Osservazione. Dalla definizione si scorge che noi sapremo che cosa significa fare su *a* l'operazione *più* $b+1$ volta, quando sapremo che cosa significa fare su *a* l'operazione *più* *b* volte. Ora noi sappiamo che cosa significa fare su *a* l'operazione *più* 1 volta, (cioè fare su *a* l'operazione *più*): dunque sapremo che cosa significa fare su *a* l'operazione *più* $1+1$ volta, ossia 2 volte; e quindi anche che cosa significa fare su *a* l'operazione *più* $2+1$ volta, ossia 3 volte ecc. E così continuando, si scorge facilmente che qualunque sia il numero *b*, la definiz. preced. ci fa conoscere che cosa significa fare su *a* l'operazione *più b* volte.

** È noto che il segno = si legge *eguale;* che ogni scrittura della forma $a=b$ si chiama *eguaglianza*; e che ciò che sta a sinistra del segno = si dice *primo membro dell'eguaglianza*, e ciò che sta a destra *secondo membro dell'eguaglianza*. Il segno = dell'eguaglianza fu introdotto da Roberto Recorde nato a Tenby (Inghilterra) nel 1510, e morto a Londra nel 1558. Prima si usava la parola *eguale*, o la sua iniziale.

*** Si osservi che nel pronunziare la frase *si fa su a l'operazione più b volte*, si fa pausa dopo *più*; invece la frase *si fa su a l'operazione* $+b$ si legge come se fosse scritto: *si fa su a l'operazione piubì.*

Osservazione 2ª. In $a+b$, il segno $+$ posto alla destra di a indica che su a si deve fare l'operazione *più;* ed il numero b, posto alla destra del segno $+$, indica che l'operazione *più* si deve fare b volte.

Ne segue che $a+1$ significa che su a si deve fare l'operazione *più* una volta; ma anche $a+$ significa la stessa cosa: avremo quindi $a+1=a+$.*

Osservazione 3ª. Si osservi che colla scrittura $a+b$ indicheremo indifferentemente queste due cose: 1° *che su a si deve fare l'operazione* $+b$*;* 2° *il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione* $+b$.

Dalla definizione del § 3 deriva immediatamente:

COROLLARIO. $0+a=a$.

4. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *più* zero volte, significa non fare su a alcuna operazione.

Ne segue immediatamente:

COROLLARIO. $a+0=a$.

5. DEFINIZIONE. Dicesi *somma* dei numeri a, b, il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione *più* b volte. **

Esempio. Facendo su 4 l'operazione *più* 3 volte si arriva al numero 7; dunque la somma dei numeri 4 e 3 è 7.

6. DEFINIZIONE. Dicesi *somma* dei numeri a, b, c, d, ecc. il numero al quale si arriva facendo prima su a l'operazione *più* b volte, poi sul risultato l'operazione *più* c volte, poi sul nuovo risultato l'operazione *più* d volte, ecc. ***

La somma dei numeri a, b, c, d, si indica scrivendo $a+b+c+d$.

7. DEFINIZIONE. *L'addizione* dei numeri è quell'operazione per cui dati più numeri se ne trova la somma.

Ciascuno dei numeri dati si chiama *un addendo* od anche *una parte* della somma.

L'OPERAZIONE MENO E LA SOTTRAZIONE ARITMETICA.

8. DEFINIZIONE. Se il successivo del numero a è il numero b, diremo che a è il *precedente* di b.

Esempio. Il precedente di 6 è 5; il precedente di 4 è 3; il precedente di 2 è 1; il precedente di 1 è 0.

Osservazione. Lo zero non ha per precedente alcun numero (§ 1).

9. DEFINIZIONE. L'operazione *meno* è quell'operazione per cui da un numero si passa al precedente.

---

* Sono sinonime le espressioni *fare su a l'operazione più una volta*, e *fare su a l'operazione più*.

** Sono sinonime le parole *somma*, *totale*. Sono pure sinonime le espressioni: *trovare la somma di a, b; sommare b con a; addizionare b con a; fare l'addizione dei numeri a, b; ad a aggiungere b.*

*** Sono sinonime le espressioni *ad a aggiungere b, al risultato aggiungere c, al nuovo risultato aggiungere d, ecc.* e *ad a aggiungere successivamente b, c, d, ecc.*

COROLLARIO. Fare sopra un numero l'operazione *meno* significa passare da questo numero al precedente.

Osservazione. Il segno dell'operazione ***meno*** è il segno — che si legge *meno*, e si scrive a destra del numero dato.

Esempio. 4— significa che su 4 si fa l'operazione ***meno,*** ossia si passa da 4 al precedente; 3— significa che su 3 si fa l'operazione ***meno,*** ossia si passa da 3 al precedente; ecc. *

10. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *meno* b volte, significa fare su a l'operazione *meno;* sul risultato fare l'operazione *meno;* sul nuovo risultato fare l'operazione *meno;* ecc. fino a b volte. **

Ossia significa *passare dal numero a al precedente; poi da questo al precedente; poi da questo al precedente; ecc. b volte.*

Si indica scrivendo $a-b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $a-b=m$.

Esempio. Fare su 5 l' operazione ***meno*** 3 volte, significa fare su 5 l'operazione ***meno,*** cioè passare da 5 al precedente che è 4; poi fare su 4 l'operazione ***meno,*** cioè passare da 4 al precedente che è 3; poi fare su 3 l'operazione ***meno,*** cioè passare da 3 al precedente che è 2. Il numero 2 è il risultato cercato; e scriveremo $5-3=2$.

Osservazione 1ª. Invece di dire che *si fa su a l'operazione* ***meno*** *b volte*, diremo più brevemente: *si fa su a l'operazione* ***meno*** *b*, e scriveremo: *si fa su a l'operazione —b.* ***

Osservazione 2ª. In $a-b$ il segno — posto alla destra di a indica che su a si deve fare l'operazione ***meno;*** ed il numero b, posto alla destra del segno —, indica che l'operazione ***meno*** si deve fare b volte.

Ne segue che $a-1$ significa che su a si deve fare l'operazione ***meno*** una volta; ma anche $a-$ significa la stessa cosa: quindi $a-1=a-$. ****

Osservazione 3ª. Si osservi che colla scrittura $a-b$ indicheremo indifferentemente queste due cose: 1° *che su a si deve fare l'operazione —b;* 2° *il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione —b.*

11. DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *meno* zero volte, significa non fare su a alcuna operazione.

Ne segue immediatamente:

COROLLARIO. $a-0=a$.

---

* Riferendoci alla successione naturale dei numeri, potremo anche dire che *fare sopra un numero l'operazione* ***meno***, *significa passare da questo numero a quello che gli sta immediatamente a sinistra.*

** In modo analogo a quello tenuto nella prima nota del § 3 si può definire che cosa significa fare su a l'operazione *meno* b volte; e si perviene alla seguente definizione:

DEFINIZIONE. Fare sul numero a l'operazione *meno* $b+1$ volta, significa fare sul numero a l'operazione *meno* b volte, e poi, sul risultato, fare l'operazione *meno* ancora 1 volta. Ossia: $a-(b+1)=(a-b)-1$.

*** Osservazione analoga a quella fatta nella nota *** del § 3.

**** Sono sinonime le espressioni *fare su a l'operazione meno una volta*, e *fare su a l'operazione meno.*

12. DEFINIZIONE. Dicesi *differenza* dei numeri a, b, il numero al quale si arriva facendo su a l'operazione *meno* b volte. *

Esempio. Facendo su 5 l'operazione ***meno*** 3 volte, si arriva al numero 2. Dunque la differenza dei numeri 5 e 3 è 2.

13. DEFINIZIONE. La *sottrazione* dei numeri è quell'operazione per cui dati due numeri se ne trova la differenza.

Il primo dei numeri dati si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo*. **

CAPO PRIMO.

Numeri con segno.

14. ***Problema.*** *Vado al mercato con* a *lire, e spendo* b *lire nella compera di un oggetto. Quante lire mi rimangono?*

Per la risoluzione del problema consideriamo vari casi particolari.

$a=7$ e $b=4$.	*Risposta:*	Mi	rimangono	$7-4=3$	lire.
$a=7$ e $b=5$.	»	»	»	$7-5=2$	lire.
$a=7$ e $b=6$.	»	»	»	$7-6=1$	lira.
$a=7$ e $b=7$.	»	»	»	$7-7=0$	lire.
$a=7$ e $b=8$.	»	»	»	1	lira di debito.
$a=7$ e $b=9$.	»	»	»	2	lire di debito.
$a=7$ e $b=10$.	»	»	»	3	lire di debito.

Per esaminare più da vicino il metodo seguito, ci è comodo avere sott'occhio la successione naturale dei numeri interi

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \ldots\ldots\ldots$$

In tutti i casi considerati è $a=7$.

Nel 1°, in cui $b=4$, ho fatto su 7 l'operaz. —4, ed avuto per risultato 3.
Nel 2°, in cui $b=5$, ho fatto su 7 l'operaz. —5, ed avuto per risultato 2.
Nel 3°, in cui $b=6$, ho fatto su 7 l'operaz. —6, ed avuto per risultato 1.
Nel 4°, in cui $b=7$, ho fatto su 7 l'operaz. —7, ed avuto per risultato 0.
Nel 5°, in cui $b=8$, (se voglio seguire il metodo precedentemente tenuto)

---

* Sono sinonimi *differenza* e *resto*. Sono pure sinonime le espressioni: *trovare la differenza fra a, b*; *da a sottrarre b*; *da a togliere b*. È sottinteso che si suppone che il numero b non sia maggiore del numero a.

** Non si sa da chi furono introdotti i segni +, — per indicare l'addizione e la sottrazione. Essi compaiono per la prima volta nell'Aritmetica di Giovanni Widmann di Eger, stampata a Lipsia nel 1489. Il Widmann li presenta come segni già noti. Prima si usavano le parole *più*, *meno*, o le loro iniziali p, m, oppure , $\tilde{p}$, $\tilde{m}$. Diofanto di Alessandria nato nel 325 e morto nel 409) introdusse il segno ⋔ per la sottrazione, ma non usò alcun segno speciale per l'addizione. Per maggiori indicazioni sul concetto di numero e sulle operazioni *più* e *meno*, si possono consultare i due bellissimi articoli « *Sul concetto di numero* » che il chiarissimo prof. G. Peano pubblicò nel 1891 nella sua *Rivista di Matematica;* io non aggiungo altro, perchè suppongo che l'alunno abbia già studiato l'Aritmetica Ragionata.

dovrei fare su 7 l'operazione —8, ossia l'operazione ***meno*** 8 volte, ed il numero a cui arriverei sarebbe il numero cercato. Ma, dopo aver fatto l'operazione ***meno*** 7 volte, arrivo allo 0, e non ho più numeri. D'altra parte è evidente che, se ho 7 lire e ne spendo 8, ritorno a casa con una lira di debito. Scrivo dunque 1 alla sinistra di 0, ed ottengo la successione:

$$1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \ldots$$

Ora osservo che l'1 si trova scritto due volte; cioè una volta a destra, ed una volta a sinistra di zero. Osservo ancora che, se mi fermo all'1 di destra, è segno che *possiedo una lira;* e se mi fermo all'1 di sinistra, è segno che ho *una lira di debito.* Posso dunque dire che l'1 di destra rappresenta *lire che possiedo*, e l'1 di sinistra *lire di debito*. Per distinguerli l'uno dall'altro, metto un segno qualsiasi ad uno di essi; p.e. sottolineo quello di sinistra. Avrò così la successione:

$$\underline{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \ldots$$

Nel 6° Caso, in cui $b=9$, dovrei fare su 7 l'operazione —9 (ossia l'operazione ***meno*** 9 volte); ma, dopo averla fatta 8 volte, arrivo al numero $\underline{1}$ e non ho più numeri. D'altra parte so che il risultato è 2 *lire di debito*, che, secondo la convenzione fatta, posso rappresentare con $\underline{2}$. Scrivo $\underline{2}$ alla sinistra di $\underline{1}$, ed ottengo la successione:

$$\underline{2},\ \underline{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10, \ldots$$

Analogamente il 7° Caso mi porta a scrivere $\underline{3}$ alla sinistra di $\underline{2}$; e così posso continuare fin che voglio.

Si vede subito che la risoluzione del problema mi ha condotto ad estendere la successione naturale dei numeri interi anche alla sinistra di 0, in modo da avere la successione:

$$\ldots \underline{5},\ \underline{4},\ \underline{3},\ \underline{2},\ \underline{1},\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \ldots$$

la quale si estende indefinitamente dalle due parti.

15. Fra i numeri posti alla destra, e quelli posti alla sinistra di zero, vi è questa differenza essenziale, che i primi indicano *lire che possiedo*; i secondi, *lire di debito*. Ogni numero di questa successione esprime dunque due cose, cioè: 1° **la grandezza** (ossia il *valore numerico*) della somma di cui si tratta; 2° **una qualità** particolare della somma (ossia la *qualità* di essere somma che *si possiede*, o somma *di debito*).

16. Alle medesime conclusioni mi avrebbe condotto la risoluzione di quest'altro problema: *In una prima partita guadagno a lire; in una seconda partita perdo b lire. Quanto ho alla fine del giuoco?*

Ragionando come nel problema precedente, trovo che ho lire di *guadagno*, o di *perdita*, secondochè è $a>b$ oppure $a<b$; che non ho nulla se è $a=b$. * In questo caso i numeri alla destra di zero rappresentano lire di *guadagno;* quelli alla sinistra di zero, lire di *perdita*.

---

* La sostituzione dei segni $>$, $<$ alle parole *maggiore*, *minore* è dovuta a Tommaso Harriot, nato in Oxford nel 1560 e morto a Londra nel 1621.

Ad analoghe conclusioni mi avrebbe condotto la risoluzione del problema: *Sopra una retta, a partire da un certo punto A della retta, percorro prima a metri verso destra, e poi b metri verso sinistra. Dopo ciò a quale distanza mi trovo dal punto di partenza?* Mi troverò a *destra* od a *sinistra* del punto A, secondochè è $a>b$, oppure $a<b$; mi troverò in A se è $a=b$. In questo problema, i numeri alla destra di zero rappresentano distanze alla *destra* del punto A; i numeri alla sinistra di zero rappresentano distanze alla *sinistra* del punto A.

Questi e tanti altri problemi analoghi si risolvono in ogni caso particolare col solo sussidio dell'Aritmetica. Però, per poterli risolvere, bisogna considerare, nelle grandezze di cui si tratta, non solo il *valore quantitativo*, ma ancora qualche altra *proprietà* delle grandezze stesse. Nei casi esaminati si è tenuto conto anche della proprietà che esse avevano di essere somme di danaro *possedute*, o *di debito; guadagnate* o *perdute;* di essere distanze verso *destra*, o verso *sinistra* di un punto fisso. Il numero che rappresenta queste grandezze, deve perciò esprimere due cose, cioè: 1° *il valore quantitativo,* 2° *la qualità* speciale che si considera nella grandezza di cui si tratta.

17. L'Aritmetica rappresenta il *valore quantitativo* delle grandezze con un segno speciale (il segno del numero); ma, per rappresentare la *qualità* delle grandezze, invece di far uso di un segno speciale, si serve delle parole del linguaggio ordinario, dicendo p.e. 5 lire di *guadagno*, 9 lire di *perdita*, ecc. Sarebbe certo più comodo rappresentare anche la *qualità* delle grandezze con segni speciali; ma, in Aritmetica (ove le questioni si trattano sempre sopra numeri determinati), non se ne ricaverebbero grandi vantaggi pratici. Ciò diventa necessario in Algebra, ove si ha bisogno di trattare le questioni sui numeri indipendentemente dai valori particolari dei numeri stessi.

Poichè, per ogni grandezza, le *qualità* che l'Algebra considera sono sempre *due qualità opposte fra loro* (come sarebbe: per una somma, la *qualità* di essere *guadagnata* o *perduta*, di essere un *debito* od un *credito;* per un tempo, di essere *passato* o *futuro;* per una lunghezza, di essere misurata *verso destra* o *verso sinistra* ecc.), per rappresentare queste *qualità* sono sufficienti *due* soli segni. Si convenne che fossero il segno + che si chiama *segno positivo* (e si legge *più*), ed il segno — che si chiama *segno negativo* (e si legge *meno*). Essi si premettono al numero a cui si riferiscono. * Uno di essi p.e. il + può rappresentare indifferentemente *una* delle due *qualità;* il — rappresenterà l'*altra*. **

* Non si confondano i segni +, — indicanti *positivo, negativo*, coi segni +, — indicanti *operazione più, operazione meno*. Nel 1° caso si *premettono* al numero; nel 2° si *pospongono*. Es. +4 significa *il numero positivo* 4; invece 4+ significa *che su 4 si fa l'operazione più*.

** In ogni problema intorno a grandezze, una data *qualità* della grandezza che si studia, si può rappresentare indifferentemente col segno + o col —. Perciò, al principio di ogni quesito, bisogna dichiarare *esplicitamente* quale delle due *qualità* opposte si vuole rap-

Converremo dunque di scrivere la successione precedente così:

.....—5, —4, —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, +4,.....

18. DEFINIZIONI. Diconsi *numeri con segno* i numeri preceduti da segno. I numeri con segno si dicono *positivi* se sono preceduti dal segno +; *negativi* se sono preceduti dal segno —. *

Diconsi *numeri aritmetici* i numeri non preceduti da segno. **

Dicesi *valore numerico* di un numero con segno, il valore che il numero ha non tenendo conto del segno. ***

Dicesi *valore algebrico* di un numero con segno, il valore che il numero ha tenendo conto anche del segno.

Esempio. Nei numeri $+4$, $+a$, -7, $-b$ i valori numerici sono rispettivamente 4, a, 7, b; gli algebrici sono $+4$, $+a$, -7, $-b$.

Diconsi *opposti*, o *contrari*, due numeri con segno aventi valore numerico eguale e segno contrario.

Esempio. Sono opposti i numeri $+4$ e -4, $+a$ e $-a$, ecc.

Due numeri con segno si dicono *eguali* se hanno egual valore numerico ed egual segno; altrimenti si dicono *disuguali.*

Esempio. Sono eguali $+2$ e $+{}^{10}/_{5}$; sono eguali -3 e $-{}^{6}/_{2}$. Sono disuguali $+3$ e -3; così pure -2 e -3; così pure $+3$ e $+5$; così pure $+3$ e -4.

19. All'insieme dei numeri interi con segno scritti nell'ordine

(α).....—5, —4, —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, +4.....

daremo, per comodità, il nome di *successione naturale dei numeri con*

---

presentare col + e quale col —, e conservare poi a ciascun segno il medesimo significato durante tutta la trattazione della questione. Ordinariamente si suole rappresentare col + la *qualità* che deve avere la grandezza cercata. Perciò se la domanda è: *Quante lire ho guadagnato?* si suole rappresentare la *qualità* di essere *guadagno* col + e la *qualità* di essere *perdita* col —. Se invece la domanda è: *Quante lire ho perduto?* si suole rappresentare la *qualità* di essere *perdita* col +, la *qualità* di essere *guadagno* col —.

* Lo 0 è il numero che separa i numeri *positivi* dai *negativi*. Esso non ha segno. Il segno + davanti ad un numero positivo sovente si omette; sarà perciò la stessa cosa scrivere $+5$ o 5; scrivere $+a$ od a. Il segno — non si omette mai.

** I numeri dell'Algebra invece sono i numeri *positivi* ed i *negativi;* li abbiamo tuttavia chiamati *numeri con segno* e non *numeri algebrici*, perchè all'espressione *numero algebrico* si è dato un significato diverso da quello di *numero con segno.* I numeri positivi e negativi compaiono per la prima volta in Diofanto di Alessandria, il quale chiamava i primi *numeri che si aggiungono*, chiamava i secondi *numeri che si tolgono.*

Nelle opere del matematico indiano Âryabhaṭṭa, nato a Pâtaliputra (oggi Patna) nel 476 e morto verso il 550, si trovano per la prima volta i numeri positivi e negativi considerati come esprimenti *avere*, *debito*, lunghezze *verso destra* o *verso sinistra.* Nel secolo XIII i Cinesi scrivevano i numeri positivi in rosso, i negativi in nero. Gli Indiani distinguevano i positivi dai negativi ponendo un punto sopra i negativi.

*** Sono sinonime le espressioni *valore numerico*, *valore assoluto*, *valore aritmetico.*

segno; e diremo che 0 è il successivo di —1; che —1 è il successivo di —2; che —2 è il successivo di —3; ecc. Ne segue che:

Ogni numero con segno ha il successivo ed il precedente.

Si sa dall'Aritmetica che ogni numero della successione naturale dei numeri interi 0, 1, 2, 3, 4, 5,..... è *maggiore* di ciascuno dei numeri che ha alla sua sinistra, e *minore* di ciascuno dei numeri che ha alla sua destra; e noi estenderemo *per convenzione* * questa proprietà anche ai numeri della successione naturale dei numeri con segno.

Da questa convenzione deriva immediatamente:

1°. Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo, e minore anche di 0.

2°. Lo 0 è minore di ogni numero positivo, ma maggiore di ogni numero negativo. **

3°. Di due numeri negativi è maggiore quello il cui valore aritmetico è minore.

4°. Dati due numeri con segno a, b, dovrà sempre verificarsi uno ed uno solo dei tre seguenti casi: $a>b$; $a=b$; $a<b$.

La differenza fra l'Aritmetica e l'Algebra consiste in questo che, oggetto dell'Aritmetica sono i numeri senza segno; mentre l'Algebra studia anche i numeri con segno. ***

---

* Questa convenzione fu posta per la prima volta da Michele Stifel (matematico tedesco, nato in Esslingen nel 1486 o nel 1487, e morto a Jena nel 1567) nella sua *Arithmetica integra,* stampata a Nürnberg nel 1544.

** Queste convenzioni non hanno nulla di strano; concordano anzi assai bene colla realtà delle cose. Infatti: posto p.e. che un numero *positivo* rappresenti *avere* (somma posseduta), e che un numero *negativo* rappresenti *debito*, è chiaro che colui che ha debiti, è più povero di chi non possiede nulla, ma non ha debiti. Di due poi che abbiano debiti, è più povero colui il cui debito ha valore numerico maggiore. Riferendoci ai gradi di temperatura, e chiamando *positivi* i gradi *sopra zero*, e *negativi* quelli *sotto zero*. è chiaro che è *minore* (più bassa) la temperatura quando il termometro segna gradi *sotto zero,* di quando segna gradi *sopra zero,* ed anche di quando segna *zero*. E quando segna gradi *negativi* (sotto zero) è tanto *minore* (più bassa) la temperatura, quanto più *grande* è il valore numerico dei gradi segnati dal termometro.

*** In questo capitolo, parlando dei numeri con segno, abbiamo considerato (per semplicità di esposizione) i soli numeri interi; però i ragionamenti fatti sono d'indole generale, e si possono applicare anche ai numeri con segno frazionari. A tal fine, basta che, nei ragionamenti precedenti, invece di considerare unità intere, si considerino unità frazionarie della forma $^1/_n$ (dove n è un numero qualunque, purchè intero, positivo e diverso da zero). Così facendo si ottiene la successione:

$$(\beta)\ldots\ldots -^5/_n, -^4/_n, -^3/_n, -^2/_n, -^1/_n, 0, +^1/_n, +^2/_n, +^3/_n, +^4/_n, +^5/_n,\ldots\ldots$$

la quale comprende, come caso particolare, la (α). Infatti se nella (β) si pone $n=1$, la (β) si muta nella (α).

In seguito, parlandosi di numeri con segno, intenderemo parlare tanto degli interi, quanto dei frazionari; però (per amore di semplicità) continueremo a scegliere i nostri esempi fra i numeri interi, riferendoci perciò sempre alla successione (α). Per poter applicare. in ogni caso particolare, i ragionamenti ai numeri frazionari, generalizzeremo le definizioni delle operazioni *più* e *meno* nel seguente modo:

DEFINIZIONE. L'operazione *più* (o l'operazione *meno*) dei numeri

L'OPERAZIONE PIÙ DEI NUMERI CON SEGNO.

20. DEFINIZIONE 1ª. Ogni numero della successione naturale dei numeri con segno si dice *il successivo* di quello che gli sta immediatamente a sinistra.

Esempio. —3 è il successivo di —4; 0 è il successivo di —1; +2 è il successivo di +1; ecc.

DEFINIZIONE 2ª. L'operazione *più* dei numeri con segno è l'operazione per cui si passa da un numero con segno al successivo.

Si rappresenta scrivendo il segno + a destra del numero dato.

COROLLARIO. Fare sopra un numero con segno l'operazione *più*, significa passare da questo numero al successivo.

Esempio. —5+ significa che su —5 si fa l'operazione ***più,*** cioè si passa da —5 al successivo che è —4. Similmente +2+ significa che su +2 si fa l'operazione ***più,*** cioè si passa da +2 al successivo che è +3.

DEFINIZIONE 3ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più* b volte, significa fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più;* sul risultato fare l'operazione *più;* sul nuovo risultato fare l'operazione *più;* ecc. b volte. *

Si indica scrivendo $\pm a+b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $\pm a+b=m$.

Esempio. Fare su —2 l'operazione +3, significa fare su —2 l'operazione ***più,*** cioè passare da —2 al successivo che è —1; poi fare su —1 l'operazione ***più,*** cioè passare da —1 al successivo che è 0; poi fare su 0 l'operazione ***più,*** cioè passare da 0 al successivo che è +1. Il numero +1 è il risultato cercato; e scriveremo $-2+3=+1$.

DEFINIZIONE 4ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *più* zero volte significa non fare su $\pm a$ alcuna operazione. Ne segue:

COROLLARIO. $\pm a+0=\pm a$.

---

frazionari è quell' operazione per cui da un numero della successione

$\ldots\ldots -{}^5/_n,\ -{}^4/_n,\ -{}^3/_n,\ -{}^2/_n,\ -{}^1/_n,\ 0,\ +{}^1/_n,\ +{}^2/_n,\ +{}^3/_n,\ +{}^4/_n,\ +{}^5/_n,\ldots\ldots$

si passa al successivo (od al precedente).

DEFINIZIONE. Fare sul numero $^a/_n$ l'operazione $+^b/_n$ (o l'operazione $-^b/_n$), significa fare sul numero $^a/_n$ e nella successione (β), l'operazione *più* (o l'operazione *meno*) b volte.

Si rappresenta scrivendo $^a/_n+^b/_n$ (oppure $^a/_n-^b/_n$).

Volendo applicare ai numeri frazionari i ragionamenti fatti sui numeri interi, bisognerebbe ridurre prima i numeri dati al medesimo denominatore; e se fosse p.e. 12 questo denominatore comune, si porrebbe 12 al posto di n nella (β), e si otterrebbe la (β').

(β') $\ldots\ldots -{}^4/_{12},\ -{}^3/_{12},\ -{}^2/_{12},\ -{}^1/_{12},\ 0,\ +{}^1/_{12},\ +{}^2/_{12},\ +{}^3/_{12},\ +{}^4/_{12},\ldots\ldots$

Si farebbero poi sulla (β') i medesimi ragionamenti fatti sulla (α).

Osservazione. È facile vedere che per $n=1$ le definizioni ora date si riducono a quelle date pei numeri interi.

* Si scrive $\pm a$ per indicare che i ragionamenti che si fanno si riferiscono tanto al numero $+a$ quanto al numero $-a$. La scrittura $\pm a$ si legge *più o meno a.*

L'OPERAZIONE MENO DEI NUMERI CON SEGNO.

21. DEFINIZIONE 1ª. Ogni numero della successione naturale dei numeri con segno si dice *il precedente* di quello che gli sta immediatamente a destra.

Esempio. —3 è il precedente di —2; 0 è il precedente di +1; +2 è il precedente di +3; ecc.

DEFINIZIONE 2ª. L'operazione *meno* dei numeri con segno è l'operazione per cui si passa da un numero con segno al precedente.

Si rappresenta scrivendo il segno — a destra del numero dato.

COROLLARIO. Fare sopra un numero con segno l'operazione *meno*, significa passare da questo numero al precedente.

Esempio. —5— significa che su —5 si fa l'operazione *meno,* ossia si passa da —5 al precedente che è —6; +2— significa che su +2 si fa l'operazione *meno,* ossia si passa da +2 al precedente che è +1.

DEFINIZIONE 3ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno* b volte, significa fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno;* sul risultato fare l'operazione *meno;* sul nuovo risultato fare l'operazione *meno;* ecc. b volte.

Si indica scrivendo $\pm a - b$; e, se m è il numero a cui si arriva, scriveremo $\pm a - b = m$.

Esempio. Fare su +1 l'operazione —3, significa fare su +1 l'operazione *meno,* cioè passare dal numero +1 al precedente che è 0; poi fare su 0 l'operazione *meno,* cioè passare da 0 al precedente che è —1; poi fare su —1 l'operazione *meno,* cioè passare da —1 al precedente che è —2. Il numero —2 è il risultato cercato; e scriveremo $+1-3=-2$.

DEFINIZIONE 4ª. Fare sul numero $\pm a$ l'operazione *meno* zero volte, significa non fare su $\pm a$ alcuna operazione. Ne segue:

COROLLARIO. $\pm a - 0 = \pm a$.

CAPO SECONDO.

Addizione.

22. DEFINIZIONE 1ª. Dicesi *somma* del numero $\pm a$ e del numero $\pm b$ il numero che si ottiene facendo sopra $\pm a$ l'operazione $\pm b$.

DEFINIZIONE 2ª. Dicesi *somma* dei numeri $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, ecc. il numero al quale si arriva facendo prima sopra $\pm a$ l'operazione $\pm b$; poi sul risultato l'operazione $\pm c$; poi sul nuovo risultato l'operazione $\pm d$; ecc. *

* Invece di dire che al numero $\pm a$ si aggiunge $\pm b$, al risultato si aggiunge $\pm c$, al nuovo risultato si aggiunge $\pm d$, ecc. si suole dire che *al numero* $\pm a$ *si aggiungono successivamente* $\pm b$, $\pm c$, $\pm d$, *ecc.*

DEFINIZIONE 3ª. ***L'addizione algebrica*** **è l'operazione per cui, dati due o più numeri con segno, se ne trova la somma.**

Osservazione. Poichè sommare a con $\pm b$ significa fare su a l'operazione $\pm b$, la quale si indica scrivendo $a \pm b$, per indicare p.e. che si somma $+a$ con $+b$ basterà scrivere $+a+b$; per indicare che si somma $+a$ con $-b$ basterà scrivere $+a-b$, ecc.; per indicare che si sommano $-a$, $+b$, $-c$, $-d$, basterà scrivere $-a+b-c-d$. Ed in generale *per indicare che si sommano due o più numeri con segno, basterà scriverli per ordine, uno alla destra dell'altro, col proprio segno.*

È poi importante osservare che le espressioni $+a-b$, $-a+b-c-d$, ecc. rappresentano indifferentemente: 1° *l'indicazione delle operazioni da eseguirsi;* 2° *il numero che si ottiene per risultato finale.*

23. TEOREMA 1°. La somma di due numeri con segno esiste ed ha valore unico.

Siano a, b, *due numeri con segno; si vuol dimostrare che la loro somma esiste ed ha valore unico.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, la somma cercata è il numero che si ottiene facendo su a l'operazione $+b$, se b è positivo; facendo su a l'operazione $-b$, se b è negativo; e quindi questa somma è il successivo od il precedente di un certo numero.

1°. *La somma esiste.* Infatti: se non esistesse, ciò sarebbe perchè si troverebbe un numero con segno privo di numero successivo o di numero precedente, il che (pel § 19) non può essere: Dunque la somma esiste.

2°. *La somma ha valore unico.* Infatti: se questa somma avesse vari valori, ciò avverrebbe perchè si troverebbe un numero con segno avente vari numeri successivi, o vari numeri precedenti. Ma ogni numero con segno ha per successivo un sol numero, e per precedente un sol numero; dunque la somma ha valore unico. *

24. La somma algebrica di due numeri con segno può presentare i quattro seguenti casi: $+a+b$, $-a-b$, $+a-b$, $-a+b$, che esamineremo partitamente. **

1° CASO. $+a+b$. Bisogna fare sopra $+a$ (che è alla destra di 0) l'operazione $+b$, la quale ci porta ad un numero alla destra di $+a$, e quindi anche alla destra di 0. Esso sarà la somma cercata; e sarà positivo perchè alla destra di 0, ed il suo valore numerico sarà eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

---

* Si noti però che, con ciò, intendiamo solamente dire che se a, b, sono numeri con segno, la somma $a+b$ *esiste sempre ed ha un valore unico*, senza preoccuparci per ora di sapere se $a+b$ sia o non sia eguale a $b+a$.

** Per indicare che al numero positivo a aggiungo il numero positivo b, basta scrivere $+a+b$. Però talvolta si rappresenta la parola *aggiungo* col segno $+$; ed allora per non confondere il segno $+$ che significa *aggiungo* col segno $+$ di $+a$ e di $+b$ che significa *positivo*, si scrive $(+a)+(+b)$. Analogamente per gli altri casi. Avremo quindi *per convenzione* le eguaglianze:

$(+a)+(+b)=+a+b$; $\qquad (-a)+(-b)=-a-b$;

$(+a)+(-b)=+a-b$; $\qquad (-a)+(+b)=-a+b$.

Esprimiamo il valore della somma scrivendo $+(a+b)$; ove $(a+b)$ rappresenta la somma dei valori numerici degli addendi, ed il segno $+$ posto avanti alla parentesi, indica che questa somma è positiva.

Avremo quindi: $+a+b=+(a+b)$.

Osservazione. 5 lire di *guadagno* più 2 lire di *guadagno* dánno $5+2$ lire di *guadagno;* ossia, se $+$ rappresenta *guadagno,* e $-$ *perdita,* avremo: $+5+2=+(5+2)=+7$.

2° CASO. $-a-b$. Bisogna fare sopra $-a$ (che è alla sinistra di 0) l'operazione $-b$, la quale ci porta ad un numero alla sinistra di $-a$, e quindi anche alla sinistra di 0. Esso sarà la somma cercata; e sarà negativo perchè alla sinistra di 0, ed il suo valore numerico sarà eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

Esprimiamo il valore della somma scrivendo $-(a+b)$; ove $(a+b)$ rappresenta la somma dei valori numerici degli addendi, ed il segno $-$ posto avanti alla parentesi, indica che questa somma è negativa.

Avremo quindi: $-a-b=-(a+b)$.

Osservazione. 5 lire di *perdita* più 2 lire di *perdita* dánno $5+2$ lire di *perdita;* ossia se $+$ rappresenta *guadagno*, e $-$ *perdita*, avremo: $-5-2=-(5+2)=-7$.

3° CASO. $+a-b$. Bisogna fare sopra $+a$ (che è alla destra di 0) l'operazione $-b$, la quale ci porta ad un numero alla sinistra di $+a$. Questo numero sarà la somma cercata. Esso sarà alla destra di 0 (ossia sarà positivo), se il valore numerico di $+a$ è maggiore del valore numerico di $-b$; sarà 0 se il valore numerico di $+a$ è eguale al valore numerico di $-b$; sarà alla sinistra di 0 (ossia sarà negativo), se il valore numerico di $+a$ è minore del valore numerico di $-b$.

In ogni caso però il valore numerico della somma sarà la differenza dei valori numeri degli addendi, come si vede nei seguenti esempi:

1°. Si abbia $+5-2$. Si fa sopra $+5$ l'operazione -2, e si arriva al numero $+3$; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 5 e 2.

2°. Si abbia $+5-5$. Si fa sopra $+5$ l'operazione -5, e si arriva allo 0; ed è appunto 0 la differenza dei valori numerici 5 e 5.

3°. Si abbia $+2-5$. Si fa sopra $+2$ l'operazione -5, e si arriva al numero -3; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 2 e 5.

Nella 1ª e nella 2ª ipotesi la somma si può rappresentare con $+(a-b)$, e nella 3ª ipotesi con $-(b-a)$. Avremo quindi:

$$+a-b=+(a-b), \quad \text{oppure}: \quad +a-b=-(b-a).$$

Osservazione. 5 lire di *guadagno* più 2 lire di *perdita* dánno $5-2=3$ lire di *guadagno*. Poi 2 lire di *guadagno* più 5 lire di *perdita* dánno $5-2=3$ lire di *perdita*. Ossia, se $+$ rappresenta *guadagno*, e $-$ *perdita*, avremo appunto $+5-2=+(5-2)=+3$; e $+2-5=-(5-2)=-3$.

4° CASO. $-a+b$. Bisogna fare sopra $-a$ (che è alla sinistra di 0) l'operazione $+b$, la quale ci porta ad un numero alla destra di $-a$.

Questo numero sarà la somma cercata. Esso sarà alla sinistra di 0 (ossia negativo), se il valore numerico di $-a$ è maggiore del valore numerico di $+b$; sarà 0 se il valore numerico di $-a$ è eguale al valore numerico di $+b$; sarà alla destra di 0 (ossia positivo), se il valore numerico di $-a$ è minore del valore numerico di $+b$.

In ogni caso però il valore numerico della somma sarà la differenza dei valori numerici degli addendi, come si vede nei seguenti esempi:

1°. Si abbia $-5+2$. Si fa sopra -5 l'operazione $+2$, e si arriva al numero -3; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 5 e 2.

2°. Si abbia $-5+5$. Si fa sopra -5 l'operazione $+5$, e si arriva allo 0; ed è appunto 0 la differenza dei valori numerici 5 e 5.

3°. Si abbia $-2+5$. Si fa sopra -2 l'operazione $+5$, e si arriva al numero $+3$; ed è appunto 3 la differenza dei valori numerici 2 e 5.

Nella 1ª e nella 2ª ipotesi la somma si può rappresentare con $-(a-b)$; e nella 3ª ipotesi con $+(b-a)$. Avremo quindi:

$$-a+b=-(a-b), \quad \text{oppure:} \quad -a+b=+(b-a).$$

Osservazione. 5 lire di *perdita* più 2 lire di *guadagno* dánno $5-2=3$ lire di *perdita*. E poi 2 lire di *perdita* più 5 lire di *guadagno* dánno $5-2=3$ lire di *guadagno*. Ossia, se $+$ rappresenta *guadagno*, e $-$ *perdita* avremo: $-5+2=-(5-2)=-3$; e $-2+5=+(5-2)=+3$.

Riassumendo avremo:

$$+a+b=+(a+b); \qquad +a-b=+(a-b) \quad \text{oppure} \quad =-(b-a);$$
$$-a-b=-(a+b); \qquad -a+b=-(a-b) \quad \text{oppure} \quad =+(b-a).$$

25. Il contenuto del § 24 si può riassumere nella seguente regola:

REGOLA. 1°. La somma di più numeri con segno si indica scrivendo i numeri, per ordine, uno alla destra dell'altro col proprio segno.

2°. La somma di due numeri del medesimo segno ha per valore numerico la somma dei valori numerici degli addendi, e per segno il segno degli addendi.

3°. La somma di due numeri di segno contrario ha per valore numerico la differenza fra il maggiore ed il minore dei valori numerici degli addendi; e per segno, il segno di quell'addendo il cui valore numerico è maggiore. *

26. Dalla definizione dell'addizione algebrica e dalla regola precedente derivano immediatamente i seguenti corollari:

COROLLARIO 1°. La somma di più numeri del medesimo segno ha per valore numerico la somma dei valori numerici degli addendi, e per segno il segno degli addendi.

COROLLARIO 2°. La somma di due numeri contrari è zero. E viceversa: **Se la somma di due numeri con segno è zero, i due numeri sono contrari.**

* Così definita, la somma algebrica di due numeri con segno non porta più necessariamente con sè l'idea di aumento, perchè il valore numerico della somma non è sempre eguale alla somma dei valori numerici degli addendi.

COROLLARIO 3°. $P+a-a=P; \qquad P-a+a=P.$ *

Ossia: facendo sul numero P l'operazione $+a$, e poi sul risultato l'operazione $-a$, si ritorna al numero P; cioè $P+a-a=P$.

Similmente, facendo sul numero P l'operazione $-a$, e poi sul risultato l'operazione $+a$, si ritorna al numero P; cioè $P-a+a=P$.

COROLLARIO 4°. $P+a+b+c+d=P+(a+b+c+d)$.

Ossia: se si fa sul numero P l'operazione $+a$, poi sul risultato l'operazione $+b$, poi sul nuovo risultato l'operazione $+c$, poi sul nuovo risultato l'operazione $+d$, si arriva al medesimo numero al quale si giunge facendo sul numero P l'operazione ***più*** $(a+b+c+d)$ volte. **

Analogamente si ha:

$$P-a-b-c-d=P-(a+b+c+d). \;***$$

27. DEFINIZIONE. In una somma di quanti si voglia numeri con segno non s' introduce modificazione alcuna chiudendo in parentesi i primi due, tre, quattro, ecc. termini.

Esempio. $a-b+c-d-e+f=(a-b)+c-d-e+f=$
$=(a-b+c)-d-e+f=(a-b+c-d)-e+f=$
$=(a-b+c-d-e)+f.$

28. TEOREMA 2°. In una somma algebrica di più termini si può invertire l'ordine dei due ultimi.

DIMOSTRAZIONE. *Rappresentiamo, per brevità, con P (che potrà essere positivo o negativo) la somma algebrica di tutti i termini che precedono i due ultimi. Distingueremo due casi:*

1° Caso. *I due termini sono dello stesso segno.*

La somma data avrà la forma $P+a+b$, oppure $P-a-b$; e pel coroll. 4° § 26, la potremo scrivere $P+(a+b)$, oppure $P-(a+b)$. E

* Il segno $+$ davanti al primo addendo d'una somma si suole sottintendere. Sarà quindi la stessa cosa scrivere $P+a-b$ e scrivere $+P+a-b$.

** I due segni ( ) diconsi *parentesi*, e significano che si suppongono eseguite tutte le operazioni indicate sui numeri che sono posti fra i due segni. Ne segue che tutto ciò che è posto tra i due segni ( ) ***rappresenta un numero unico,*** cioè il numero che si ottiene per risultato finale eseguendo tutte le operazioni indicate sui numeri posti fra i due segni di parentesi.

ESEMPIO. $10+(2+3+1)$ significa che si è già eseguita l'operazione $2+3+1$, e che il risultato (cioè 6) si deve aggiungere al numero 10; mentre invece $10+2+3+1$ significa che a 10 si deve aggiungere 2, al risultato aggiungere 3, ed al risultato aggiungere 1.

Si suole far uso di parentesi di varie forme, come p.e ( ), [ ], { }.

Le prime si dicono *parentesi tonde*, le seconde *parentesi quadre,* le terze *grappe.* Esse però hanno tutte il medesimo significato; ed è affatto indifferente far uso di una o di un'altra forma di parentesi.

*** Questo corollario si può ammettere come evidente. Volendo dimostrarlo in base alla definizione data nella 1ª nota del § 3, si può fare così. Assumendo per definiz. $P+(a+1)=$ $=(P+a)+1=P+a+1$, si dimostra che è $P+(a+b)=P+a+b$; e quindi che è:

$$P+(a+b+c)=P+[(a+b)+c]=P+(a+b)+c=P+a+b+c; \text{ ecc.}$$

L'eguaglianza $P-a-b-c-d=P-(a+b+c+d)$ si dimostra come la precedente. Cioè si pone per definizione $P-(a+1)=(P-a)-1=P-a-1$; poi si dimostra che è: $P-(a+b)=P-a-b$; da cui:

$$P-(a+b+c)=P-[(a+b)+c]=P-(a+b)-c=P-a-b-c; \text{ ecc.}$$

poichè per due numeri aritmetici, in aritmetica si dimostra che è $a+b=$ $=b+a$, la somma si potrà scrivere $P+(b+a)$, oppure $P-(b+a)$. E di nuovo, pel medesimo corollario, potremo togliere la parentesi, ed avremo: $P+b+a$ oppure $P-b-a$. Sarà adunque:

$$P+a+b=P+(a+b)=P+(b+a)=P+b+a.$$
$$P-a-b=P-(a+b)=P-(b+a)=P-b-a.$$

2º ***Caso.*** *I due ultimi termini sono di segno contrario.*

Basta scomporre il termine che ha valore numerico maggiore in due parti, di cui una sia eguale al valore numerico dell'altro termine. Ragionando come nel 1º caso, e ricordando i coroll. 3º e 4º, § 26, si ha:

$$P+5-3=P+(2+3)-3=P+2+3-3=P+2.$$
$$P-3+5=P-3+(3+2)=P-3+3+2=P+2.$$

Dunque $P+5-3=P-3+5$.

Ed in generale: $P+a-b=P-b+a$. *

29. TEOREMA 3º. In una somma algebrica di più termini si possono scambiare di posto due termini consecutivi qualunque.

Dico p.e. che si avrà: $a+b+c-d+e-f=a+b-d+c+e-f$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. prec. si ha: $a+b+c-d=a+b-d+c$; ed aggiungendo ad ambi i membri prima $+e$ e poi $-f$, si ottiene: ** $a+b+c-d+e-f=a+b-d+c+e-f$.

Osservazione. Se i termini consecutivi da scambiare di posto sono i due primi, si fa la medesima dimostrazione, supponendo di avere $0+a+b+c-d+e-f$, invece di $a+b+c-d+e-f$.

30. TEOREMA 4º. Una somma algebrica di più addendi è indipendente dall'ordine degli addendi. *(Legge commutativa).*

Dico p.e. che si ha: $a+b-c-d+e=-d+a-c+e+b$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. preced. si passa dal 1º al 2º membro dell'eguaglianza con scambi successivi di due addendi consecutivi.

31. Dal teor. 4º si ricavano assai facilmente, e con dimostrazioni analoghe a quelle date in aritmetica, varie proprietà dell' addizione algebrica, tra le quali ricordiamo le due seguenti:

COROLLARIO 1º. Per aggiungere ad un numero una somma algebrica, basta aggiungere al numero successivamente ciascun addendo della somma. *(Legge associativa).*

Sia p.e. il numero P cui si vuole aggiungere la somma $-a-b+$ $+c-d$; *dico che basta aggiungere a P successivamente* $-a, -b, +c, -d$.

Dico cioè che sarà: $P+(-a-b+c-d)=P-a-b+c-d$.

Infatti: Pel teor. 4º e per la definiz. del § 27, si ha successivamente:

$$P+(-a-b+c-d)=(-a-b+c-d)+P=-a-b+c-d+P=$$
$$=P-a-b+c-d.$$

---

* Se il termine il cui valore numerico è maggiore fosse negativo, si avrebbe p.e.: $P-5+3=P-(2+3)+3=P-2-3+3=P-2$.
$P+3-5=P+3-(3+2)=P+3-3-2=P-2$. Da cui: $P-5+3=P+3-5$.

** Perchè due numeri eguali aumentati del medesimo numero danno somme eguali.

Analogamente si avrebbe: $P+(a-b+c)=P+a-b+c$.

COROLLARIO 2°. In una somma di più addendi si possono sommare gli addendi per gruppi in un ordine qualsiasi, e poi sommare insieme i risultati. *(Legge associativa.)*

Dico p. e. che si ha:

$$+a-b+c-d+e-f+g=(g-d)+(a-f+c)+(-b+e).$$

Infatti: cambiando opportunamente l'ordine degli addendi, e facendo uso della definizione del § 27, si ha successivamente:

$+a-b+c-d+e-f+g$	$=$	$g-d+a-f+c-b+e=$
per la definiz. del § 27	$=$	$(g-d)+a-f+c-b+e=$
e pel teor. preced.	$=$	$a-f+c+(g-d)-b+e=$
e per la definiz. del § 27	$=$	$(a-f+c)+(g-d)-b+e=$
e pel teor. preced.	$=$	$-b+e+(a-f+c)+(g-d)=$
e per la definiz. del § 27	$=$	$(-b+e)+(a-f+c)+(g-d)=$
e pel teor. preced.	$=$	$(g-d)+(a-f+c)+(-b+e)$. *

CAPO TERZO.

Sottrazione.

32. DEFINIZIONE. Dicesi *differenza* di due numeri con segno un terzo numero con segno che, sommato col secondo, riproduce il primo.

Il primo numero si chiama *minuendo*, il secondo *sottraendo*.

DEFINIZIONE. La *sottrazione algebrica* è quell'operazione per cui, dati due numeri con segno, se ne trova la differenza.

33. TEOREMA 1°. La differenza di due numeri con segno è eguale alla somma del primo numero e del contrario del secondo.

---

* Poichè la somma dei numeri $+a$, $-b$, $+c$ si indica scrivendo $+a-b+c$, la scrittura $+a-b+c$ si può leggere così: *al numero positivo a aggiungo il numero negativo b, ed al risultato aggiungo il numero positivo c.* Considerando $+a-b+c$ sotto questo aspetto, si vede che, fra un numero e l'altro, vi è sottintesa la parola *aggiungo*; e che i segni $+$, $-$ significano rispettivamente *positivo*, *negativo*.

Ma poichè al numero $+a$ aggiungere $-b$ significa fare su $+a$ l'operazione $-b$, il che si indica anche scrivendo $+a-b$, ecc. la scrittura $+a-b+c$ si può anche leggere così: *sopra $+a$ faccio l'operazione $-b$, e sul risultato faccio l'operazione $+c$.* Considerando $+a-b+c$ sotto questo aspetto, i segni $+$ e $-$ che seguono il 1° termine sono, rispettivamente, i segni dell'operazione *più* e dell'operazione *meno.* Il segno che precede il 1° termine significa *positivo*, *negativo.*

Si scorge subito che $+a-b+c$ si può leggere indifferentemente nell'uno o nell'altro dei due modi sopradetti. Analogamente si dirà di ogni altra somma algebrica i cui addendi non sono essi stessi somme algebriche.

Invece nelle scritture $P+(a-b+c)$ e $P+(-a-b+c)$ il segno $+$ che precede la parentesi significa, che *al numero P si aggiunge il numero* $a-b+c$, oppure il numero $-a-b+c$; e quindi questo segno $+$ significa *si aggiunge.* Analogamente si dirà di ogni altro caso in cui un addendo d'una somma è esso stesso una somma.

Siano p.e. i due numeri $+a$ e $+b$; dico che la loro differenza è $+a-b$. Avrò dimostrato il teorema se dimostro che, aggiungendo al numero $+a-b$ il sottraendo $+b$, si ottiene il minuendo $+a$.

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 3° § 26, si ha: $+a-b+b=+a$. Dunque la differenza dei numeri $+a$ e $+b$ è $+a-b$. Analogamente
si trova che » $+a$ e $-b$ è $+a+b$. »
» » $-a$ e $+b$ è $-a-b$. »
» » $-a$ e $-b$ è $-a+b$. * »

Poichè per sommare due numeri con segno basta scriverli uno alla destra dell'altro col proprio segno, avremo la seguente regola:

REGOLA. Per sottrarre da un numero con segno un altro numero con segno, basta scrivere, a destra del primo numero, il contrario del secondo.

34. TEOREMA 2°. La differenza di due numeri con segno esiste, ed ha valore unico.

DIMOSTRAZIONE. Infatti: questa differenza non è altro che la somma del 1° numero e del contrario del 2°; e quindi, pel teor. 1° § 23, esiste, ed ha valore unico.

35. DEFINIZIONE. Da un numero con segno sottrarne successivamente parecchi altri, significa: dal 1° numero sottrarre il 2°, dal risultato sottrarre il 3°, dal nuovo risultato sottrarre il 4°, ecc.

Dalla regola precedente si ricava immediatamente che basta a destra del 1° scrivere il contrario del 2°, a destra del 2° scrivere il contrario del 3°, a destra del 3° scrivere il contrario del 4°, ecc.

Esempio. Per sottrarre da a successivamente $-b$, $-c$, $+d$, $-e$, basta scrivere $a+b+c-d+e$.

36. TEOREMA 3°. Per sottrarre da un numero una somma, basta, alla destra del numero, scrivere, uno dopo l'altro, col segno cambiato, gli addendi della somma.

---

* Per indicare che da $+a$ si sottrae $-b$, si scrive anche: $(+a)-(-b)$. Per indicare che da $-a$ si sottrae $+b$, si scrive anche: $(-a)-(+b)$. Analogamente per gli altri casi. L'enunciato del teorema si può quindi esprimere così:

$$(+a)-(+b)=+a-b;\qquad (-a)-(+b)=-a-b;$$
$$(+a)-(-b)=+a+b;\qquad (-a)-(-b)=-a+b.$$

È da notare che, in questi casi, i segni $+$, $-$, chiusi in parentesi, significano rispettivamente *positivo*, *negativo*; ed il segno $-$ che precede la parentesi significa *si sottrae*. Cfr. la nota ** del § 24. Così definita, la sottrazione non porta più con sè necessariamente l'idea di diminuzione, come succede in Aritmetica. Il valore numerico del resto può essere maggiore o minore del valore numerico del minuendo; perciò la denominazione di *minuendo* che in Aritmetica era esatta, in Algebra non ha più ragione di esistere. La si conserva tuttavia per uniformità di linguaggio. È poi facile vedere che, quando i numeri dati sono tutti positivi, ed il minuendo non è minore del sottraendo, l'addizione e la sottrazione algebrica coincidono, se si prescinde dal segno, rispettivamente coll'addizione e colla sottrazione aritmetica.

Da P (che può anche essere una somma) si voglia sottrarre la somma $-a+b-c+d$. *Dico che il resto sarà* $P+a-b+c-d$*; ossia:*

$$P-(-a+b-c+d)=P+a-b+c-d.$$

Dimostrazione. Avrò dimostrato che $P+a-b+c-d$ è il resto cercato, se dimostro che, sommato col sottraendo $-a+b-c+d$, dà per risultato il minuendo P.

Eseguendo l'addizione abbiamo:

$(P+a-b+c-d)+(-a+b-c+d)=$ pei §§ 27 e 25,
$=P+a-b+c-d-a+b-c+d=$ pel § 30, e pel coroll. 3° § 26,
$=P+a-a+b-b+c-c-d+d=P$.

Dunque $P+a-b+c-d$ è il resto cercato.

Analogamente si avrebbe: $P-(a+b-c)=P-a-b+c$. *

Esempio. *Da* $-2+5-3-8$ *si sottragga* $4+6-3+1$.

Avremo: $(-2+5-3-8)-(+4+6-3+1)=$
$=-2+5-3-8-4-6+3-1=-16$.

SULL'USO DELLE PARENTESI NELL'ADDIZIONE E NELLA SOTTRAZIONE.

37. Se, nelle eguaglianze dimostrate dal coroll. 1° § 31 e dal teor. 3° § 36, scriviamo esplicitamente il segno $+$ davanti al primo termine chiuso entro parentesi, esse si potranno trascrivere così:

(1)..........$P+(+a-b-c+d)=P+a-b-c+d$
(2)..........$P+(-a+b-c+d)=P-a+b-c+d$
(3)..........$P-(+a-b-c+d)=P-a+b+c-d$
(4)..........$P-(-a+b-c+d)=P+a-b+c-d$. **

Aggiungendo ai due membri di queste eguaglianze prima $+e$, e poi $-f$, otteniamo le quattro eguaglianze seguenti:

(1')....$P+(+a-b-c+d)+e-f=P+a-b-c+d+e-f$
(2')....$P+(-a+b-c+d)+e-f=P-a+b-c+d+e-f$
(3')....$P-(+a-b-c+d)+e-f=P-a+b+c-d+e-f$
(4')....$P-(-a+b-c+d)+e-f=P+a-b+c-d+e-f$.

Si vede subito che, in ciascuna di queste eguaglianze, si passa dal 1° al 2° membro sopprimendo la parentesi col segno da cui è preceduta; e

* Se il numero P è esso stesso una somma, il teorema precedente si può enunciare così: Teorema. *Per sottrarre una somma da una somma, basta, in seguito alla somma minuendo, scrivere, uno dopo l'altro, col segno cambiato, i termini della somma sottraendo.*

** Ricordiamo che i segni $+$, $-$, che precedono ciascuna parentesi, significano rispettivamente *si aggiunge*, *si toglie*. Si noti poi che, quando il 1° termine chiuso entro parentesi è positivo, si suole omettere il segno $+$ che lo precede. Perciò in luogo di scrivere p.e. $(+a-b+c)$, si scrive $(a-b+c)$. Il segno $-$ non si omette mai. Perciò non si potrà scrivere p.e. $(a-b+c)$ invece di $(-a-b+c)$.

non si introduce alcun altro cambiamento se la parentesi era preceduta dal segno $+$; si cambia invece il segno a tutti i termini che erano entro la parentesi, se questa era preceduta dal segno $-$.

Analogamente si passa dal 2° al 1° membro di ciascuna eguaglianza chiudendo alcuni termini consecutivi (e quali si voglia) in parentesi, senza introdurre alcun'altra mutazione, se la parentesi si fa precedere dal segno $+$; e cambiando invece il segno a tutti i termini che si chiudono in parentesi, se questa si fa precedere dal segno $-$.

Tutto ciò si suole esprimere concisamente colla seguente regola:

REGOLA. ***Una parentesi racchiudente alcuni termini d'una somma algebrica, si può introdurre o sopprimere a piacimento, senza bisogno di altri cambiamenti, se la parentesi introdotta o soppressa è preceduta dal segno*** $+$; ***cambiando invece il segno a tutti i termini che saranno, o che erano chiusi entro parentesi, se questa è preceduta dal segno*** $-$. *

Esempio. La somma $a-b+c+d-e+f$ si potrà p. e. scrivere così: $a-b+(c+d)-e+f$; oppure: $a-b-(-c-d+e)+f$; oppure: $a-(b-c)+(d-e)+f$.

Togliendo le parentesi nella somma $a+(b-c)-d-(e-f)-(g+h)$, essa prenderebbe la forma $a+b-c-d-e+f-g-h$.**

---

* Quando in una somma vi sono molte parentesi l'una dentro l'altra, e si devono togliere, si può (applicando la regola data) toglierle, una dopo l'altra, procedendo ordinatamente dalle esterne alle interne, oppure dalle interne alle esterne.

ESEMPIO. *Si tolgano le parentesi nella somma* $a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]$.

Cominciando l'eliminazione dalle parentesi interne, avremo successivamente:

$$a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]=a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-x+y\right\}\right]=$$
$$=a-\left[b+\left\{4-d+e-f+3-x+y\right\}\right]=a-\left[b+4-d+e-f+3-x+y\right]=$$
$$=a-b-4+d-e+f-3+x-y.$$

Cominciando invece l'eliminazione dalle parentesi esterne, avremo successivamente:

$$a-\left[b+\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}\right]=a-b-\left\{4-(d-e+f)+3-(x-y)\right\}=$$
$$=a-b-4+(d-e+f)-3+(x-y)=a-b-4+d-e+f-3+(x-y)=$$
$$=a-b-4+d-e+f-3+x-y.$$

Quando si è già acquistato un po' di pratica, riesce più comoda e più rapida l'eliminazione delle parentesi con questo secondo metodo, piuttostochè col primo; e si può anche risparmiare la ripetuta trascrizione della somma, scrivendo subito il risultato finale.

** Le parentesi, nella loro forma attuale, furono adoperate per la 1ª volta dal matematico olandese Alberto Girard (nato verso il 1590 e morto nel 1633) nella sua *Invention*

CAPO QUARTO.

Moltiplicazione e Potenza

PRODOTTO DEI NUMERI CON SEGNO.

38. DEFINIZIONI. 1ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $+a$, significa fare sopra zero l'operazione $+a$, poi sul risultato fare l'operazione $+a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $+a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(+a)(+b)$, che si legge $+a$ *moltiplicato* $+b$.

Avremo quindi per definizione: $(+a)(+b)=+a+a+a+\ldots\ldots$ *b volte.*

2ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $-a$, significa fare sopra zero l'operazione $-a$, poi sul risultato fare l'operazione $-a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(-a)(+b)$, che si legge $-a$ *moltiplicato* $+b$.

Avremo quindi per definizione: $(-a)(+b)=-a-a-a-\ldots\ldots$ *b volte.*

3ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $+a$ *invertita*, significa fare sopra zero l'operazione $+a$ *invertita*, poi sul risultato fare l'operazione $+a$ *invertita*, poi sul risultato fare l'operazione $+a$ *invertita*, ecc. b volte. *

Ossia significa fare sopra zero l'operazione $-a$, poi sul risultato fare l'operazione $-a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(+a)(-b)$, che si legge $+a$ *moltiplicato* $-b$.

Avremo quindi per definizione: $(+a)(-b)=-a-a-a-\ldots\ldots$ *b volte.*

4ª. Fare b volte sopra zero l'operazione $-a$ *invertita*, significa fare sopra zero l'operazione $-a$ *invertita*, poi sul risultato fare l'operazione $-a$ *invertita*, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $-a$ *invertita*, ecc. b volte.

---

nouvelle en l'Algèbre, pubblicata nel 1629. Forse esse non sono altro che una modificazione delle parentesi L J che il bolognese Raffaele Bombelli introdusse nel suo libro *L'Algebra*, pubblicato a Venezia nel 1572. Prima, invece di chiudere una espressione in parentesi, si poneva, sopra o sotto di essa, un tratto orizzontale detto *vinculum;* e, nelle espressioni in cui occorrono varie parentesi una dentro l'altra, si ponevano vari tratti orizzontali uno sopra l'altro. Questa notazione è in uso ancora oggidì.

* Dalle definizioni di operazione *più* e di operazione *meno*, si scorge che l'operazione *più* è l'inversa dell'operazione *meno;* e l'operazione *meno* è l'inversa dell'operazione *più:* epperciò si suol dire che l'operazione *più* è l'operazione *meno invertita;* e che l'operazione *meno* è l'operazione *più invertita*. E quindi:

Fare l'operazione *più invertita*, **significa fare l'operazione** *meno*.
Fare l'operazione *meno invertita*, **significa fare l'operazione** *più*.
Fare l'operazione $+b$ *invertita*, **significa fare l'operazione** $-b$.
Fare l'operazione $-b$ *invertita*, **significa fare l'operazione** $+b$.

Ossia significa fare sopra zero l'operazione $+a$, poi sul risultato fare l'operazione $+a$, poi sul nuovo risultato fare l'operazione $+a$, ecc. b volte.

Si rappresenta scrivendo $(-a)(-b)$, che si legge $-a$ *moltiplicato* $-b$.

Avremo quindi per definizione: $(-a)(-b)=+a+a+a+\ldots_{b\ volte}$.

5ª. Dicesi *prodotto* del numero positivo $+a$ per il numero positivo $+b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $+a$.

6ª. Dicesi *prodotto* del numero negativo $-a$ pel numero positivo $+b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $-a$.

7ª. Dicesi *prodotto* del numero positivo $+a$ pel numero negativo $-b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $+a$ *invertita*.

8ª. Dicesi *prodotto* del numero negativo $-a$ pel numero negativo $-b$, il numero che si ottiene facendo b volte sopra zero l'operazione $-a$ *invertita*.

9ª. Dicesi *prodotto* di più numeri con segno il numero che si ottiene moltiplicando il 1° numero pel 2°, poi il prodotto ottenuto pel 3°, poi il nuovo prodotto ottenuto pel 4°, ecc.*

Il prodotto dei numeri $+a$, $+b$, $-c$, $+d$, $-e$, si indica scrivendo $(+a)(+b)(-c)(+d)(-e)$. I numeri dati si chiamano *i fattori del prodotto*. Quando il prodotto ha due soli fattori, il 1° si chiama *moltiplicando*, il 2° *moltiplicatore*.

10ª. La *moltiplicazione algebrica* è l'operazione per cui, dati due o più numeri con segno, se ne trova il prodotto.

11ª. Se $a, b, c, d, e, \ldots$ sono numeri con segno, sarà la stessa cosa scrivere $abcde\ldots$, od $(ab)cde\ldots$, od $(abc)de\ldots$, od $(abcd)e\ldots$, ecc.

39. Il prodotto di due numeri con segno presenta i seguenti casi:

1° Caso. Moltiplicando positivo e moltiplicatore positivo.

Per la definizione 1ª § 38, è: $(+a)(+b)=+a+a+a+\ldots_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 26, $=+(ab)$. **

2° Caso. Moltiplicando negativo e moltiplicatore positivo.

Per la definizione 2ª § 38, è: $(-a)(+b)=-a-a-a-\ldots_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 26, $=-(ab)$.

3° Caso. Moltiplicando positivo e moltiplicatore negativo.

Per la definizione 3ª § 38, è: $(+a)(-b)=-a-a-a-\ldots_{b\ volte}=$
per il coroll. 1° § 26 $=-(ab)$.

---

* Sono sinonime le espressioni *trovare il prodotto di a, b*, e *moltiplicare a per b*.

Il segno $\times$ della moltiplicazione si trova per la 1ª volta nella *Clavis mathematica* del parroco inglese Guglielmo Oughtred (nato in Eton, contea di Buckingham, in Inghilterra, nel 1574, e morto nel 1660) stampata nel 1631. Fu Renato Descartes (nato a Lahaye, nella Turrena, nel 1596, e morto in Svezia nel 1650) che propose di mettere un punto tra un fattore e l'altro; e fu Michele Stifel (1486-1567) che suggerì di scrivere i fattori, uno a destra dell'altro, senza frapporvi alcun segno.

** La scrittura $+(ab)$ indica che il valore numerico del prodotto è ab, e che il prodotto è positivo. La scrittura $-(ab)$ indica che il valore numerico del prodotto è ab, e che il prodotto è negativo. Invece di $+(ab)$ e $-(ab)$, si suole scrivere semplicemente $+ab$ e $-ab$.

4° Caso. Moltiplicando negativo e moltiplicatore negativo.

Per la definizione 4ª § 38, è: $(-a)(-b)=+a+a+a+\ldots_{b\ volte.}=$ per il coroll. 1° § 26, $=+(ab)$.

Riassumendo i quattro casi abbiamo:

$(+a)(+b)=+ab;$ $(+a)(-b)=-ab;$
$(-a)(+b)=-ab;$ $(-a)(-b)=+ab.$ *

---

* Non è fuor di proposito far osservare ai principianti che la regola dei segni, nella moltiplicazione algebrica, non contraddice alla realtà delle cose. Si abbia p. e. un termometro.

+5
+4
+3
+2
+1
0
−1
−2
−3
−4
−5

Sappiamo che i gradi *sopra zero* si sogliono scrivere preceduti dal segno +; e quelli *sotto zero*, preceduti dal segno —. Cosicchè per scrivere p. e. 3 gradi *sopra zero*, si scrive +3°; e 7 gradi *sotto zero*, si scrive −7°.

Proponiamoci di risolvere il seguente problema.

PROBLEMA. *In un dato termometro l'altezza della colonna di mercurio varia (continuamente calando oppure continuamente salendo) di 2 gradi all'ora. A mezzodì il termometro segna 0 gradi. Quanti gradi segnerà in un tempo che è separato da mezzodì per un intervallo di 4 ore?*

SOLUZIONE. Poichè l'altezza della colonna di mercurio varia di 2 gradi all'ora, in 4 ore varierà di gradi 2.4=8; e, se a mezzodì segnava 0°, all'ora richiesta segnerà 8°. Il problema si risolve dunque eseguendo una moltiplicazione; e la risposta è che il termometro segnerà 8°. Resta solo a sapere se questi 8 gradi sono *positivi* o *negativi*. A tal fine conveniamo p.e. di chiamare *positivi* i gradi percorsi dalla estremità della colonna di mercurio *durante la salita*, e *negativi* quelli percorsi *durante la discesa*. Conveniamo ancora di chiamare *positive* le ore *pomeridiane*, e *negative* quelle *antimeridiane*. Risolviamo separatamente i quattro casi che si possono presentare.

1° CASO. *L'estremità della colonna del termometro sale di 2 gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna 0°. Quanti gradi segnerà alle ore 4 dopo mezzogiorno?*

SOLUZIONE. In questo caso i gradi sono percorsi *in salita*, e quindi avremo +2°. Le ore sono *pomeridiane*, e quindi avremo +4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(+2)(+4)=+8$.

Risposta. Il termometro segnerà +8°. Ed infatti: se l'estremità della colonna *sale*, ed a mezzodì si trova *a zero*, dopo mezzodì si troverà *al di sopra di zero*.

2° CASO. *L'estremità della colonna del termometro sale di 2 gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna 0°. Quanti gradi segnava 4 ore prima di mezzogiorno?*

SOLUZIONE. In questo caso i gradi sono percorsi *in salita*, e quindi avremo +2°. Le ore sono *antimeridiane*, e quindi avremo −4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(+2)(-4)=-8$.

Risposta. Il termometro segnava −8°. Ed infatti: se la colonna *sale*, ed a mezzodì si trova *a zero*, prima di mezzodì si trovava *al disotto di zero*.

3° CASO. *L'estremità della colonna del termometro discende di 2 gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna 0°. Quanti gradi segnerà alle ore 4 dopo mezzogiorno?*

SOLUZIONE. In questo caso i gradi sono percorsi *in discesa*, e quindi avremo −2°. Le ore sono *pomeridiane*, e quindi avremo +4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, otteniamo: $(-2)(+4)=-8$.

Risposta. Il termometro segnerà −8°. Ed infatti: se l'estremità della colonna *discende*, ed a mezzodì si trova a *zero*, dopo mezzodì si troverà *al disotto di zero*.

4° CASO. *L'estremità della colonna del termometro di scende di 2 gradi all'ora, ed a mezzogiorno segna 0°. Quanti gradi segnava 4 ore prima di mezzogiorno?*

SOLUZIONE. In questo caso i gradi sono percorsi *in discesa*, e quindi avremo −2°. Le ore sono *antimeridiane*, e quindi avremo −4. Eseguendo la moltiplicazione algebrica, abbiamo: $(-2)(-4)=+8$.

40. Da quanto precede si deduce la seguente regola:

REGOLA. 1. Il prodotto di due numeri con segno è un numero positivo se i fattori sono dello stesso segno; negativo se i fattori sono di segno contrario. *

2. Il valore numerico del prodotto di due numeri con segno è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori.

COROLLARIO 1°. In un prodotto di due numeri con segno, se uno dei fattori è l'unità, il valore numerico del prodotto è eguale al valore numerico dell'altro fattore.

DIMOSTRAZIONE. Ciò deriva immediatamente dalla 2ª parte della regola precedente, e dal fatto che, in Aritmetica, se uno dei due fattori è l'unità, il prodotto è eguale all'altro fattore.

COROLLARIO 2°. In un prodotto di due numeri con segno, se uno dei fattori è zero, il prodotto è pure zero.

DIMOSTRAZIONE. $(\pm a)0$ significa che su 0 si fa l'operazione $\pm a$ 0 volte; ossia che su 0 non si fa alcuna operazione. Dunque $(\pm a)0=0$.

$0(+a)$ significa che su 0 si fa l'operazione 0 (ossia nessuna operazione) a volte; cioè si sta fermi sullo 0. Dunque $0(+a)=0$.

Analogamente $0(-a)=0$; $0.0=0$.

41. TEOREMA 1°. Il valore numerico del prodotto di più fattori è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori. Il segno del prodotto è positivo se il numero dei fattori negativi è pari; è negativo se il numero dei fattori negativi è dispari.

Sia p.e. il prodotto $(+a)(-b)(-c)(+d)(-e)(+f)$ *il quale ha un numero dispari di fattori negativi. Dico che il prodotto sarà negativo, ed eguale al numero* $-(abcdef)$*; ove* $abcdef$ *indica il prodotto dei valori numerici dei fattori.*

Risposta. Il termometro segnava $+8°$. Ed infatti: se l'estremità della colonna *discende*, ed a mezzodì si trova *a zero*, prima di mezzodì si trovava *al di sopra di zero*.

OSSERVAZIONE. I gradi percorsi *in salita* e le ore *pomeridiane* si potevano chiamare indifferentemente *positivi* o *negativi*. Se avessimo chiamati *negativi* i gradi percorsi *in salita*, e *negative* le ore *pomeridiane*, avremmo ottenuto il medesimo risultato finale. Ma, se avessimo chiamati *positivi* i gradi percorsi *in salita*, e *negative* le ore *pomeridiane*, la regola sul segno del prodotto non avrebbe più concordato coll'esperienza. In questo caso, per farla concordare, bastava definire il prodotto di due numeri con segno in modo che esso fosse positivo quando i fattori sono di segno contrario, e fosse negativo quando i fattori sono dello stesso segno. E così realmente si poteva fare. Però si preferì definire il prodotto di due numeri con segno in modo che esso sia positivo quando i fattori sono entrambi positivi. Se si vuole che, in una data questione, la regola dei segni concordi coll'esperienza, bisogna scegliere i segni delle grandezze in modo che, quando le grandezze sono entrambe positive, anche il loro prodotto sia positivo.

* Questa proposizione si suole anche enunciare così: *Il moltiplicatore positivo lascia il segno del moltiplicando; il moltiplicatore negativo lo cambia.* La regola del segno del prodotto si trova enunciata esplicitamente per la prima volta nell'Aritmetica di Diofanto di Alessandria (325-409).

Dimostrazione. Per trovare il prodotto cercato si fa così: Si moltiplica $(+a)$ per $(-b)$, e si ottiene $-(ab)$; poi si moltiplica $-(ab)$ per $(-c)$, e si ottiene $+[(ab)c]=+(abc)$; poi si moltiplica $+(abc)$ per $(+d)$, e si ottiene $+[(abc)d]=+(abcd)$; poi si moltiplica $+(abcd)$ per $(-e)$, e si ottiene $-[(abcd)e]=-(abcde)$; poi si moltipl. $-(abcde)$ per $(+f)$, e si ottiene $-[(abcde)f]=-(abcdef)$.

Si vede così che, in ciascun prodotto parziale, il valore numerico del prodotto è sempre eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori. Si vede pure che il prodotto si fa negativo col 1°, col 3°, col 5°, ecc. fattore negativo che si incontra; si fa invece positivo col 2°, col 4°, col 6°, ecc. fattore negativo che si incontra. Dunque..... *

COROLLARIO 1°. Il prodotto di più numeri con segno è indipendente dall'ordine dei fattori. *(Legge commutativa.)*

In un prodotto di più numeri con segno a parecchi fattori, e quali si voglia, si può sostituire il loro prodotto effettuato. E viceversa. *(Legge associativa).*

Dimostrazione. Se si varia l'ordine dei fattori, o ad alcuni fattori si sostituisce il loro prodotto, od al prodotto di alcuni si sostituiscono i fattori, *il segno del prodotto finale non cambia,* perchè esso dipende solamente dal numero dei fattori negativi, e non dal posto che essi occupano: *il valore numerico del prodotto finale non cambia,* perchè esso è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori, il quale (per noti teor. d'Aritm.) ha la proprietà commutativa e la associativa.

COROLLARIO 2°. Affinchè il prodotto di più numeri con segno sia zero, è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori.

Dimostrazione. Il valore numerico del prodotto è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori; ed affinchè questo prodotto sia zero, (per un noto teor. d'Aritm.) è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori.

COROLLARIO 3°. Il prodotto di quanti si voglia numeri con segno esiste, ed ha valore unico.

Dimostrazione. Pel teor. preced., il valore numerico del prodotto esiste ed ha valore unico; perchè (per un teor. d'Aritm.) il prodotto di quanti si voglia numeri aritmetici esiste, ed ha valore unico. Esiste poi sempre un unico segno del prodotto: dunque.........

---

* Se i fattori d'un prodotto sono tutti positivi, il prodotto sarà evidentemente positivo. Si dice allora che il numero dei fattori negativi è zero; e si considera lo zero come un numero pari. Dal teorema risulta che il segno di un prodotto dipende *solamente* dal numero dei fattori negativi; e che il valore numerico del prodotto dipende *solamente* dal valore numerico dei fattori.

§ 41

42. TEOREMA 2°. Cambiando il segno ad un fattore, si cambia il segno al prodotto.

DIMOSTRAZIONE. Se si cambia un segno + in —, il numero dei fattori negativi aumenta d'una unità; e se si cambia un segno — in +, il numero dei fattori negativi diminuisce d'una unità. Quindi: se prima il numero dei fattori negativi era pari (o dispari), dopo sarà dispari (o pari); e perciò, se il prodotto prima era positivo (o negativo), dopo sarà negativo (o positivo). *

POTENZA DEI NUMERI CON SEGNO.

43. DEFINIZIONI. ***Potenza*** **è un prodotto di fattori eguali fra loro.**

Base **della potenza è uno dei fattori.**

Esponente **della potenza è il numero dei fattori.**

Esempio. *a.a.a è una potenza. La base è a; l'esponente è* 3.

Una potenza si dice *pari* o *dispari*, secondochè l'esponente è un numero *pari* o *dispari;* si dice *seconda, terza, quarta*, ecc. *ennesima*, secondochè l'esponente è 2, 3, 4, ecc. *n*. **

---

* **DEFINIZIONE. Dicesi** *prodotto* **della frazione** $\pm a/m$ **per la frazione** $+b/n$, **il numero al quale si arriva se, nella successione**

$$\ldots\ldots -3/mn,\ -2/mn,\ -1/mn,\ 0,\ +1/mn,\ +2/mn,\ +3/mn,\ldots\ldots$$

si fa b **volte sopra zero l'operazione** $\pm a$.

Si rappresenta scrivendo $(\pm a/m).(+b/n)$. È poi sottinteso che a, b, m, n, sono numeri interi, positivi; ed m, n, sono diversi da zero.

DEFINIZIONE. Dicesi *prodotto* **della frazione** $\pm a/m$ **per la frazione** $-b/n$, **il numero al quale si arriva se, nella successione**

$$\ldots\ldots -3/mn,\ -2/mn,\ -1/mn,\ 0,\ +1/mn,\ +2/mn,\ +3/mn,\ldots\ldots$$

si fa b **volte sopra zero l'operazione** $\pm a$ *invertita*.

Si rappresenta scrivendo: $(\pm a/m)(-b/n)$. Ne segue immediatamente che si ha:

$$\left(+\frac{a}{m}\right)\left(+\frac{b}{n}\right)=+\frac{ab}{mn}=+\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\right);\qquad \left(-\frac{a}{m}\right)\left(+\frac{b}{n}\right)=-\frac{ab}{mn}=-\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\right);$$

$$\left(+\frac{a}{m}\right)\left(-\frac{b}{n}\right)=-\frac{ab}{mn}=-\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\right);\qquad \left(-\frac{a}{m}\right)\left(-\frac{b}{n}\right)=+\frac{ab}{mn}=+\left(\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\right).$$

Infatti: in ogni caso il prodotto ha per denominatore mn, perchè è un numero della successione..... $-2/mn$, $-1/mn$, $0/mn$, $+1/mn$, $+2/mn$,......... Poichè questa successione differisce dalla..... -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$,..... solamente pel denominatore, il segno ed il numeratore del prodotto saranno rispettivamente i segni ed i valori numerici di uno dei quattro prodotti $(\pm a)(+b)$; $(\pm a)(-b)$.

Resta così estesa la regola della moltiplicazione anche al caso in cui i due fattori sono frazionari. Se uno dei fattori è intero, basta supporre di dargli per denominatore l'unità positiva. È poi facile vedere che la definizione data di prodotto di due frazioni comprende, come caso particolare, la definizione del prodotto di due numeri interi. Basta infatti supporre che sia $m=n=1$, e si ha la definizione del prodotto di due numeri interi.

** La parola *potenza*, usata per la prima volta da Raffaele Bombelli (1572), è la traduzione di δύναμις, nome che Ippocrate di Chio (nato verso il 450 a. C.) diede alla 2ª potenza. Questo nome poi venne esteso anche alle altre potenze. Prima di Bombelli, la 2ª potenza si chiamava *quadrato*, la 3ª *cubo*, la 4ª *quadrato quadrato*, la 5ª *quadrato cubo*, la 6ª *cubo cubo*; e questa nomenclatura non oltrepassava ordinariamente la 6ª potenza. Le potenze dei numeri incogniti (cioè dei numeri cercati dal problema) avevano nomi spe-

Osservazione 1ª. Una potenza si indica scrivendo la *base* una volta sola, e poi l'*esponente*, a destra della base, ed in alto. Così invece di *aaa*, si scrive a^3; invece di $(-a)(-a)(-a)(-a)$, si scrive $(-a)^4$. *

Osservazione 2ª. Risulta immediatamente dalla definizione che l'esponente deve essere un numero *intero, positivo, diverso da uno e da zero;* e tale supporremo che sia nel corso di questo capitolo. Vedremo poi come si possa, mediante opportune convenzioni, generalizzare la definizione di potenza in modo da poter togliere tutte queste restrizioni.

44. TEOREMA 1°. Le potenze pari sono tutte positive, qualunque sia il segno della base.

*Se a è un numero positivo, e 2m un numero pari, dico che si avrà:***

$$(+a)^{2m} = +a^{2m}; \qquad (-a)^{2m} = +a^{2m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè i fattori hanno tutti lo stesso segno, ed il numero dei fattori è pari, (pel teor. 1° § 41) il loro prodotto (cioè la potenza) sarà un numero positivo, qualunque sia il segno dei fattori.

45. TEOREMA 2°. Le potenze dispari hanno sempre il segno della base.

Dico cioè che ogni potenza dispari è positiva, se la base è positiva; negativa, se la base è negativa. Epperciò, se a è un numero positivo, e 2m+1 un numero dispari, avremo: ***

$$(+a)^{2m+1} = +a^{2m+1}; \qquad (-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}.$$

DIMOSTRAZIONE. *1° Caso. Base positiva.* Poichè i fattori sono positivi, il loro prodotto (cioè la potenza) sarà un numero positivo, qualunque sia il numero dei fattori.

2° Caso. Base negativa. Poichè i fattori sono tutti negativi, e sono in numero dispari, il loro prodotto (ossia la potenza) è un prodotto di un numero dispari di fattori negativi, e perciò (teor. 1° § 41) è un numero negativo.

---

ciali. P.e., l'incognita si chiamava *cosa*; il quadrato dell'incognita, *censo*; il cubo dell'incognita, *cubo*; la 4ª potenza dell'incognita, *censo censo*; la 5ª potenza, *primo relato*; la 6ª potenza, *censo del cubo*, o *cubo del censo*; la 7ª potenza, *secondo relato*; ecc. Fu il matematico francese Nicola Chuquet (nato a Parigi verso il 1445) che introdusse, per le potenze, i nomi *numero secondo*, *numero terzo*, *numero quarto*, *numero quinto*, ecc.; i quali, dopo Bombelli, si mutarono in *potenza seconda*, *terza*, *quarta*, *quinta*, ecc.

Per scrivere le potenze, dapprima non si usavano segni speciali; nei secoli XV, XVI, si proposero varie notazioni, le quali però non entrarono nell'uso comune. La notazione attuale è dovuta a Renato Descartes (1596–1650).

* I segni +, —, se sono entro la parentesi, si riferiscono *alla sola base*; se sono fuori della parentesi, si riferiscono *alla potenza*, ossia al risultato dell'operazione. Così, p.e., $(-a)^4$ significa: $(-a)(-a)(-a)(-a)$; mentre, p.e., $-a^4$ significa: $-(aaaa)$.

** Poichè i numeri pari sono i multipli di 2, ogni numero pari si può mettere sotto la forma $2m$, ove si suppone che m sia un *numero intero*. In questo caso particolare, supponiamo inoltre che m sia *positivo e diverso da zero*.

*** Ogni numero dispari, essendo il successivo od il precedente di un numero pari, potrà avere la forma $2m+1$, oppure la forma $2m-1$.

46. TEOREMA 3°. La potenza emmesima di un prodotto è eguale al prodotto delle potenze emmesime dei fattori.

Dico p.e. che la potenza emmesima del prodotto abcd è $a^m b^m c^m d^m$; *ossia che è:* $(abcd)^m = a^m b^m c^m d^m$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione (§ 43) si ha:

$$(abcd)^m = (abcd)\,(abcd)\,(abcd) \ldots\ldots_{m\ volte} =$$

pel coroll. 1° § 41* $= abcd\,abcd\,abcd \ldots\ldots_{m\ volte} =$

pel medesimo coroll.** $= (aaa\ldots)\,(bbb\ldots)\,(ccc\ldots)\,(ddd\ldots) = a^m b^m c^m d^m$.

47. TEOREMA 4°. Il prodotto di due potenze della medesima base è una potenza della medesima base avente per esponente la somma degli esponenti.

Siano le due potenze a^m *ed* a^n; *dico che sarà:* $a^m.a^n = a^{m+n}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la definiz. del § 43, e pel coroll. 1° § 41, si ha:

$$a^m.a^n = (a.a.a \ldots\ldots_{m\ volte})(a.a.a \ldots\ldots_{n\ volte.}) =$$
$$= (a.a.a \ldots\ldots_{m+n\ volte}) = a^{m+n}.$$

COROLLARIO. Analogamente si avrà:

$$a^m.a^n.a^p.a^q \ldots\ldots = (aaa \ldots\ldots\ldots_{m+n+p+q\ volte}) = a^{m+n+p+q\ldots\ldots}$$

48. TEOREMA 5°. La potenza n^a della potenza m^a di un numero è eguale alla potenza mn^a di quel numero. ***

Sia p.e. da elevare a^m *alla potenza* n^a; *dico che si avrà per risultato quella potenza di a che ha per esponente il prodotto mn; ossia:*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la definiz. del § 43, e pel coroll. § 47, si ha:

$$(a^m)^n = a^m a^m a^m \ldots\ldots_{n\ volte.} = a^{m+m+m+\ldots\ (n\ volte)} = a^{mn}.\ ****$$

49. DEFINIZIONE. elevare a successivamente alle potenze m, n, p, q, ecc. significa: Elevare a alla potenza m^a, poi elevare il risultato alla potenza n^a, poi elevare il nuovo risultato alla potenza p^a, poi elevare il nuovo risultato alla potenza q^a, ecc.

Si indica scrivendo $\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^{q\ldots\ldots}$

COROLLARIO 1°. Per elevare a successivamente alle potenze m, n, p, q,..... basta elevare a a quella potenza che ha per esponente il prodotto $mnpq$....... degli esponenti.

DIMOSTRAZIONE. Eseguendo per ordine, una dopo l'altra, queste elevazioni a potenza, si ha successivamente:

$$\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^q = \left((a^{mn})^p\right)^q = \left(a^{mnp}\right)^q = a^{mnpq}.$$

---

* Al prodotto eseguito di alcuni fattori sostituendone i fattori.

** Ad alcuni fattori sostituendo il loro prodotto.

*** Questo teorema si suole enunciare così: ***Per elevare una potenza ad una potenza, basta scrivere una potenza della medesima base avente per esponente il prodotto degli esponenti.***

**** Si stabilisce per convenzione che sia la stessa cosa scrivere $a^{(m+n)}$, o scrivere a^{m+n}. Così pure sia la medesima cosa scrivere $a^{(m \cdot n)}$, oppure $a^{m \cdot n}$.

COROLLARIO 2°. Se si eleva una base successivamente a diverse potenze, è indifferente l'ordine con cui si eseguiscono queste elevazioni a potenza.

Dico che si avrà p.e. $\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^q = \left(\left((a^q)^n\right)^m\right)^p$.

DIMOSTRAZIONE. Pel corollario precedente si ha:

$$\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^q = a^{mnpq}; \quad \left(\left((a^q)^n\right)^m\right)^p = a^{qnmp}.$$

Ma sappiamo che è sempre $mnpq = qnmp$, perchè il prodotto è indipendente dall'ordine dei fattori; sarà dunque:

$$a^{mnpq} = a^{qnmp}; \text{ e quindi } \left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^q = \left(\left((a^q)^n\right)^m\right)^p.$$

Da questi due corollari deriva immediatamente:

COROLLARIO 3°. Per elevare una base ad una potenza il cui esponente è un prodotto di fattori, basta elevare la base successivamente alle potenze indicate dai singoli fattori presi in un ordine arbitrario.

PRODOTTO E POTENZA DEI MONOMI.

50. DEFINIZIONE. Un numero solo, od un prodotto di due o più fattori, si chiama *monomio*.

Esempio. Sono monomi -5, a; $+m$, $4a^2b$, $3(a+b)(m-2n)$.

Il fattore numerico di un monomio dicesi *coefficiente* del monomio. *

Esempio. In $-4a^2b$ il coefficiente è -4; in $+3xy^4$ è $+3$.

Osservazione. In un monomio che non abbia segnato alcun fattore numerico, si sottintende il fattore $+1$, e quindi un tale monomio ha per coefficiente $+1$. P. e. il coefficiente di a^2b è $+1$.

51. PRODOTTO DEI MONOMI.

Esempio 1°. *Si trovi il prodotto di* $+4a^2bc$ *per* $-3a^3b^2n$.

Per la regola del § 40, è: $(+4a^2bc)(-3a^3b^2n) = -\left[(4a^2bc)(3a^3b^2n)\right] =$

pel corollario 1° § 41 $= -(4.3)(a^2.a^3)(b.b^2)cn =$

pel teorema § 47 $= -12a^5b^3cn$.

Esempio 2°. *Si trovi il prodotto di* $-{}^1/_2 p^2q$ *per* $-3pqr$.

Ragionando come nell'esempio precedente, avremo:

$$\left(-\frac{1}{2}p^2q\right)(-3pqr) = +\left[\left(\frac{1}{2}p^2q\right)(3pqr)\right] = +\left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)(p^2p)(qq)r =$$
$$= +\frac{3}{2}p^3q^2r.$$

---

* La parola *coefficiente* fu introdotta da Francesco Viète nel 1591, e non se ne conosce l'etimologia. Viète nacque in Fontenay-le-Comte (Poitou) nel 1540, e morì a Parigi nel 1603: egli fece fare grandissimi progressi all'Algebra; ed è forse il più grande matematico del suo secolo.

Esempio 3°. *Si trovi il prodotto di* $-5a^2b$, $+2ab^3c$, $-3b^2c^2$.

Ragionando come nell'esempio 1°, avremo:

$$(-5a^2b)(+2ab^3c)(-3b^2c^2) = +[(5a^2b)(2ab^3c)(3b^2c^2)] =$$
$$= +(5.2.3)(a^2a)(bb^3b^2)(cc^2) = +30a^3b^6c^3.$$

Da questi esempi si ricava la seguente regola:

REGOLA. 1°. Il prodotto di due o più monomi è un monomio.

2°. Il segno del prodotto è positivo, se i fattori sono tutti positivi, o se il numero dei fattori negativi è pari; è negativo, se il numero dei fattori negativi è dispari.

3°. Il coefficiente del prodotto è il prodotto dei coefficienti dei fattori.

4°. I fattori letterali sono tutti, e soli, quelli dei monomi dati, scritti ciascuno una volta sola.

5°. L'esponente di ciascun fattore letterale del prodotto è la somma degli esponenti che il medesimo fattore letterale ha nei monomi dati. Un fattore letterale che si trovi in un solo monomio, conserva, nel prodotto, il proprio esponente inalterato.

52. POTENZA DEI MONOMI.

Esempio 1°. *Si elevi* $-2a^5b^3c^2$ *alla* 3ª *potenza.*

Pel teor. 3° § 46, avremo: $(-2a^5b^3c^2)^3 = -2^3.(a^5)^3.(b^3)^3.(c^2)^3 =$

pel teorema 5° § 48 $= -8a^{5\cdot3}.b^{3\cdot3}.c^{2\cdot3} = -8a^{15}b^9c^6$.

Esempio 2°. *Si elevi* $+{}^3/_5xy^2m^4$ *alla* 2ª *potenza.*

Ragionando come nell'esempio precedente, avremo:

$$\left(+\frac{3}{5}xy^2m^4\right)^2 = +\left(\frac{3}{5}\right)^2.x^2.(y^2)^2.(m^4)^2 = +\frac{3^2}{5^2}x^2.y^{2\cdot2}.m^{4\cdot2} =$$
$$= +\frac{9}{25}x^2y^4m^8.$$

Ne segue immediatamente la regola:

REGOLA. 1°. La potenza m^a ***di un monomio è un monomio.***

2°. Il segno della potenza è positivo, se l'esponente è pari; è il segno della base, se l'esponente è dispari.

3°. Il coefficiente della potenza è la potenza m^a ***del coefficiente della base.***

4°. I fattori letterali della potenza sono quelli della base, coi rispettivi esponenti moltiplicati per m. *

---

* Per applicare la 4ª parte della regola, si suppone che, se un numero non ha segnato alcun esponente, abbia per esponente sottinteso 1. Si pone cioè per convenzione $a = a^1$.

AVVERTENZE. Ricordino bene i principianti che:

1°. *Il coefficiente non si moltiplica per* m, *ma si eleva alla potenza* m^a. Perciò sarà p.e. $(3a^2b^3c)^2 = 3^2.a^4b^6c^2$, e non $(3a^2b^3c)^2 = 3.2.a^4b^6c^2$.

MOLTIPLICAZIONE DEI POLINOMI.

53. DEFINIZIONE. Dicesi *polinomio* la somma di più monomi. *
Il polinomio di due soli monomi si chiama *binomio;* quello di tre, *trinomio*. Ciascun monomio poi si chiama anche *un termine* del polinomio.

Esempio. $a-2b$ è un binomio; $-2+c-7$ è un trinomio.

54. TEOREMA. Per moltiplicare una somma per un numero, basta moltiplicare ciascun addendo della somma per questo numero, e poi sommare i prodotti parziali. *(Legge distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.)*

Sia p.e. la somma $a-b+c$ da moltiplicare per $+m$: dico che basterà moltiplicare $+a$ per $+m$, e si ha $+am$; poi moltiplicare $-b$ per $+m$, e si ha $-bm$; poi moltiplicare $+c$ per $+m$, e si ha $+cm$; ed infine sommare i risultati; e si ha: $+am-bm+cm$.

Dico dunque che avremo: $(a-b+c)(+m)=+am-bm+cm$.

Analogamente avremo: $(a-b+c)(-m)=-am+bm-cm$.

DIMOSTRAZIONE. ***Moltiplicatore positivo.*** Per le definizioni 5ª e 6ª del § 38, il prodotto del numero $+a-b+c$ pel numero $+m$, è il numero che si ottiene facendo m volte su zero l'operazione $+a-b+c$. Avremo quindi:

$$(a-b+c)(+m)=(a-b+c)+(a-b+c)+(a-b+c)+\ldots\ldots_{m\ volte}=^{**}$$
$$=a+a+a+\ldots\ldots-b-b-b-\ldots\ldots+c+c+c+\ldots\ldots=^{***}$$
$$=(a+a+a+\ldots)-(b+b+b+\ldots)+(c+c+c+\ldots)=$$
$$=am-bm+cm.$$

Moltiplicatore negativo. Per le definizioni 7ª ed 8ª del § 38, il prodotto del numero $+a-b+c$ pel numero $-m$ è il numero che si ottiene facendo m volte sopra zero l'operazione $+a-b+c$ *invertita*, ossia l'operazione $-(a-b+c)$. Avremo quindi:

$$(a-b+c)(-m)=-(a-b+c)-(a-b+c)-(a-b+c)-\ldots\ldots_{m\ volte}=^{****}$$
$$=-a+b-c-a+b-c-a+b-c-\ldots\ldots_{m\ volte}=$$
$$=-a-a-a-\ldots\ldots+b+b+b+\ldots\ldots-c-c-c-\ldots\ldots=$$
$$=-(a+a+a+\ldots)+(b+b+b+\ldots)-(c+c+c+\ldots)=$$
$$=-am+bm-cm.$$

2°. *Gli esponenti non si sommano con m, nè si elevano alla potenza mª, ma si moltiplicano per m.* Avremo perciò p.e. $(a^3b^5)^2=a^{3\cdot2}.b^{5\cdot2}=a^6b^{10}$; e non $(a^3b^5)^2=a^{3+2}b^{5+2}=a^5b^7$, e neppure $(a^3b^5)^2=a^9b^{25}$.

3°. *Si moltiplicano per m tutti gli esponenti, e non solamente l'ultimo a destra.* Avremo quindi p.e. $(3a^2b^3c)^2=9a^{2\cdot2}.b^{3\cdot2}.c^{1\cdot2}=9a^4b^6c^2$ e non $(3a^2b^3c)^2=9a^2b^3c^2$.

4°. *La potenza mª di un monomio si indica chiudendo il monomio in parentesi, e ponendo l'esponente m fuori della parentesi; e non già scrivendo semplicemente m in alto ed a destra dell'ultimo fattore del monomio.*

* Fu Simone Stevin (nato a Brügge nel Belgio nel 1548, e morto, non si sa se a Leida o ad Haag, nel 1620) che introdusse nella scienza i termini *monomio, multinomio*. Invece di multinomio, si disse poi *polinomio*.

** Per la legge associativa e commutativa dell'addizione.

*** Per la legge associativa dell'addizione.

**** Per la regola del § 37.

Osservazione. Essendo eguali le due espressioni $(a-b+c)(+m)$ ed $am-bm+cm$, se è data una di esse, potremo sempre sostituirvi l'altra. Quando, al posto di $am-bm+cm$, si scrive $(a-b+c)(+m)$, si dice che in $am-bm+cm$ *si mette in evidenza il fattore* $+m$ comune a tutti gli addendi della somma. Lo stesso si dica delle due espressioni $(a-b+c)(-m)$ e $-am+bm-cm$; ed in ogni altro caso in cui tutti gli addendi di una somma hanno un medesimo fattore. *

COROLLARIO 1°. Per moltiplicare un numero per una somma, basta moltiplicare il numero per ciascun addendo della somma, e poi sommare i prodotti parziali.

Sia p.e. $(\pm m)$ *da moltiplicare per* $a-b+c$; *dico che avremo:*

$$(+m)(a-b+c)=+ma-mb+mc.$$
$$(-m)(a-b+c)=-ma+mb-mc.$$

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 1° § 41, il prodotto dei due numeri $\pm m$ ed $a-b+c$ ** è indipendente dall'ordine dei fattori; e quindi:

$(+m)(a-b+c)=(a-b+c)(+m)=$ pel teor. preced.
$=am-bm+cm=$ pel coroll. 1° § 41
$=ma-mb+mc$. Analogamente si ha:

$$(-m)(a-b+c)=(a-b+c)(-m)=-am+bm-cm=-ma+mb-mc.$$

COROLLARIO 2°. Per moltiplicare una somma per una somma, basta moltiplicare ciascun addendo della 1ª per ciascun addendo della 2ª, e poi sommare i prodotti parziali.

Abbiasi da moltiplicare la somma $a-b-c+d$ *per la somma* $m-n+p$. *Dico che basterà moltiplicare (secondo la regola della moltiplicazione dei numeri con segno) ciascun addendo di* $a-b-c+d$ *per ciascun addendo di* $m-n+p$, *e poi sommare (algebricamente) i risultati. Dico cioè che si avrà:* $(a-b-c+d)(m-n+p)=$

$$=am-bm-cm+dm-an+bn+cn-dn+ap-bp-cp+dp.$$

DIMOSTRAZIONE. Considerando $a-b-c+d$ come un numero unico, ed $m-n+p$ come una somma, pel coroll. preced. avremo:

$$(a-b-c+d)(m-n+p)=$$
$$=(a-b-c+d)(+m)+(a-b-c+d)(-n)+(a-b-c+d)(+p)= \text{***}$$
$$=am-bm-cm+dm-an+bn+cn-dn+ap-bp-cp+dp.$$

Esempio. $(4a^2b-3ab^2-b^3)(5a^2+b^2)=(+4a^2b)(+5a^2)+$
$+(-3ab^2)(+5a^2)+(-b^3)(+5a^2)+(+4a^2b)(+b^2)+(-3ab^2)(+b^2)+$
$+(-b^3)(+b^2)=20a^4b-15a^3b^2-5a^2b^3+4a^2b^3-3ab^4-b^5$. ****

* Sul *mettere in evidenza* un fattore, si tratterà più diffusamente nel capitolo: *Divisione di un polinomio per un monomio.*

** Si osservi che $a-b+c$ è un numero; cioè il numero che si ottiene quando su a si fa l'operazione $-b$, e poi sul risultato si fa l'operazione $+c$.

*** Considerando ora $a-b-c+d$ come una somma, ed applicando il teorema precedente, si ha il risultato cercato.

**** L'allievo si abitui a scrivere immediatamente il prodotto finale, eseguendo *a memoria* i prodotti parziali di un monomio per un monomio. In questi prodotti parziali è

RIDUZIONE DEI TERMINI SIMILI.

55. DEFINIZIONE. Vari monomi si dicono *simili* se sono identici, o se differiscono solamente pel segno e pel coefficiente.

Esempio. Sono simili i monomi $+a$, $-2a$, $+{}^1/_3a$. Sono pure simili i monomi $-a^2bc$, $+7a^2bc$, $-{}^3/_4a^2bc$.

In un polinomio i termini simili fra loro si possono riunire in un solo.

Esempio 1º. Sia dato il polinomio $3a^2bc-5a^2bc+8a^2bc-9a^2bc$.

Esso si può scrivere $3.(a^2bc)-5.(a^2bc)+8.(a^2bc)-9.(a^2bc)$; ove si vede che è la somma (algebrica) di più numeri i quali sono tutti moltiplicati pel medesimo numero a^2bc. Per la Osserv. § 54, posso *mettere in evidenza* il fattore a^2bc comune a tutti i termini della somma, ed ottengo:

$$3a^2bc-5a^2bc+8a^2bc-9a^2bc=$$
$$=3(a^2bc)-5(a^2bc)+8(a^2bc)-9(a^2bc)=(3-5+8-9)a^2bc=-3a^2bc.$$

Esempio 2º. Sia dato il polinomio $6a^2b-2a^2b-5cd-2cd-4cd$.

Per la Regola § 37, posso chiudere in parentesi tutti i termini fra loro simili, ed avrò: $(6a^2b-2a^2b)-(5cd+2cd+4cd)$. Mettendo ora nel 1º addendo *in evidenza* il fattore a^2b, e nel 2º addendo il fattore cd, avrò: $(6-2)a^2b-(5+2+4)cd=4a^2b-11cd$. Questo polinomio è equivalente al polinomio dato, e non ha più termini simili.

Esempio 3º. Sia $5a^4b^2c+8a^3b-7a^4b^2c-b^2+6a^3b+2b^2+5b^2$.

Pel teor. 4º § 30, posso cambiar l'ordine degli addendi; e, scrivendoli in modo che i termini fra loro simili siano consecutivi, ottengo:

$$5a^4b^2c-7a^4b^2c+8a^3b+6a^3b-b^2+2b^2+5b^2.$$

Per la regola § 37, posso chiudere in parentesi tutti i termini fra loro simili, ed ottengo: $(5a^4b^2c-7a^4b^2c)+(8a^3b+6a^3b)-(b^2-2b^2-5b^2)$.

Mettendo ora *in evidenza* nel 1º addendo il fattore a^4b^2c, nel 2º il fattore a^3b, e nel 3º il fattore b^2, si ha: *

$$(5-7)a^4b^2c+(8+6)a^3b-(1-2-5)b^2=$$
$$=-2a^4b^2c+14a^3b-(-6)b^2=-2a^4b^2c+14a^3b+6b^2.$$

L'ultimo polinomio è eguale al polinomio dato, e non ha più termini simili.

56. L'operazione fatta sui polinomi degli esempi precedenti si suole chiamare *riduzione dei termini simili*. Ne segue:

bene abituarsi a considerare per ordine prima *il segno,* poi *il coefficiente,* poi *i fattori letterali*, e poi *gli esponenti*.

* Ricordando che è p.e. $b^2-2b^2-5b^2=1.b^2-2b^2-5b^2=(1-2-5)b^2=-6b^2$, si eviti l'errore che si commetterebbe scrivendo p.e. $b^2-2b^2-5b^2=(-2-5)b^2=-7b^2$.

REGOLA. ***Per ridurre vari monomi simili in uno solo, basta scrivere un monomio simile ai monomi dati, ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi dati.*** *

Osservazione. Due monomi non simili non si possono ridurre in uno solo; epperciò un polinomio i cui termini non sono tutti simili, non si può ridurre ad essere un monomio.

PRODOTTI NOTEVOLI.

57. I risultati di alcune moltiplicazioni acquistano una importanza particolare per l'uso frequente che se ne fa. Bisogna quindi che l'allievo li sappia bene a memoria. Ecco i principali.

58. Qualunque siano i numeri a, b, eseguendo la moltiplicazione con le regole ordinarie, si trova che è:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 1°. Il prodotto della somma per la differenza di due numeri è eguale alla differenza dei quadrati dei medesimi numeri.

Esempio 1°. $(3a^2b+2ac)(3a^2b-2ac)=(3a^2b)^2-(2ac)^2=$
$=9a^4b^2-4a^2c^2.$

Esempio 2°. $\left(\frac{2}{3}xy^2+5\right)\left(\frac{2}{3}xy^2-5\right)=\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2-5^2=\frac{4}{9}x^2y^4-25.$

59. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b).$ **

$a^4-b^4=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b).$

$a^5-b^5=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b).$ Ed in generale: ***

$$a^n-b^n=(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b) \ldots\ldots (1')$$

Osservazione. Nel caso particolare in cui $b=1$ si ha: ****

$$a^n-1=(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+a^{n-4}+\ldots.+a+1)(a-1) \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')$$

---

* Per fare questa riduzione è utile fare prima la somma algebrica dei coefficienti come se fossero soli. Così nell'esempio 1° si direbbe p. e. $+3-5$ dà -2; $-2+8$ dà $+6$; $+6-9$ dà -3; dunque $-3a^2bc$.

** Che sia $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$, si può anche dimostrare così: Si mette in evidenza a nei termini del 1° fattore contenenti a, e si ha: $(a^2+ab+b^2)(a-b)=$
$=\left[(a+b)a+b^2\right](a-b)=(a+b)a(a-b)+b^2(a-b)=\left[(a+b)(a-b)\right]a+b^2(a-b).$
E poichè, per formola (1) è $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, si avrà ancora.....=
$=(a^2-b^2)a+b^2(a-b)=a^3-b^2a+b^2a-b^3=a^3-b^3.$

*** Si può facilmente dimostrare che la (1′) è vera per qualsiasi valore di n intero, positivo, maggiore di 1. A tal fine basta (imitando il ragionamento della nota precedente) dimostrare che, se è vera per un certo valore di n, sarà vera pel valore successivo. Ciò fatto si osserva che risulta dall' esperienza che per $n=2$ la formola è vera; dunque sarà vera per $n=3$, e per conseguenza per $n=4$, e per conseguenza per $n=5$, e per conseguenza per ogni altro valore intero positivo di n.

**** Perchè, qualunque sia il valore intero positivo di n, è $1^n=1$.

Nel caso particolare in cui $a=1$ si ha:

$$1-b^n=(1+b+b^2+b^3+\ldots\ldots+b^{n-2}+b^{n-1})(1-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1''')$$

60. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 2°. Il quadrato della somma di due numeri è eguale al quadrato del 1°, più il doppio prodotto del 1° pel 2°, più il quadrato del 2°.

Esempio 1°. $(3a^2bc+2xy^2)^2=(3a^2bc)^2+2(3a^2bc)(2xy^2)+(2xy^2)^2=$
$=9a^4b^2c^2+12a^2bcxy^2+4x^2y^4.$

Esempio 2°. $(4ab^2c^3+a^3b)^2=(4ab^2c^3)^2+2(4ab^2c^3)(a^3b)+(a^3b)^2=$
$=16a^2b^4c^6+8a^4b^3c^3+a^6b^2.$

61. Similmente, eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 3°. Il quadrato della differenza di due numeri è eguale al quadrato del 1°, meno il doppio prodotto del 1° pel 2°, più il quadrato del 2°.*

Esempio 1°. $(3x^2y-1)^2=(3x^2y)^2-2(3x^2y).1+1^2=9x^4y^2-6x^2y+1.$

Esempio 2°. $\left(5mn^2p-\frac{1}{3}mn\right)^2=(5mn^2p)^2-2(5mn^2p)\left(\frac{1}{3}mn\right)+$
$+\left(\frac{1}{3}mn\right)^2=25m^2n^4p^2-\frac{10}{3}m^2n^3p+\frac{1}{9}m^2n^2.$

62. Eseguendo la moltiplicazione, si trova che è:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 4°. Il cubo della somma di due numeri è eguale al cubo del 1°, più il triplo prodotto del quadrato del 1° pel 2°, più il triplo prodotto del 1° pel quadrato del 2°, più il cubo del 2°.

Esempio 1°. $(2a^3b^2c+ab^2)^3=(2a^3b^2c)^3+3(2a^3b^2c)^2(ab^2)+$
$+3(2a^3b^2c)(ab^2)^2+(ab^2)^3=8a^9b^6c^3+12a^7b^6c^2+6a^5b^6c+a^3b^6.$

Esempio 2°. $\left(\frac{3}{4}xy+\frac{1}{3}xy^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}xy\right)^3+3\left(\frac{3}{4}xy\right)^2\left(\frac{1}{3}xy^2\right)+$
$+3\left(\frac{3}{4}xy\right)\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^2+\left(\frac{1}{3}xy^2\right)^3=\frac{27}{64}x^3y^3+3\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{3}x^3y^4+$
$+3\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2x^3y^5+\frac{1}{27}x^3y^6=\frac{27}{64}x^3y^3+\frac{9}{16}x^3y^4+\frac{1}{4}x^3y^5+\frac{1}{27}x^3y^6.$

63. Nello stesso modo si trova che è:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

---

* La (2) e la (3) si riuniscono in una sola, scrivendo: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

Questa eguaglianza si suole enunciare così:

TEOREMA 5°. Il cubo della differenza di due numeri è eguale al cubo del 1°, meno il triplo prodotto del quadrato del 1° pel 2°, più il triplo prodotto del 1° pel quadrato del 2°, meno il cubo del 2°. *

Esempio 1°. $(3x^2y-2xy^2)^3=(3x^2y)^3-3(3x^2y)^2(2xy^2)+$
$+3(3x^2y)(2xy^2)^2-(2xy^2)^3=27x^6y^3-54x^5y^4+36x^4y^5-8x^3y^6.$

Esempio 2°. $(1-5xy)^3=1^3-3.1^2(5xy)+3.1.(5xy)^2-(5xy)^3=$
$=1-15xy+75x^2y^2-125x^3y^3.$

64. TEOREMA 6°. Il quadrato di un polinomio è eguale alla somma dei quadrati di ciascun termine del polinomio, più i doppi prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun termine del polinomio per ciascuno dei termini seguenti.

DIMOSTRAZIONE. *1° Caso. Polinomio di tre termini.*

Dico che sarà p.e. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

Infatti: considerando la somma $a+b$ come eseguita, si potrà considerare $a+b+c$ come un binomio in cui il primo termine è $(a+b)$, ed il secondo è c. Allora, pel teorema 2° § 60, avremo:

$$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Ma $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; e $2(a+b)c=2ac+2bc$. Sostituendo questi valori nell'ultimo membro della (α) avremo:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

2° Caso. Polinomio di quattro termini.

Dico p.e. che sarà:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

Infatti: ragionando come precedentemente, avremo successivamente:

$$(a+b+c+d)^2=\{(a+b+c)+d\}^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc+2ad+2bd+2cd+d^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

E così si potrà continuare per un polinomio di 5, di 6, di 7, ecc. termini.

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo supposto che tutti i termini del polinomio fossero positivi. La dimostrazione sarebbe la medesima se vi fossero termini negativi. Bisogna però, in tal caso, osservare che i quadrati sono sempre positivi; e che i doppi prodotti (per la regola della molti-

---

* La (4) e la (5) si riuniscono in una sola, scrivendo:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

Si osservi che, nel 2° membro dell'eguaglianza, *i termini contenenti le potenze dispari d'una medesima base hanno tutti il medesimo segno.*

§ 64

plicazione dei monomi) sono positivi se i due fattori hanno lo stesso segno, sono negativi se hanno segno contrario.

Esempio 1º. $(2a^2b-3ab^2+ab)^2=$
$=(2a^2b)^2+(3ab^2)^2+(ab)^2-2(2a^2b)(3ab^2)+2(2a^2b)(ab)-2(3ab^2)(ab)=$
$=4a^4b^2+9a^2b^4+a^2b^2-12a^3b^3+4a^3b^2-6a^2b^3.$

Esempio 2º. $(x^2y^2-3x^3y+2ab-1)^2=(x^2y^2)^2+(3x^3y)^2+(2ab)^2+$
$+1^2-2(x^2y^2)(3x^3y)+2(x^2y^2)(2ab)-2(x^2y^2).1-2(3x^3y)(2ab)+$
$+2(3x^3y).1-2(2ab).1=x^4y^4+9x^6y^2+4a^2b^2+1-6x^5y^3+4abx^2y^2-$
$-2x^2y^2-12abx^3y+6x^3y-4ab.$

CAPO QUINTO.

Divisione.

IL QUOTO E LE SUE PROPRIETÀ FONDAMENTALI.

65. DEFINIZIONE. Dicesi *quoto* di due numeri con segno un terzo numero con segno che, moltiplicato pel secondo, dia per prodotto il primo.

Il 1° numero si chiama *dividendo*, il 2° *divisore*. Il quoto dei due numeri a, b, si indica scrivendo $a:b$ od $\frac{a}{b}$ od $^a/_b$, e si legge a *diviso* b. ($\frac{a}{b}$ ed $^a/_b$ si leggono anche a *sopra* b). *

66. DEFINIZIONE. *La divisione algebrica* è quell'operazione per cui, dati due numeri con segno, se ne trova il quoto. **

COROLLARIO. In ogni divisione il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto.

Ne segue che la divisione algebrica si può anche definire così:

67. DEFINIZIONE. La *divisione algebrica* è quell'operazione per cui, dato il prodotto di due numeri con segno, ed uno di essi, si trova l'altro.

68. TEOREMA 1°. Il valore numerico del quoto è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore. Il segno del quoto è positivo, se il dividendo ed il divisore hanno egual segno; è negativo, se hanno segno contrario.

DIMOSTRAZIONE. Poichè il valore numerico del prodotto (dividendo) è eguale al prodotto dei valori numerici dei fattori (divisore e quoto), il valore numerico del quoto moltiplicato pel valore numerico del divisore, deve dare il valore numerico del dividendo; e quindi *il valore numerico del quoto è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore.*

---

* Il segno : di divisione fu introdotto da Goffredo Guglielmo Leibniz, nato a Lipsia nel 1646, e morto in Annover nel 1716. Pare che la notazione $\frac{a}{b}$ sia di origine indiana; essa fu introdotta in Europa da Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (filius Bonacii) che la adoperò nel suo *Liber abaci*, pubblicato nel 1202.

** Sono sinonime le espressioni *dividere* e *trovare il quoto.*

La 2ª parte del teorema riesce evidente se si osserva che, quando il dividendo (prodotto) è positivo, i due fattori (divisore e quoto) devono avere egual segno; e che, quando il dividendo (prodotto) è negativo, i due fattori (divisore e quoto) devono avere segni contrari.*

Osservazione. Si conosce più facilmente quale debba essere il segno del quoto servendosi della seguente tavola:

Moltiplicando	**Moltiplicatore**	**Prodotto**
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−
Quoto	**Divisore**	**Dividendo**

Osservando le intitolazioni superiori, si hanno i segni del moltiplicando, del moltiplicatore e del prodotto. Osservando le intitolazioni inferiori, si hanno i segni del dividendo, del divisore e del quoto.

COROLLARIO 1°. Cambiando il segno al dividendo ed al divisore, il quoto non cambia nè il valore numerico nè il segno.

DIMOSTRAZIONE. *Il valore numerico* del quoto non cambia, perchè esso dipende solamente dal valore numerico del dividendo e del divisore, e non dal loro segno.

Il segno del quoto non cambia, come si ricava confrontando fra loro la 1ª e la 2ª riga, e poi la 3ª e la 4ª riga della tavola precedente.

COROLLARIO 2°. Cambiando il segno al solo dividendo od al solo divisore, il quoto non cambia il valore numerico, ma cambia il segno.

DIMOSTRAZIONE. *Pel valore numerico*, come nel coroll. preced.

Pel segno, si osservi che, se il dividendo ed il divisore prima avevano egual segno, dopo avranno segno contrario; e, se prima avevano segno contrario, dopo avranno egual segno. Dunque in ogni caso il segno del quoto cambia.

COROLLARIO 3°. Il quoto di due numeri con segno non cambia se il dividendo ed il divisore si moltiplicano o si dividono entrambi per un medesimo numero diverso da zero.

---

* Rappresentando con a il valore numerico del dividendo, e con b il valore numerico del divisore che supponiamo diverso da zero, e con a/b il valore numerico del quoto, il teorema si può esprimere brevemente così:

$(+a):(+b)$ ossia $\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$ $(+a):(-b)$ ossia $\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$

$(-a):(-b)$ ossia $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$ $(-a):(+b)$ ossia $\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$

§ 68

Dimostrazione. *Il valore numerico del quoto non cambia,* perchè (pel teor. precedente) esso è il quoto del valore numerico del dividendo pel valore numerico del divisore; e sappiamo dall'Aritmetica che il quoto di due numeri non cambia se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore per un medesimo numero diverso da zero.

Il segno del quoto non cambia, perchè se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore pel medesimo numero diverso da zero, essi conservano entrambi il loro segno, o lo mutano entrambi. Nell'uno e nell'altro caso il segno del quoto non cambia.

Osservazione 1ª. Quando il dividendo è zero, ed il divisore è diverso da zero, il quoto è zero. Infatti: il dividendo è il prodotto del divisore pel quoto. Ora, pel coroll. 2° § 41, affinchè un prodotto sia zero, è necessario e sufficiente che sia zero uno dei fattori. Nel caso nostro un fattore (divisore) è diverso da zero; dunque deve essere zero l'altro fattore (quoto). Ne segue che, per ogni valore positivo o negativo, ma non nullo, di m, avremo: $0/_m = 0$.

Osservazione 2ª. Quando il dividendo è diverso da zero, ed il divisore è zero, il quoto non esiste. Infatti: se esistesse, dovrebbe essere un numero che moltiplicato pel divisore, che è zero, dia per prodotto un numero (dividendo) diverso da zero. Ma ciò non può essere; perchè, pel coroll. 2° § 41, se uno dei fattori è zero, il prodotto è zero. Dunque..... *

Osservazione 3ª. Quando il dividendo ed il divisore sono zero, il quoto è indeterminato. Infatti: ogni numero può essere quoto, perchè ogni numero moltiplicato per zero (divisore) dà per prodotto zero (dividendo).

Osservazione 4ª. Sarà sottinteso che, in ogni divisione, supporremo che il divisore sia diverso da zero. Ne segue che, se il divisore contiene numeri rappresentati con lettere, sottintenderemo sempre esclusi dalla nostra considerazione quei valori delle lettere pei quali il divisore diventa zero.

Osservazione 5ª. Diremo che un numero ha valore* indefinito, *se ha la forma $m/_0$, o la forma $0/_0$. Diremo che ha valore* definito *in ogni altro caso.

69. TEOREMA 2°. Se il divisore è diverso da zero, il quoto di due numeri con segno esiste, ed ha valore unico.

Dimostrazione. *Il valore numerico del quoto* esiste, ed ha valore unico; perchè (come si sa dall'Aritmetica) il quoto di due numeri aritmetici, se il divisore è diverso da zero, esiste, ed ha valore unico.

---

* Qualsiasi numero per grande che sia non è mai così grande che, moltiplicato per zero, possa dar un prodotto diverso da zero; e quindi qualsiasi numero si prenda per quoto è sempre troppo piccolo. Si suole esprimere ciò dicendo che il quoto è *infinito. (Infinito* si scrive ∞). Avremo quindi, per ogni valore di m diverso da zero, $m/_0 = \infty$.

Si osservi che, dicendo *infinito*, non si vuol dire che il quoto è un numero il quale è infinitamente grande, perchè ciò sarebbe assurdo. Il primo ad adoperare il segno ∞ per indicare *infinito* fu il matematico inglese Giovanni Wallis (nato in Ashford nel 1616, e morto a Londra nel 1703) nel suo *Tractatus de sectionibus conicis* pubblicato nel 1655.

Il segno del quoto poi esiste sempre, ed è unico, come risulta dal teorema precedente.

70. TEOREMA 3°. Per dividere il prodotto di più numeri con segno per il prodotto di alcuni di essi, basta sopprimere nel dividendo i fattori del divisore.

Sia p.e. da dividere il prodotto abcde pel prodotto bd. Dico che il quoto sarà ace. Avrò dimostrato che ace è il vero quoto, se dimostro che, moltiplicato pel divisore bd, dà per prodotto il dividendo abcde.

DIMOSTRAZIONE. Per la legge associativa e commutativa della moltiplicazione (coroll. 1° § 41) abbiamo: $(ace)(bd) = acebd = abcde$.

Dunque ace è veramente il quoto di $abcde$ per bd.

COROLLARIO. Il quoto di due potenze della medesima base, quando la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore è maggiore dell'unità, è una potenza della medesima base, avente per esponente la differenza fra l'esponente del dividendo e quello del divisore. *

Sia p. e. $m-n>1$; *dico che sarà:* $a^m : a^n = a^{m-n}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo per definizione (§ 43):

$$a^m : a^n = (a.a.a.....{}_{m\ volte}):(a.a.a.....{}_{n\ volte}).$$

E sopprimendo nel dividendo gli n fattori del divisore, si avrà per quoto $aaa.....{}_{m-n\ volte}$, ossia a^{m-n}. Dunque $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Osservazione. Per definizione (§ 65) il quoto di due numeri a, b, è a/b. Se a, b sono monomi aventi fattori comuni, (pel coroll. 3° § 68) potremo dividere il dividendo ed il divisore per questi fattori comuni, ed otterremo il quoto sotto forma più semplice.

Esempio 1°. Il quoto di $+12a^2mn$ per $-15a^3mp$ è

$\frac{+12a^2mn}{-15a^3mp} = -\frac{12a^2mn}{15a^3mp}$. Mettiamo in evidenza tutti i fattori che sono comuni al dividendo ed al divisore. A tal fine scomponiamo i coefficienti nei loro fattori primi; e, poichè nel dividendo vi è a^2 e nel divisore a^3, scriveremo nel divisore a^2a al posto di a^3, ed avremo $-\frac{12a^2mn}{15a^3mp} = -\frac{2^2.3.a^2mn}{3.5.a^2amp}$.

I fattori 3, a^2, m sono comuni al dividendo ed al divisore. Dividiamo adunque il dividendo ed il divisore pel prodotto $3a^2m$ (ossia sopprimiamo nel dividendo e nel divisore i fattori comuni 3, a^2, m); ed avremo:

$$-\frac{2^2.3.a^2mn}{3.5.a^2.amp} = -\frac{(2^2.3.a^2mn):(3a^2m)}{(3.5.a^2amp):(3a^2m)} = -\frac{2^2n}{5ap} = -\frac{4n}{5ap}. \;**$$

* È sottinteso che m, n, sono numeri *interi positivi*. Si è poi messa la restrizione $m-n>1$ perchè, secondo la definizione data di potenza (§ 43), l'esponente deve, in ogni caso, essere intero, positivo, maggiore di 1.

** È utile abituarsi a fare sempre queste semplificazioni al quoto, ed a farle *a memoria* scrivendo immediatamente il risultato finale.

Esempio 2°. Il quoto di $-6a^5b^2c$ per $+3a^3b^2$ è $\frac{-6a^5b^2c}{+3a^3b^2}=-\frac{6a^5b^2c}{3a^3b^2}$.

Operando come nell'es. preced., si ha: $-\frac{6a^5b^2c}{3a^3b^2}=-\frac{2.3.a^3a^2b^2c}{3a^3b^2}=$

$$=-\frac{(2.3.a^3a^2b^2c):(3a^3b^2)}{(3a^3b^2):(3a^3b^2)}=-\frac{2a^2c}{1}=-2a^2c.$$

Esempio 3°. Il quoto di $+3a^2bc$ per $+15a^2bc^3$ è $+\frac{3a^2bc}{15a^2bc^3}$.

Operando come negli esempi precedenti, si ha:

$$+\frac{3a^2bc}{15a^2bc^3}=+\frac{3a^2bc}{3.5.a^2bc.c^2}=+\frac{(3a^2bc):(3a^2bc)}{(3.5.a^2bc.c^2):(3a^2bc)}=+\frac{1}{5c^2}. \; *$$

71. DEFINIZIONE 1ª. Un monomio si dice *intero* se non vi è indicata alcuna divisione.

DEFINIZIONE 2ª. Un monomio intero si dice *divisibile per un altro monomio intero* se il quoto del 1° pel 2° è un monomio intero.

COROLLARIO. Affinchè un monomio intero sia divisibile per un altro monomio intero, è necessario e sufficiente che, nel dividendo, si trovino tutti i fattori del divisore. **

DIMOSTRAZIONE. Come si vede dagli esempi precedenti, affinchè il quoto sia un monomio intero, è necessario e sufficiente che, sopprimendo i fattori comuni al dividendo ed al divisore, il divisore diventi l'unità; ed affinchè ciò succeda, è necessario e sufficiente che, nel dividendo, si trovino tutti i fattori del divisore.

72. Poichè, come risulta dall'esempio 2° § 70, il quoto intero di due monomi interi si ottiene sopprimendo nel dividendo i fattori che formano il divisore, avremo la seguente regola:

---

* Giova osservare che l'espressione, *si sopprime un fattore di un prodotto*, è un modo abbreviato per dire: *si divide un prodotto per un suo fattore dividendo questo fattore per se stesso; ed il quoto, che è l'unità, non si scrive.* Se, nel fare la semplificazione sopra indicata, il divisore diventa 1, quest'1 si può sopprimere, come si fece nell'es. 2°; ma se è il dividendo che diventa 1 (come è nell'es. 3°), quest'1 non si può sopprimere.

** L'enunciato del coroll. si suole esprimere più diffusamente colla seguente regola:
REGOLA. *Affinchè un monomio intero sia divisibile per un altro monomio intero, è necessario e sufficiente:* 1° *Che il coefficiente del dividendo sia divisibile pel coefficiente del divisore;* 2° *Che il dividendo contenga tutti i fattori letterali del divisore;* 3° *Che ciascun fattore letterale abbia, nel dividendo, un esponente non inferiore a quello che esso ha nel divisore.*

Sovente si suole considerare ancora come intero un monomio che abbia frazionario solamente il coefficiente; ed allora si sopprime la prima condizione.

In questa ipotesi $-5a^2bc^2d^3$ sarebbe divisibile per $+7abd^2$, ed il quoto sarebbe: $-\frac{5a^2bc^2d^3}{7abd^2}=-\frac{5ac^2d}{7}=-\frac{5}{7}ac^2d.$

REGOLA. 1°. Il quoto intero di due monomi interi è positivo, se il dividendo ed il divisore hanno egual segno; è negativo, se hanno segno contrario. *(Per la 2ª parte del teor. 1° § 68).*

2°. Il coefficiente del quoto è il quoto del coefficiente del dividendo pel coefficiente del divisore. *(Perchè si ottiene sopprimendo, nel coefficiente del dividendo, i fattori che formano il coefficiente del divisore).*

3°. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e nel divisore col medesimo esponente, non si trova più nel quoto. *(Perchè viene interamente soppresso).*

4°. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e non nel divisore, si troverà nel quoto col proprio esponente inalterato.

5°. Se un fattore letterale si trova nel dividendo e nel divisore con esponenti diversi, si troverà nel quoto con un esponente eguale alla differenza fra l'esponente che esso ha nel dividendo e quello che ha nel divisore. *(Poichè se un fattore si trova m volte nel dividendo, ed n volte nel divisore, nel quoto si troverà $m-n$ volte).*

MASSIMO COMUN DIVISORE
E MINIMO COMUN MULTIPLO DEI MONOMI.

73. DEFINIZIONE. Un monomio intero che divida più altri monomi interi, si chiama loro *divisore comune*.

Un monomio intero chiamasi **Massimo Comun Divisore** di più monomi interi, (e si scrive M.C.D.) se: 1° Ha per coefficiente il massimo comun divisore dei coefficienti dei monomi dati; 2° Contiene tutti e soli i fattori letterali comuni a tutti i monomi dati; 3° Ciascun suo fattore ha per esponente il minimo esponente che il fattore stesso ha nei monomi dati.

74. DEFINIZIONE. Un monomio intero che sia divisibile per vari altri monomi interi, si chiama loro *multiplo comune*.

Un monomio intero chiamasi **Minimo Comun Multiplo** di più monomi interi, (e si scrive m.c.m.) se: 1° Ha per coefficiente il minimo comun multiplo dei coefficienti dei monomi dati; 2° Ha tutti e soli i fattori letterali che si trovano in qualcuno dei monomi dati; 3° Ciascun suo fattore letterale ha per esponente il massimo esponente che il fattore stesso ha nei monomi dati. *

Esempio 1°. Dei monomi $12a^5b^2c^3$, $-4ab^3c^5$, $+10a^4b^3c^2$, il M.C.D. è $2ab^2c^2$; ed il m.c.m. è $60a^5b^3c^5$.

Esempio 2°. Dei monomi $5a^2b^3x^2y^4$, $-6a^3x^2$, $15a^2x^2y^2$, $10ab^4xy^2$, il M. C. D. è ax; ed il m.c.m. è $30a^3b^4x^2y^4$.

---

* È evidente l'analogia che esiste fra queste due definizioni e le regole dell'Aritmetica per trovare il M.C.D. ed il m.c.m. di più numeri interi scomposti in fattori primi.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO.

75. TEOREMA. Per dividere un polinomio per un monomio, basta dividere ciascun termine del polinomio pel monomio, e poi sommare i quoti ottenuti.

Si abbia p.e. il polinomio $a-b+c-d$ da dividere per m; dico che basta dividere (secondo la regola della divisione dei monomi) ciascun termine del polinomio per m (si ottiene rispettivamente a/m, $-b/m$, $+c/m$, $-d/m$); e poi sommare (algebricamente) i risultati. Dico cioè che avremo:

$$(a-b+c-d):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}.$$

DIMOSTRAZIONE. Avrò dimostrato che $a/m-b/m+c/m-d/m$ è veramente il quoto cercato, se dimostro che, moltiplicandolo pel divisore m, si ottiene per prodotto il dividendo $a-b+c-d$.

Pel teor. § 54, abbiamo:

$$\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}\right)m=\frac{a}{m}m-\frac{b}{m}m+\frac{c}{m}m-\frac{d}{m}m=a-b+c-d. \text{ *}$$

Analogamente si dimostra:

$$(a-b+c-d):(-m)=-\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}.$$

Esempio 1°. $(12a^3b^5x-8a^2b^4x^5+16a^3b^2x^4):(-4a^2b^2x)=$
$=(12a^3b^5x):(-4a^2b^2x)+(-8a^2b^4x^5):(-4a^2b^2x)+$
$+(16a^3b^2x^4):(-4a^2b^2x)=-3ab^3+2b^2x^4-4ax^3.$

Esempio 2°. $(24x^4y^3z^2-12x^2y^3z^4-15xy^2z^3+3xyz):(3xyz)=$
$=(24x^4y^3z^2):(3xyz)+(-12x^2y^3z^4):(3xyz)+(-15xy^2z^3):(3xyz)+$
$+(3xyz):(3xyz)=8x^3y^2z-4xy^2z^3-5yz^2+1.$

76. DEFINIZIONE. Un polinomio intero si dice *divisibile per un monomio intero*, se esiste un polinomio intero che, moltiplicato pel monomio, dia per prodotto il polinomio.

Dal teorema precedente segue immediatamente la regola:

REGOLA. Affinchè un polinomio intero, privo di termini simili, sia divisibile per un monomio intero, è necessario e sufficiente che ciascun termine del polinomio sia divisibile pel monomio. **

---

* Perchè, pel corollario del § 66, si ha: $\frac{a}{m}m=a;\ \frac{b}{m}m=b;\ \frac{c}{m}m=c;\ \frac{d}{m}m=d.$

** Se il polinomio non è divisibile pel monomio, ci contentiamo di indicare il quoto nel modo detto al § 70; oppure eseguiamo le divisioni parziali che si possono ese-

77. METTERE IN EVIDENZA UN FATTORE.

Quando tutti i termini di un polinomio sono divisibili per un monomio, se, in luogo del dividendo, si scrive il prodotto del divisore pel quoto, si dice che, nel polinomio (dividendo), *si è messo in evidenza un fattore* (il divisore).

Esempio. *Nel polinomio* $15m^2np-10m^3n^2p^2+5m^3n^4$ *si metta in evidenza il fattore* $5mn$.

Se si divide il polinomio per $5mn$, si ottiene per quoto il polinomio $3mp-2m^2np^2+m^2n^3$. Dunque:

$$15m^2np-10m^3n^2p^2+5m^3n^4=5mn(3mp-2m^2np^2+m^2n^3).$$

REGOLA. Per mettere in evidenza un fattore comune a tutti i termini di un polinomio, basta scrivere, in luogo del polinomio, un prodotto di due fattori. Il 1° è il fattore che si vuol mettere in evidenza; il 2° è il quoto che si ottiene dividendo il polinomio dato per questo fattore. *

Osservazione. Generalmente si usa mettere in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio.

Esempio. *Si metta in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio* $18a^3b^4c-15a^2b^3c^4+21a^3b^2c^3-3a^2bc$. Si avrà:

$$18a^3b^4c-15a^2b^3c^4+21a^3b^2c^3-3a^2bc=3a^2bc(6ab^3-5b^2c^3+7abc^2-1).$$

SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI IN FATTORI.

78. DEFINIZIONE. ***Scomporre un polinomio in fattori*** **significa mettere un polinomio sotto forma di prodotto di due o più fattori.**

Non è possibile, in un trattato elementare, dare regole generali per scomporre ogni polinomio in fattori, i quali, alla lor volta, non siano più scomponibili in altri fattori. Esamineremo i casi più facili, e daremo alcune facili regole, ricavandole dalla regola del § 77, e dai teoremi del capitolo sui *prodotti notevoli*.

79. ***REGOLA 1ª. Si mette in evidenza il M.C.D. dei termini del polinomio.*** (§ 77 Osservazione).

Il polinomio resta così scomposto in un prodotto di due fattori. **

Esempio. $25a^2+30a^5-15a^6=5a^2(5+6a^3-3a^4)$.

---

guire, e lasciamo indicate le altre. ESEMPIO. Il quoto di $4a^2b-2d+5ab^3$ per $2a$, è $\frac{4a^2b-2d+5ab^3}{2a}$; od anche $2ab-\frac{d}{a}+\frac{5}{2}b^3$.

* È evidente che il fattore che si mette in evidenza può essere indifferentemente positivo o negativo.

** L'allievo si abitui a far uso di questa regola (quando il M.C.D. è diverso dall'unità) in ogni caso, e prima di ogni altra considerazione.

80. ***REGOLA 2ª.*** ***Se il polinomio è la differenza di due quadrati, esso è eguale al prodotto della somma per la differenza delle basi*** (Teor. 1° § 58).

Esempio. $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a+3b)(2a-3b)$.

Osservazione. Si ricordi che, sia n pari, o sia dispari, pel § 59, si ha:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

81. ***REGOLA 3ª.*** ***Se il polinomio ha tre termini, di cui due siano quadrati e positivi, si osservi se l'altro termine è il doppio prodotto delle basi. In caso affermativo, il polinomio è eguale al quadrato della somma o della differenza delle basi, secondochè il doppio prodotto delle basi è positivo o negativo*** (Teor. §§ 60 e 61). *

Esempio. $25a^2b^6 + 20ab^3x^2 + 4x^4 = (5ab^3)^2 + 2(5ab^3)(2x^2) + (2x^2)^2 = (5ab^3 + 2x^2)^2$.

82. ***REGOLA 4ª.*** ***Se il polinomio ha quattro termini, di cui due siano cubi, si osservi se gli altri due sono ciascuno il triplo prodotto del quadrato di una delle basi per l'altra. In caso affermativo, e se i termini contenenti le potenze dispari d'una medesima base hanno il medesimo segno, il polinomio è il cubo della somma o della differenza delle basi, secondochè i suoi termini hanno tutti lo stesso segno, oppure sono due positivi e due negativi.*** (Teor. §§ 62 e 63, e nota § 63). **

Esempio. $27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(2b) + 3(3a)(2b)^2 + (2b)^3 = (3a+2b)^3$.

83. ***REGOLA 5ª.*** ***Talvolta, non verificandosi alcuno dei casi precedenti, si può procedere così. Si mette in evidenza il M.C.D. di alcuni termini del polinomio; poi, separatamente, si mette in evidenza il M.C.D. di tutti gli altri termini. Se si ottiene un binomio i cui termini abbiano un fattore comune, mettendolo in evidenza, si avrà il polinomio primitivo sotto forma di prodotto di due fattori.***

Esempio. $ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b) = (x+y)(a+b)$.

APPLICAZIONE. Facendo uso della scomposizione in fattori, si può, in molti casi, trovare il prodotto di due polinomi senza eseguire direttamente l'operazione.

---

* I teoremi dei §§ 60, 61 richiedono che i quadrati siano tutti e due dello stesso segno, e positivi. Se sono entrambi negativi, basta chiudere il polinomio in parentesi preceduta dal segno —. Esempio. $-9a^2b^4 + 30ab^2c - 25c^2 = -(9a^2b^4 - 30ab^2c + 25c^2) = -[(3ab^2)^2 - 2(3ab^2)(5c) + (5c)^2] = -(3ab^2 - 5c)^2$. Se sono uno positivo e l'altro negativo, il polinomio non è il quadrato nè della somma nè della differenza delle basi.

** Se i segni fossero tutti negativi, basta chiudere il polinomio in parentesi preceduta dal segno —. Esempio. $-54x^4y^2 - 108x^3y^3 - 72x^2y^4 - 16xy^5$. Mettiamo in evidenza $-2xy^2$ che è il M.C.D. dei termini del polinomio, ed otteniamo:

$$-2xy^2(27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3) = -2xy^2[(3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3].$$
$$= -2xy^2(3x+2y)^3.$$

Esempio. Applicando le regole 3ª, e 2ª, ed il teor. 3° § 46, si ha:
$(9x^2+12xy+4y^2)(9x^2-12xy+4y^2)=$
$=[(3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2][(3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2]=$
$=(3x+2y)^2(3x-2y)^2=[(3x+2y)(3x-2y)]^2=(9x^2-4y^2)^2=$
$=(9x^2)^2-2(9x^2)(4y^2)+(4y^2)^2=81x^4-72x^2y^2+16y^4.$

CAPO SESTO.

Frazioni algebriche

PRELIMINARI.

84. DEFINIZIONE. Al quoto non intero di due numeri con segno daremo il nome di *frazione algebrica.*

Chiameremo il dividendo *numeratore*, il divisore *denominatore.*

La frazione $^a/_b$ si potrà leggere *a diviso b*, oppure *a sopra b*, oppure *a biesimi.*

Sostituendo *frazione* a *quoto*, *numeratore* a *dividendo*, *denominatore* a *divisore*, le proposizioni dei §§ 66, 67, 68 si potranno enunciare così:

1° *Moltiplicando una frazione algebrica pel suo denominatore, si ottiene per prodotto il numeratore.* (Coroll. § 66).

2° *Il valore di una frazione algebrica non cambia, cambiando il segno al numeratore ed al denominatore.* (Coroll. 1° § 68).

3° *Cambiando il segno al solo numeratore, od al solo denominatore, la frazione non cambia valore numerico, ma cambia segno.* (Coroll. 2° § 68). *

4° *Si può togliere il segno — al numeratore od al denominatore, e darlo alla frazione.* (Nota al coroll. 1° § 68).

5° *Il valore d'una frazione algebrica non cambia se si moltiplica o si divide il numeratore ed il denominatore pel medesimo numero diverso da zero.* (Coroll. 3° § 68).

Quest'ultima proposizione esprime la proprietà fondamentale delle frazioni algebriche, proprietà che esse hanno in comune colle frazioni aritmetiche. Ripetendo i ragionamenti fatti in Aritmetica, si ricavano, da questa proprietà, varie importantissime conseguenze, di cui le principali sono la riduzione d'una frazione a più semplice espressione, e la riduzione di più frazioni al medesimo denominatore.

---

* Si osservi che, se il numeratore od il denominatore sono polinomi, per cambiar loro il segno, bisogna cambiarlo a ciascun termine del polinomio.

85. ***RIDURRE UNA FRAZIONE A PIU' SEMPLICE ESPRESSIONE.***

REGOLA. ***Sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si ottiene un'altra frazione equivalente alla prima.*** *

Esempio. *Si riduca a più semplice espressione la frazione* $\frac{15a^3b^3c}{21a^2b^2c^3d}$.

Mettendo in evidenza $3a^2b^2c$, che è il M.C.D. del numeratore e del denominatore, e poi sopprimendolo, si ha: $\frac{15a^3b^3c}{21a^2b^2c^3d}=\frac{3a^2b^2c(5ab)}{3a^2b^2c(7c^2d)}=\frac{5ab}{7c^2d}$.

86. ***RIDURRE PIU' FRAZIONI AL MEDESIMO DENOMINATORE.***

REGOLA. ***Basta moltiplicare i due termini di ciascuna frazione pel prodotto dei denominatori delle altre.*** **

DIMOSTRAZIONE. Le frazioni ottenute avranno tutte il medesimo denominatore, che è il prodotto dei denominatori delle frazioni date; e, per la proposizione 5ª § 84, il valore di ciascuna frazione non sarà cambiato.

Esempio. *Si riducano al medesimo denominatore* a/b, m/n, x/y.

Moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori delle altre, si ottengono le frazioni $\frac{any}{bny}$, $\frac{mby}{nby}$, $\frac{xbn}{ybn}$ rispettivamente equivalenti alle frazioni date.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI.

87. TEOREMA. La somma algebrica di più frazioni di egual denominatore è una frazione che ha per numeratore la somma algebrica dei numeratori, e, per denominatere, il denominatore comune.

Dico p.e. che si avrà: $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}$.

DIMOSTRAZIONE. Il 1º membro dell'eguaglianza dice che si è diviso per m ciascun termine di un polinomio, e poi si sono sommati algebricamente i risultati. Il 2º membro dice che si è diviso per m l'intero polinomio. Dunque, pel teor. § 75, il 1º membro è eguale al 2º.

Osservazione. Le frazioni si riducono prima (se non lo sono) al medesimo denominatore.

---

* Quando il numeratore ed il denominatore sono monomi, è facile scorgere se hanno fattori comuni. Se non sono monomi, si scompongono (come si può) in fattori il numeratore ed il denominatore; e, se si trovano fattori comuni, si sopprimono.

** Applicando alle frazioni algebriche i ragionamenti fatti in Aritmetica, si conchiude che ***non è necessario*** che il denominatore comune sia il prodotto dei denominatori, ma è ***sufficiente*** che sia un numero il quale sia divisibile per ciascuno dei denominatori dati.

MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

88. TEOREMA. Il prodotto di più frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori, e, per denominatore, il prodotto dei denominatori delle frazioni date.

Dico p.e. che si avrà: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}=\frac{a.c.e}{b.d.f}$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo p.e. $a/_b=m$, $c/_d=n$, $e/_f=p$.

Per la definiz. di frazione, e pel coroll. § 66, è: $a=bm$; $c=dn$; $e=fp$.

Moltiplicando membro a membro queste eguaglianze, otterremo: $ace=bm.dn.fp$, ossia (coroll. 1° § 41) $ace=(bdf)(mnp)$.

Dividendo il prodotto ace pel fattore bdf, si otterrà per quoto l'altro fattore mnp; ossia $mnp=\frac{ace}{bdf}$. Sostituendo ora ad m, n, p i loro valori $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, si avrà: $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

COROLLARIO. La potenza emmesima di una frazione è una frazione avente per numeratore la potenza emmesima del numeratore, e, per denominatore, la potenza emmesima del denominatore.

Dico p.e. che si avrà: $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo per definizione (§ 43):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}\ldots\ldots_{m\ volte}=\frac{aaaa\ldots\ldots_{m\ volte}}{bbbb\ldots\ldots_{m\ volte}}=\frac{a^m}{b^m}.$$

DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

89. TEOREMA. Il quoto di due frazioni è eguale al prodotto della frazione dividendo per l'inversa della frazione divisore. *

Dico p.e. che sarà: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$.

---

* Due numeri si chiamano *inversi* o *reciproci* se il loro prodotto è $+1$. Ne segue: 1° Due numeri *inversi* hanno sempre lo stesso segno; sono cioè ambedue positivi, od ambedue negativi. 2° L'*inverso* di un numero intero è una frazione avente per numeratore l'unità, e, per denominatore, il numero stesso. Es. L'*inverso* di 3 è $\frac{1}{3}$; l'*inverso* di $4ab$ è $\frac{1}{4ab}$; l'*inverso* di $-2b^2c$ è $-\frac{1}{2b^2c}$. 3° L'*inversa* di una frazione è una nuova frazione avente per numeratore il denominatore della frazione data, e, per denominatore, il numeratore della frazione data. Es. L'*inversa* di $\frac{3}{4}$ è $\frac{4}{3}$; l'*inversa* di $-\frac{5m}{7n^2}$ è $-\frac{7n^2}{5m}$. Il teorema si suole anche enunciare così: *Il quoto di due frazioni è eguale al prodotto della frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

DIMOSTRAZIONE. Avrò dimostrato che $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ è il quoto di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, se dimostro che, moltiplicato pel divisore, dà per prodotto il dividendo.

Eseguendo la moltiplicazione abbiamo: $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right)\frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}$. *

FRAZIONI CON TERMINI FRAZIONARI.

90. Occorre spesso di dover far uso di frazioni in cui il numeratore ed il denominatore sono essi stessi frazioni. Tali sarebbero p.e. le frazioni $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; $\frac{a+\frac{b-c}{m}}{b+d}$; $\frac{a-\frac{m+n}{b}}{\frac{p}{q}-ab}$. Quando il numeratore od il denominatore di tali frazioni è un polinomio contenente termini interi e termini frazionari, è utile (in generale) ridurre tutto il numeratore ad essere una sola frazione (il che si ottiene eseguendo tutte le operazioni indicate al numeratore); e similmente ridurre il denominatore ad una sola frazione. Dopo ciò, ogni frazione a termini frazionari prenderà una delle tre forme $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, $\frac{a}{\frac{c}{d}}$, le quali $\left(\text{scrivendo } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} \text{ invece di } \frac{\frac{a}{b}}{c};\ \text{e } \frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}} \text{ invece di } \frac{a}{\frac{c}{d}}\right)$ si possono ridurre alla prima forma. Poichè, per definizione, la frazione della forma $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ è il quoto di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, sarà: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Se, nella frazione che ha la 1ª forma, si chiamano a, d *estremi*, b, c *medi*, la eguaglianza precedente ci dà la seguente regola:

REGOLA. Una frazione a termini frazionari è eguale ad una frazione a termini interi, avente per numeratore il prodotto degli estremi, e, per denominatore, il prodotto dei medi. **

* Nel fare la moltiplicazione e la divisione delle frazioni, è bene dapprima indicare solamente i prodotti da eseguirsi, e poi sopprimere i fattori che si vedono essere comuni al numeratore ed al denominatore.

** È bene abituarsi a saper applicare speditamente ai diversi casi pratici la precedente regola. È poi evidente che si suppone che, se manca qualche estremo o qualche medio, esso venga mentalmente supplito con l'unità positiva.

CAPO SETTIMO.

Delle equazioni in generale

DEI PROBLEMI IN GENERALE.

91. DEFINIZIONE. Dicesi *problema* una questione da risolvere. Se la risoluzione del problema consiste nella ricerca di un ente, (p.e. di un numero, di una retta, di un punto, ecc.) si dirà che questo ente è *una soluzione* del problema; od anche che questo ente *verifica, soddisfa* al problema. Un problema si dice *numerico* se tutti gli enti di cui tratta sono numeri.

I più semplici problemi numerici sono i seguenti:

1°. *Dati due numeri a, b, se ne trovi la somma;*

2°. *Dati due numeri a, b, se ne trovi il prodotto;*

3°. *Dati due numeri a, b, si trovi la b^{esima} potenza di a;*

4°. *Data la somma S di due numeri a, b, ed uno di essi, si trovi l'altro;*

5°. *Dato il prodotto P di due numeri a, b, ed uno di essi, si trovi l'altro;*

6°. *Data la potenza a^b, e dato a, si trovi b;*

7°. *Data la potenza a^b, e dato b, si trovi a.*

Ciascuno di questi problemi si risolve per mezzo di una sola operazione, la quale si chiama *addizione* nel 1° problema, *moltiplicazione* nel 2°, *elevazione a potenza* nel 3°, *sottrazione* nel 4°, *divisione* nel 5°, *estrazione di logaritmo* nel 6°, *estrazione di radice* nel 7°. *

92. Nei primi cinque problemi, se a, b sono numeri scritti nel sistema decimale, si può esprimere il risultato per mezzo di un numero unico (in generale ** diverso da a e da b), e scritto esso pure nel sistema decimale. Se invece i numeri a, b sono espressi con lettere, non abbiamo un processo speciale per rappresentare, con un sol numero, il risultato cercato. Lo rappresentiamo colle notazioni: $a+b$ nel 1° caso; ab nel 2°; a^b nel 3°; $S-a$ nel 4°; $P:a$ nel 5°; e, se poniamo $a^b=m$, scriveremo $\log_a m$ nel 6°; e $\sqrt[b]{a}$ nel 7°. ***

---

* Abbiamo già parlato delle prime cinque operazioni; parleremo più tardi delle altre due.

** Si dice *in generale*, perchè se uno od entrambi i numeri dati sono zero, oppure $+1$, o -1, l'operazione può dar per risultato uno dei numeri dati. Es. $a+0=a$; $a-0=a$; $a.(+1)=a$; e, come si vedrà in seguito, $a^{-1}=a$.

*** Si può osservare che, di questi sette problemi, il 4° è l'inverso del 1°; il 5° è l'inverso del 2°; il 3° ammette due problemi inversi, cioè il 6° ed il 7°.

Sappiamo che, in ciascuno dei primi cinque problemi, il numero cercato *esiste sempre, ed è unico*, qualunque siano i numeri a, b: però nel 5° problema, il divisore deve essere diverso da zero. Non accade più così nel 6° e nel 7° problema. Infatti vedremo in seguito, che, posto p.e. $a^b=m$, se sono dati m ed a, il numero b cercato dal 6° problema, *non sempre esiste; ma, quando esiste, è unico:* che, se sono dati m e b, il numero a cercato dal 7° problema, *non sempre esiste; e, quando esiste, non sempre è unico.*

I sette problemi sopra considerati sono i *sette problemi fondamentali* dell'algebra. Diremo *algebrico* un problema, quando tutti gli enti di cui tratta sono numeri con segno, e la risoluzione di esso *si può far dipendere unicamente* dalla risoluzione dei sette problemi fondamentali precedenti, fatta (questa risoluzione) un numero limitato di volte. **

Conchiuderemo dicendo:

α) *I quattro primi problemi fondamentali dell'Algebra ammettono sempre una ed una sola soluzione.*

β) *Il 5° problema fondamentale dell'Algebra (supposto il divisore diverso da zero) ammette sempre una ed una sola soluzione.*

γ) *Il 6° problema fondamentale dell'Algebra o non ammette soluzione, o ne ammette una sola.*

δ) *Il 7° problema fondamentale dell'Algebra o non ammette soluzione, o ne ammette una, o più di una.*

93. Poichè la risoluzione di ogni problema algebrico si fa dipendere *solamente* dalla risoluzione dei sette problemi fondamentali, parrebbe, a prima vista, che, sapendo risolvere questi, si possa, con facilità, risolvere qualsiasi altro problema algebrico. E ciò infatti succede quando si vede chiaramente in qual modo il problema dato si può far dipendere dai problemi fondamentali; il che avviene quando, nel problema, sono chiaramente indicate le operazioni che si devono fare per risolverlo.

Esempio 1°. *Si cerchi il numero che si ottiene quando si moltiplica* 12 *per* 5, *poi il risultato si aumenta di* 2, *ed il totale ottenuto si divide per* 3.

Basta trovare il valore di $(12.5+2):3$.

Esempio 2°. *Si trovi il valore di* $4a+7bc-10c+1$, *posto che sia* $a=5$; $b=-7$; $c=3$.

Basta trovare il valore di $4.5+7.(-7).3-10.3+1$.

94. Ciascuno di questi problemi si può facilmente trascrivere (se

---

* Esempi di problemi non algebrici sono i seguenti: *Segnare la bissettrice di un angolo dato. Segnare la tangente ad un cerchio in un suo punto dato;* ecc. È poi evidente che, se in un problema algebrico non si tien conto del segno dei numeri, si ha un *problema aritmetico.*

già non lo è) per mezzo d'una espressione algebrica * di cui è facile trovare il valore. Essi quindi si possono tutti compendiare nel seguente:

PROBLEMA A. ***Si trovi il valore di un'espressione algebrica quando alle lettere (se ve ne sono) si attribuiscono valori particolari arbitrariamente scelti.***

Non essenzialmente diverso dal problema **A** è il seguente:

PROBLEMA A'. *Si verifichi se, per certi valori particolari delle lettere che si trovano in un'espressione algebrica, questa assume un certo valore arbitrariamente scelto.*

Esempio 1°. *Si verifichi se per* $a=2$, $b=1/3$ *è* $5a^2-8ab+b=75$.

Esempio 2°. *Si verifichi se per* $a=1$, $b=1/3$ *è* $5a^2-8ab+b=0$.

Infatti: il problema si riduce a trovare il valore dell'espressione che forma il primo membro dell'eguaglianza.

Così pure non differisce sostanzialmente dal problema **A** il seguente:

PROBLEMA A''. *Date due espressioni algebriche, si verifichi se, per valori particolari assegnati arbitrariamente alle lettere che in esse compaiono, le due espressioni acquistano il medesimo valore.*

Esempio. *Si verifichi se per* $a=4$, $b=1$, $m=2/3$, $n=-2$, $15a^2-18m^3+3abn+17$ *ed* $a-2b+3m^5-4n+20$ *assumono il medesimo valore. Ossia se è*

$$15a^2-18m^3+3abn+17=a-2b+3m^5-4n+20.$$

Basta infatti risolvere due volte il problema **A**; trovare cioè il valore di ciascuna delle due espressioni, e vedere poi se questi valori sono o non sono eguali.

Oppure, ricordando che, affinchè due numeri siano eguali è *necessario e sufficiente* che sia eguale a zero la loro differenza, basterà osservare se è eguale a zero la differenza delle due espressioni date; ossia se è **

$15a^2-18m^3+3abn+17-(a-2b+3m^5-4n+20)=0$; ossia
$15a^2-18m^3+3abn+17-a+2b-3m^5+4n-20=0$.

Come si vede, i problemi **A'** ed **A''** sono entrambi compresi nel problema **A**.

95. Si può facilmente verificare che, variando arbitrariamente il va-

* Dicesi *espressione algebrica* un numero solo, oppure l'insieme di vari numeri su cui siano indicate delle operazioni algebriche da eseguire. Dicesi poi *valore* d'una espressione algebrica il risultato finale che si ottiene eseguendo sui numeri dati tutte le operazioni indicate.

** Dicendo **è necessario**, intendiamo dire che, *se due numeri sono eguali, la loro differenza è necessariamente eguale a zero*. Dicendo **è sufficiente**, intendiamo dire che *è sufficiente sapere che la differenza di due numeri è zero, per conchiudere che i due numeri sono eguali.*

lore delle lettere che si trovano in un' espressione algebrica, *in generale*, varia in conseguenza il valore dell' espressione stessa. *

Esempio. L'espressione $5a^2-8ab+1$, per $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$, $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=-1\end{cases}$, ecc., acquista rispettivamente i valori 6, -27, 70, ecc. Così pure, dando ad a successivamente i valori 1, 2, 3, 4,.... l'espressione $2a-7$ acquista successivamente i valori -5, -3, -1, $+1$,....

Si presenta quindi naturalmente alla nostra mente un problema che si può chiamare l'*inverso* del problema ***A***. Esso è il seguente:

PROBLEMA B. Si trovi quali valori bisogna dare alle lettere di un'espressione algebrica affinchè questa assuma un certo valore arbitrariamente scelto.

Esempio 1º. *Si trovi quali valori bisogna dare ad a, b affinchè* sia $5a^2-8ab+1=12$.

Esempio 2º. *Si trovi quali valori bisogna dare ad a, b affinchè* $5a^2-8ab+1$ *sia eguale a zero; cioè sia* $5a^2-8ab+1=0$.

Non sostanzialmente diverso dal problema ***B*** è il seguente:

PROBLEMA B'. *Si trovi quali valori bisogna dare alle lettere che si trovano in due espressioni algebriche date affinchè queste assumano il medesimo valore.*

Infatti: se le due espressioni devono acquistare il medesimo valore, la loro differenza deve essere zero; ed allora il problema è ridotto a questo, di trovare i valori da dare alle lettere affinchè l' espressione che è differenza delle espressioni date acquisti il valor zero. E questo non è altro che il problema ***B***.

Esempio. Dire: *Si trovi quali valori bisogna dare ad a, b, m, n affinchè* $5a-18m+3abn-17$ ed $a-2b+3m-4n+2$ *acquistino il medesimo valore*, equivale a dire: *Si trovi quali valori bisogna dare ad a, b, m, n affinchè sia:*

$$(5a-18m+3abn-17)-(a-2b+3m-4n+2)=0, \textit{ ossia}$$
$$5a-18m+3abn-17-a+2b-3m+4n-2=0.$$

* Può darsi (anzi accade assai spesso) che, variando i valori delle lettere di una espressione algebrica, questa non cambi valore. Ciò si verifica p.e. nell' espressione $3a+2b-5$, la quale è sempre eguale ad 8 quando si ponga $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$, poi $\begin{cases}a=5\\b=-1\end{cases}$, poi $\begin{cases}a=7\\b=-4\end{cases}$, poi $\begin{cases}a=-1\\b=8\end{cases}$,.... ecc.; e di queste coppie di valori (come vedremo in seguito) se ne possono trovare quante si desidera. Esistono dunque quanti si voglia valori di a, e quanti si voglia valori di b, pei quali si ha $3a+2b-5=8$. È però facile verificare che, affinchè ciò succeda, i valori di a e di b devono essere scelti ed accoppiati *in modo opportuno;* e che, se si fanno variare *arbitrariamente* i valori di a e di b, varia pure il valore di $3a+2b-5$. P.e. pei valori $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=-4\end{cases}$, $3a+2b-5$ assume rispettivamente i valori 3, -4.

Si vede così che i due problemi ***B***, ***B'*** si riducono ad uno solo, il quale può anche essere enunciato così:

PROBLEMA C. Si trovi quali valori bisogna dare a certe lettere affinchè sia verificata una certa eguaglianza.

Osservazione 1ª. Il trovare questi valori si chiama *risolvere l'eguaglianza;* e si dice poi che i valori trovati *verificano* o *risolvono* l'eguaglianza.

Osservazione 2ª. Se è facile la risoluzione di ogni problema ***A***, non è egualmente facile la risoluzione di ogni problema ***C;*** anzi, in molti casi, il problema ***C*** non si sa ancora risolvere. Noi studieremo la risoluzione dei casi più semplici del problema ***C***; però enuncieremo prima le principali proprietà delle eguaglianze.

PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLE EGUAGLIANZE.

96.

1° Se è $a=b$, sarà $a+m=b+m$
2° Se è $a=b$, sarà $a-m=b-m$
3° Se è $a=b$, sarà $a \,.\, m=b \,.\, m$
4° Se è $a=b$, sarà $a : m=b : m$

e viceversa

5° Se è $a+m=b+m$, sarà $a=b$
6° Se è $a-m=b-m$, sarà $a=b$
7° Se è $a \,.\, m=b \,.\, m$, sarà $a=b$
8° Se è $a : m=b : m$, sarà $a=b$

9° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a+b=a'+b'$
10° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a-b=a'-b'$
11° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a \,.\, b=a' \,.\, b'$
12° Se è $a=a'$ e $b=b'$, sarà $a : b=a' : b'$

E viceversa:

13° Se è $a+b=a'+b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
14° Se è $a-b=a'-b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
15° Se è $a \,.\, b=a' \,.\, b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$
16° Se è $a : b=a' : b'$ ed $a=a'$, sarà $b=b'$

Osservazione. È sottinteso che, nel 4°, 7°, ed 8° caso, m deve essere diverso da zero: e che devono essere diversi da zero b, b' nel 12° caso; a, a' nel 15° caso; a, a', b, b' nel 16° caso.

Queste proprietà si sogliono esprimere così:

97. TEOREMA 1°. Se due numeri sono eguali, aumentati (o diminuiti) del medesimo numero, danno risultati eguali. E viceversa:

Se due numeri aumentati (o diminuiti) del medesimo numero danno risultati eguali, essi sono eguali.

TEOREMA 2°. Se due numeri sono eguali, moltiplicati (o divisi) pel medesimo numero diverso da zero, danno risultati eguali. E viceversa:

Se due numeri moltiplicati (o divisi) pel medesimo numero diverso da zero danno risultati eguali, essi sono eguali.

TEOREMA 3°. Sommando (o sottraendo) membro a membro due eguaglianze, si ottiene ancora un'eguaglianza.

TEOREMA 4°. Moltiplicando (o dividendo) membro a membro due eguaglianze i cui membri siano diversi da zero, si ottiene ancora una eguaglianza. *

DELLE EQUAZIONI IN GENERALE.

98. DEFINIZIONE. ***Equazione* è una eguaglianza da risolvere.**

I numeri di cui si cerca il valore si chiamano *le incognite* dell'equazione. I valori delle incognite si chiamano anche *le radici* o *le soluzioni* dell'equazione; e si dice che *risolvono* o *verificano* l'equazione, o *soddisfano* all'equazione.

***Risolvere un'equazione* significa trovarne le radici.**

Ogni monomio d'una equazione si chiama *un termine* dell'equazione.

Un termine d'una equazione si dirà *termine incognito* se contiene qualche incognita; *termine noto* se non contiene incognite.

Le prime lettere dell'alfabeto latino (dall'a all's compresa) si sogliono adoperare per rappresentare i numeri noti; e le ultime lettere (dalla t alla z compresa) per rappresentare le incognite. **

In grazia di questa convenzione, vedendo p.e. l'equazione

$$3ax+2bc=7m-4y+2x-b,$$

si sa che a, b, c, m sono numeri noti; e che x, y sono numeri incogniti.

In questa equazione sono termini noti $+2bc$, $+7m$, $-b$; sono termini incogniti, gli altri.

99. DEFINIZIONE. Due equazioni si dicono *equivalenti* se hanno le medesime radici.

Esempio. Le due equazioni $3x+2=23$ e $15x+10=115$, le quali ammettono tutte e due l'unica radice $x=7$, sono equivalenti.

---

* Questi teoremi furono dimostrati, pei numeri aritmetici, dal Sig. Peano, nei suoi *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Torino - Bocca - 1889); ed è facilissimo, supponendo veri i teoremi pei numeri aritmetici, dimostrarli veri anche pei numeri con segno.

** Il più antico esempio dell'uso delle lettere dell'alfabeto per rappresentare le grandezze, lo abbiamo in Aristotile, nato a Stagira nel 384 a. C., e morto nel 322. L'uso di rappresentare con lettere dell'alfabeto alcune potenze dell'incognita, lo abbiamo già in Diofanto di Alessandria (325-409), e negli scrittori arabi del VI secolo. Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (1202), rappresenta, qualche rarissima volta, con lettere, anche i numeri noti. Il primo a fare uso costante e generale delle lettere per denotare non solo le grandezze, i numeri incogniti e le loro potenze, ma anche i numeri noti, fu il Beato Giordano Nemorario di Sassonia, Superiore Generale dei Domenicani, morto nel 1236. Il Beato Giordano si potrebbe chiamare a buon diritto il padre del moderno calcolo letterale, se avesse fatto uso del segno $=$, e dei segni delle operazioni. Mancando di questi segni, egli dovette adoperare, nei suoi calcoli, (fatti sempre con sole lettere),

REGOLA. ***Per dimostrare che due equazioni sono equivalenti, bisognerà dimostrare che hanno le medesime radici; ossia che la 1ª ha tutte le radici della 2ª, e la 2ª ha tutte le radici della 1ª.*** *

È evidente che:

Due equazioni equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.

100. Data un'equazione qualsiasi, non si può scorgere, a prima vista, quali sono le sue radici. Però se noi sapessimo trovare un'altra equazione *equivalente* alla proposta, è evidente che sarebbe indifferente fare la ricerca delle radici nell'una o nell'altra delle due equazioni; ossia risolvere l'una piuttosto che l'altra delle due equazioni equivalenti. Se la 2ª equazione è *più facile a risolversi*, noi avremo, se non risolto, certamente semplificato il problema. Se poi sapremo trovare una 3ª equazione equivalente alla 2ª (epperciò anche equivalente alla 1ª) e *più facile a risolversi*, noi avremo maggiormente semplificato il problema.

E se, proseguendo per questa via, arriveremo finalmente ad un'equazione *equivalente alla prima*, e tanto semplice che in essa si scorgano immediatamente le radici, noi avremo risolta l'equazione data.

Questo è appunto il metodo che seguiremo nella risoluzione delle equazioni.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE EQUAZIONI.

101. I due membri d'una equazione sono, in generale, due polinomi. Per brevità rappresenteremo il 1° membro con A, ed il secondo con B; cosicchè un'equazione qualsiasi si rappresenterà brevemente con $A=B$.

Esempio. Se rappresentiamo l'equazione $5x+2y-2=7xy+3$ con $A=B$, sarà: $A=5x+2y-2$, e $B=7xy+3$.

102. TEOREMA 1°. Se ai due membri d'una equazione si aggiunge il medesimo numero, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima. **

---

un numero così grande di lettere, da renderne difficilissima la lettura. Fu Michele Stifel (1486-1567) che, pel primo, fece uso delle lettere e dei segni delle operazioni; ma la gloria di diffondere, presso i matematici d'Europa, il moderno calcolo letterale, spetta al matematico francese Francesco Viète (1540-1603). Viète rappresentava i numeri incogniti colle vocali, ed i numeri noti colle consonanti. Renato Descartes (1596-1650) introdusse poi l'uso di indicare, colle prime lettere dell'alfabeto, i numeri noti, e, colle ultime, i numeri incogniti.

* È da notare che, affinchè due equazioni siano *equivalenti*, non è sufficiente che *tutte* le radici della 1ª siano anche radici della 2ª; ma è anche necessario che *tutte* le radici della 2ª siano radici della 1ª. Così p.e. l'equazione $2x-3=7$ e la $x^2-9x+20=0$ non sono equivalenti, perchè la 1ª equazione ha la sola radice $x=5$, mentre la 2ª ha le due radici $x=5$ ed $x=4$.

** I teoremi ed i corollari di questo capitolo ci danno i mezzi per ricavare da una equazione altre equazioni ad essa equivalenti.

Sia p.e. l'equazione $A=B$, *ed* M *un numero qualsiasi. Aggiungendo* M *ai due membri di* $A=B$, *ottengo* $A+M=B+M$; *ed aggiungendo* $-M$ *ai due membri di* $A=B$, *ottengo* $A-M=B-M$. *Dico che* $A+M=B+M$ *ed* $A-M=B-M$ *sono equivalenti ad* $A=B$.

Dimostrazione. Pel teor. 1° § 97, se è $A=B$, sarà $A\pm M=B\pm M$; e viceversa, se è $A\pm M=B\pm M$, sarà $A=B$. Dunque i valori delle incognite che rendono $A=B$, renderanno $A\pm M=B\pm M$; e quelli che rendono $A\pm M=B\pm M$, renderanno $A=B$. Ossia: tutte le radici di $A=B$ sono radici di $A\pm M=B\pm M$; e tutte le radici di $A\pm M=B\pm M$ sono radici di $A=B$. Dunque $A=B$ ed $A\pm M=B\pm M$ sono equivalenti. *

COROLLARIO 1°. Sopprimendo un termine che si trovi nei due membri d'una equazione, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima.

Esempio. L'equazione $5x^2+2x-3=4x+5x^2+5$ è equivalente all'equazione $2x-3=4x+5$.

Infatti la 2ª si può ricavare dalla 1ª aggiungendo $-5x^2$ ai due membri della 1ª; poichè, così facendo, si ottiene:

$$5x^2+2x-3-5x^2=4x+5x^2+5-5x^2;$$

e, per la legge associativa dell'addizione (Coroll. 2° § 31),

$$2x-3+(5x^2-5x^2)=4x+5+(5x^2-5x^2); \text{ ossia}$$

$$2x-3+0=4x+5+0; \text{ ossia } 2x-3=4x+5.$$

COROLLARIO 2°. In un'equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro cambiandogli il segno. **

Esempio 1°. Se, nell'equazione $7xy+5x-2=8y-3+4x$, si sopprime $+4x$ nel 2° membro, e si scrive $-4x$ nel 1° membro, si ottiene l'equazione equivalente $7xy+5x-2-4x=8y-3$.

Infatti la 2ª si può ricavare dalla 1ª, aggiungendo $-4x$ ai due membri della 1ª.

Esempio 2°. Se, nell'equazione $7x+2=-3x+4$, si sopprime $-3x$ nel 2° membro, e si scrive $+3x$ nel 1° membro, si ottiene l'equazione

---

* È sottinteso che M ha valore definito (Osserv. 5ª § 68), ossia non ha la forma $m/_0$, nè la forma $0/_0$; e che non prende mai tali forme per nessuno dei valori che noi attribuiremo alle lettere od alle incognite che esso contiene.

Esempio: Se fosse $M=\frac{5x}{a-3}$, oppure $M=\frac{3x+2}{a-b}$, sarebbe sottinteso che noi non daremmo ad a il valore $a=3$ nel 1° caso, ed il valore $a=b$ nel 2° caso. Similmente, se fosse $M=\frac{3(a+b)}{x+4}$, sarebbe sottinteso che noi escluderemmo dalle nostre considerazioni il valore $x=-4$.

** L'espressione *si può* significa che, così facendo, si ottiene un'equazione equivalente alla primitiva.

equivalente $7x+2+3x=4$. Infatti: la 2ª si può ottenere dalla 1ª aggiungendo $+3x$ ai due membri della 1ª.

COROLLARIO 3°. In un'equazione si possono trasportare tutti i termini nel primo membro.

Esempio. Si abbia p.e. l'equazione $3x^2-5=4xy+x-1$.

Aggiungendo ad ambi i membri $-4xy-x+1$, e facendo poi la riduzione dei termini simili, si ottiene:

$3x^2-5-4xy-x+1=4xy+x-1-4xy-x+1$; ossia

$3x^2-5-4xy-x+1=0$; ossia $3x^2-4xy-x-4=0$.

E questa equazione è equivalente alla proposta.

In questo caso, si suole dire che l'equazione data è stata **ridotta a zero.***

È evidente la seguente proposizione:

Cambiando di posto i due membri di una equazione, si ottiene una equazione equivalente alla prima. Ossia sono equivalenti le due equazioni $A=B$ e $B=A$. Infatti: dire che *A è eguale a B*, è lo stesso che dire che *B è eguale ad A*.

103. TEOREMA 2°. Se i due membri di una equazione si moltiplicano per un medesimo numero diverso da zero, si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima. **

Sia p.e. l'equazione $A=B$, e sia M un numero diverso da zero; dico che l'equazione $AM=BM$ è equivalente alla $A=B$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. 2° § 97, se è $A=B$, sarà $AM=BM$; e, se è $AM=BM$, sarà $A=B$. Dunque i valori delle incognite che rendono $A=B$ renderanno $AM=BM$; e quelli che rendono $AM=BM$ renderanno $A=B$. Ossia tutte le radici di $A=B$ sono anche radici di $AM=BM$, e tutte le radici di $AM=BM$ sono anche radici di $A=B$. Ne segue che $A=B$ ed $AM=BM$ sono equivalenti.

Esempio 1°. Moltiplicando ambi i membri (ossia tutti i termini ***)

---

* Il primo esempio di equazioni *ridotte a zero* l'abbiamo nell'*Arithmetica integra* di Michele Stifel, edita a Nürnberg nel 1544. Il *ridurre a zero* le equazioni giovò a scoprire molte ed importantissime proprietà delle radici delle equazioni.

** Se il numero M è scritto sotto forma di espressione algebrica contenente delle lettere, volendo noi che M sia diverso da zero, escluderemo dalla nostra considerazione quei valori delle lettere che rendono $M=0$.

Se fosse $M=\frac{1}{N}$, sarebbe $AM=A\frac{1}{N}=\frac{A}{N}$, e $BM=B\frac{1}{N}=\frac{B}{N}$; e quindi resta anche dimostrato che $A=B$ ed $\frac{A}{N}=\frac{B}{N}$ sono equivalenti, purchè N sia diverso da zero. Epperciò il teorema si può anche enunciare così: *Se i due membri di una equazione si moltiplicano o si dividono ecc.*

*** Perchè per moltiplicare un polinomio per un numero si moltiplicano tutti i termini del polinomio per questo numero.

dell'equazione $\frac{5x}{2a}+\frac{7}{2a}=\frac{3x}{2a}-\frac{9}{2a}$ per $2a$, (supposto che sia $a \gtrless 0$) si ottiene l'equazione equivalente $5x+7=3x-9$.

Esempio 2°. Moltiplicando per $^1/_5$ (ossia dividendo per 5) ambi i membri dell'equazione $5x+25=20x-10$, si ottiene l'equazione equivalente $x+5=4x-2$. *

COROLLARIO. Cambiando il segno a tutti i termini d'una equazione si ottiene una nuova equazione equivalente alla prima.

Esempio. L'equazione $-7x+3=-5-6x$ è equivalente all'equazione $7x-3=5+6x$. Infatti la 2ª si ottiene dalla 1ª moltiplicandone ambi i membri (ossia tutti i termini) per -1. **

Osservazione 1ª. Questo teorema ci dà ancora il mezzo di ricavare da una equazione, avente termini frazionari diversi da zero, un' altra equazione equivalente alla data, e priva di termini frazionari. Basta infatti moltiplicare ambi i membri (ossia tutti i termini dell' equazione) per un multiplo qualsiasi dei denominatori; perchè allora ogni termine frazionario verrà ad avere, nel numeratore, un fattore eguale al denominatore, e si potrà (senza alterare il valore della frazione) sopprimere questo fattore nel numeratore e nel denominatore. È più comodo (quando lo si sa trovare facilmente) moltiplicare tutti i termini pel *m.c.m.* dei denominatori. Ad ogni modo, è sempre utile far uso del più piccolo fra i multipli comuni che si possono *facilmente* trovare. ***

Osservazione 2ª. Non accade mai che i due membri d'una equazione si moltiplichino o si dividano esplicitamente per *zero*. Ma ciò può avvenire inconsciamente quando si moltiplicano o si dividono ambi i membri per una espressione algebrica M contenente lettere, alle quali poi si

---

* Questo teorema ci fa conoscere che si può sopprimere un fattore diverso da zero che sia comune a tutti i termini di una equazione. Si ottiene così una nuova equazione equivalente alla prima, e, sovente, più facile a risolversi. (È conveniente abituarsi a far questa soppressione in ogni caso).

** Ciò si suol fare quando il primo termine è negativo.

*** Siamo ora in grado di dare l'etimologia della parola *Algebra*. Il più antico libro che porti questo titolo è di Muḥammed ibn Mûsâ Alchwarizmî, scrittore arabo, nato nella provincia di Chwarizm, verso il 795 dell'Era Volgare, ed ha per titolo *Al-dschebr wa'l-muḳâbala*. La parola *al* è un articolo. *Dschebr* (che fu tradotto letteralmente in latino per *restauratio)* significa *accomodare una rottura*, ed è il nome che gli Arabi diedero a quella operazione, la quale consiste nel liberare l' equazione dalle frazioni, cioè dalle rotture. *Muḳâbala* (che fu tradotto in latino per *oppositio)* significa *mettere a confronto*, ed è il nome che gli arabi diedero a quell'operazione, la quale consiste nel cercare (mettere *in evidenza*, mettere *a confronto)* i termini eguali che si trovano in ciascuno dei due membri d'una equazione, per sopprimerli. Muḥammed diede questo titolo al libro, perchè il libro era destinato, in modo speciale, alla risoluzione delle equazioni. In seguito, i libri che trattavano delle equazioni furono, dai latini, intitolati *Scientia restaurationis et oppositionis*, ed anche *De algebra et almucabala:* infine si adoperò solo la prima parte, e si intitolarono semplicemente *Algebra*.

danno valori tali che rendano $M=0$. Ciò accadrebbe p.e. se si moltiplicassero o dividessero ambi i membri d'una equazione per $3(a-b)$, o per $a-3c$, e poi si ponesse, nel 1° caso, $a=b$, e nel 2°, $a=3c$.

CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI.

104. Equazione algebrica è quella in cui, sulle incognite, non sono indicate altre operazioni da eseguirsi fuorchè quelle di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza (con esponente intero), ed estrazione di radice (con indice intero); e queste operazioni da farsi un numero limitato di volte. Sono algebriche tutte le equazioni fino ad ora da noi viste.

Equazione trascendente è ogni equazione non algebrica. Fra le trascendenti nomineremo: 1° le **esponenziali**, che sono quelle in cui qualche incognita figura negli esponenti, es. $3^x+2=5$; 2° le **logaritmiche**, che sono quelle in cui si prende il logaritmo di qualche incognita, o di qualche espressione contenente incognite; es. $2\log x-3=5x-1$, $3\log(2x+5)=2$.

Una equazione algebrica si dice **razionale** se nessuna incognita compare sotto il segno di radice; es. $7x^2-4x=5$, e $3x+x\sqrt{2}=\sqrt{5}$. Si dice **irrazionale** nel caso contrario; es. $3\sqrt{x}-2=5x+b$.

Un'equazione razionale si dice **intera** se nessuna incognita compare a denominatore; es. $2x-3=bx^2+1$, e $x/4-3=5x+1/3$. Si dice **frazionaria** nel caso contrario; es. $1/x-4=3-7x$.

Un'equazione intera si dice **ordinata** se, essendo ridotta a zero (corollario § 102), il suo 1° membro è un polinomio privo di termini simili, ed i suoi termini sono disposti in modo che, partendo dal primo termine, le potenze dell'incognita (o di una delle incognite) vadano gradatamente decrescendo.

Un'equazione ordinata si dice: 1° **ad una, due, tre, ecc. incognite** secondochè queste sono una, due, tre, ecc. Es. $3x+2=0$ è ordinata, e ad una incognita; $6x-4y+1=0$ è ordinata, ed a due incognite; $2x-3y+5z-7=0$ è ordinata, ed a tre incognite:

2° **di 1°, 2°, 3°, ecc. grado** secondochè il termine di grado massimo rispetto all'incognita (od alle incognite) è di 1°, 2°, 3° ecc. grado; es. $3x-2=0$ è di 1° grado, mentre $4x^3-3x^2+5x-8=0$ è di 3° grado: *

---

* *Se ciascun fattore letterale di un monomio intero è un monomio, dicesi grado del monomio rispetto ad una lettera, l'esponente che questa lettera ha nel monomio.* Esempio. Il monomio $-4a^2bc^3$ è di 2° grado rispetto ad a, di 1° grado rispetto a b, e di 3° grado rispetto a c. (Vedi la nota al § 52).

Se ciascun fattore letterale di un monomio intero è un monomio, dicesi grado del monomio rispetto ad alcune lettere la somma degli esponenti che queste lettere hanno nel monomio. Esempio. Il monomio $5a^2bx^3y$ è di 4° grado rispetto ad x, y; è di 3° grado rispetto ad a, b; ed è di 2° grado rispetto a b, y.

3° **omogenea** quando i termini del 1° membro hanno tutti il medesimo grado rispetto alle incognite; es. $5x-2y+3z=0$ è omogenea e di 1° grado, $x^2-4xy-3y^2=0$ è omogenea e di 2° grado:

4° **pura** se, essendo ad una sola incognita e di grado superiore al 1°, ha un solo termine incognito; es. $5x^4-80=0$:

5° **completa di 1°, 2°, 3°, ecc. grado** quando il suo 1° membro è un polinomio completo di 1°, 2°, 3°, ecc. grado rispetto all'incognita (od alle incognite). *

Es. $ax+b=0$ è ordinata, completa, di 1° grado, ad un'incognita.
$ax^2+bx+c=0$ è ordinata, completa, di 2° grado, ad un'incognita.
$ax^3+bx^2+cx+d=0$ è ordinata completa, di 3° grado, ad un'incognita.
$ax+by+c=0$ è ordinata, completa, di 1° grado, a due incognite.
$ax+by+cz+d=0$ è ordinata, completa, di 1° grado, a tre incognite. **

105. ***REGOLA PER ORDINARE UN'EQUAZIONE.***

1°. Si riduce l'equazione a zero, *trasportando tutti i termini nel primo membro* (coroll. 3° § 102).

2°. Si fanno scomparire i denominatori, *moltiplicando tutti i termini per un multiplo comune a tutti i denominatori* (Osservaz. 1ª § 103).

3°. Si fanno scomparire le parentesi, *eseguendo tutte le operazioni indicate.*

4°. Si fa la riduzione dei termini simili (§ 56), *raccogliendo in un sol termine tutti i termini contenenti la medesima potenza dell' incognita.*

5°. Si ordina il 1° membro secondo le potenze discendenti dell'incognita, *e si cambia il segno* (coroll. § 103) *a tutti i termini se il primo termine è negativo.*

---

* *Un polinonio si dice completo rispetto ad una lettera, se contiene tutte le potenze di questa lettera inferiori a quella che ha l'esponente massimo, e contiene anche un termine privo di questa lettera.*

Le equazioni di 1° grado si chiamano anche *lineari*, quelle di 2° grado *quadratiche*, quelle di 3° grado *cubiche*.

** 1° Dagli esempi precedenti si scorge facilmente che il 1° membro di una equazione completa, se è di 1° grado ad un'incognita, ha 2 termini; se è di 2° grado ad un'incognita, ha 3 termini; se è di 3° grado ad un'incognita, ha 4 termini; ed in generale, se è di n^{mo} grado ad un'incognita, ha $n+1$ termini.

2° Il primo membro d'un'equazione ordinata e completa di 1° grado ad n incognite $x, y, z.....$ ha $n+1$ termini; cioè uno in x, uno in y, uno in z, ecc.... ed un termine indipendente dalle incognite.

3° Molte volte, prima di ordinare un'equazione, non si può dire di che grado essa sia, nè quante incognite abbia. Esempio. L' equazione $4+3x(xy+5)=3x^2y-1$ pare di 3° grado ed a due incognite; ma, togliendo le parentesi, e sopprimendo il termine $3x^2y$ comune ad ambi i membri, si ottiene l'equazione $4+15x=-1$, che è di 1° grado e ad una sola incognita.

§ 105

CAPO OTTAVO.

Equazioni di 1° grado ad una incognita. *

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

106. Un'equazione ad una sola incognita, ed ordinata, si dice di primo grado se il massimo esponente che ha l'incognita è 1.

Sia data un' equazione qualunque di 1° grado ad una incognita; e sia p.e. x l'incognita. Si potrà sempre: 1° raccogliere nel primo membro tutti i termini incogniti, e nel secondo i termini noti; 2° Mettere in evidenza il fattore x comune a tutti i termini del primo membro, il quale (se a è la somma algebrica dei coefficienti dell' incognita) prenderà la forma ax; 3° Indicare con b il secondo membro, il quale è composto di soli termini noti. Si vede allora che ogni equazione di 1° grado ad una incognita potrà assumere la forma $ax=b$. **

Se a è diverso da zero, potremo dividere per a ambi i membri della $ax=b$, ed otterremo (teor. 2° es. 2° § 103) l'equazione equivalente $x={}^b/_a$, la quale ci dà direttamente il valore dell'incognita. La $x={}^b/_a$ si chiama la *formola di risoluzione* dell' equazione $ax=b$, perchè indica quale operazione conviene fare sopra a e b per risolvere la $ax=b$.

Esempio. *Si risolva l'equazione* $\frac{2x+3}{2}-\frac{3x}{5}=\frac{5}{4}x-\frac{x+15}{10}$.

Moltiplicandone (teor. 2° § 103) ambi i membri per 2.2.5, che è il m.c.m. dei denominatori, si ha:

$$\frac{2x+3}{2}.2.2.5-\frac{3x}{5}.2.2.5=\frac{5}{4}x.2.2.5-\frac{x+15}{10}.2.2.5, \text{ ossia}$$
$$(2x+3).2.5-3x.2.2=5x.5-(x+15).2, \text{ ossia}$$
$$(2x+3).10-12x=25x-(x+15).2, \text{ ossia}$$
$$20x+30-12x=25x-2x-30.$$

E, trasportando (coroll. 2° § 102) i termini incogniti nel 1° membro, ed i termini noti nel 2°, si ha: $20x-12x-25x+2x=-30-30$, ossia $-15x=-60$. E cambiando il segno (coroll. 103) ai due membri, si ottiene $15x=60$, da cui $x=\frac{60}{15}=4$.

---

* Il più antico documento contenente la risoluzione delle equazioni di 1° grado ad una incognita è un papiro egiziano scritto da Ahmes in un'epoca incerta, però compresa fra il 2000 ed il 1700 prima dell'Era Cristiana. In questo papiro, il segno dell'eguaglianza è ⋜

** Cambiando, se occorre, il segno (coroll. § 103) a tutti i termini della $ax=b$, possiamo far sì che a sia sempre positivo; b, poi, può essere positivo o negativo.

107. Dall'esempio precedente si ricava facilmente la regola:

REGOLA PER RISOLVERE UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

1°. ***Si libera l'equazione dai denominatori.***

2°. ***Si tolgono le parentesi, eseguendo tutte le operazioni indicate.***

3°. ***Si trasportano nel 1° membro tutti i termini incogniti, e nel 2° membro tutti i termini noti.***

4°. ***Si fa la riduzione dei termini simili, raccogliendo in un solo termine tutti i termini contenenti l'incognita; e si cambia il segno a tutti i termini, se il coefficiente dell'incognita è negativo.***

5°. ***Si dividono ambi i membri pel coefficiente dell'incognita.*** *

DISCUSSIONE DELLA FORMOLA DI RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

108. Abbiamo già visto (§ 106) che ogni equazione di 1° grado ad una incognita si può scrivere sotto la forma $ax = b$; e che la formola di risoluzione è $x = b/a$, ove a, b sono interi; a si può sempre supporre positivo, e b può essere positivo o negativo.

Esaminiamo ora sotto quali forme si può presentare il valore di x.

1° CASO. $\begin{cases} a \text{ diverso da zero} \\ b \text{ diverso da zero} \end{cases}$. Il valore di x esisterà sempre, e sarà unico, perchè (teor. 2° § 69) il quoto di due numeri con segno, se il divisore è diverso da zero, esiste sempre, ed è unico; esso poi sarà intero o frazionario, secondochè b è divisibile o non per a. Sarà positivo, se b è positivo; negativo, se b è negativo.

2° CASO. $\begin{cases} a \text{ diverso da zero} \\ b \text{ eguale a zero} \end{cases}$. La formola di risoluzione dà $x = 0/a$, o, come si suole scrivere, (ponendo $a = m$) $x = 0/m$. In questo caso, l'equazione ha la forma $ax = 0$. Ora è evidente che solo il valore $x = 0$ può soddisfare quest'equazione, la quale avrà la sola soluzione $x = 0$. **

3° CASO. $\begin{cases} a \text{ eguale a zero} \\ b \text{ diverso da zero} \end{cases}$. La formola di risoluzione dà $x = b/0$, o, come si suole scrivere, (ponendo $b = m$) $x = m/0$. In questo caso, l'equazione ha la forma $0.x = b$. Ora è evidente che, essendo b diverso da zero, non esiste alcun numero che, moltiplicato per *zero*, dia per ri-

---

* È evidente che non sono sempre necessarie, in ogni caso, tutte queste operazioni; nè è sempre conveniente eseguirle proprio nell'ordine con cui sono indicate nella Regola.

** Sappiamo infatti (coroll. 2° § 41) che, affinchè un prodotto sia *zero*, è necessario e sufficiente che sia *zero* uno dei fattori. Ora a è diverso da *zero*; dunque deve essere $x = 0$.

sultato b. Dunque il risultato $x = {}^m/_0$ significa che non vi è nessun numero che verifichi l'equazione. Ciò si suole esprimere dicendo:

Il risultato $x = {}^m/_0$ è indizio di impossibilità.

4° CASO. $\begin{cases} a \text{ eguale a zero} \\ b \text{ eguale a zero} \end{cases}$. Il valore di x prende la forma $x = {}^0/_0$. In questo caso, l'equazione ha la forma $0.x = 0$. Ora è evidente che qualsiasi valore si dia ad x, l'equazione è soddisfatta; perchè qualsiasi numero, moltiplicato per *zero*, dà *zero* per risultato. Dunque qualsiasi valore di x verifica l'equazione; e si dirà che l'*equazione è indeterminata*. Si suole esprimere questo fatto dicendo:

Il risultato $x = {}^0/_0$ è indizio di indeterminazione. *

Riassunto.

$$ax = b \begin{cases} a \gtrless 0,\ b \gtrless 0, \begin{cases} \text{una ed una sola soluzione diversa da } zero, \\ \text{intera o frazionaria, positiva o negativa.} \end{cases} \\ a \gtrless 0,\ b = 0, \text{ una ed una sola soluzione eguale a } zero. \\ a = 0,\ b \gtrless 0, \text{ nessuna soluzione.} \\ a = 0,\ b = 0, \text{ infinite soluzioni.} \end{cases}$$

Osservazione. Escludendo il caso $a = 0$, potremo dire:

Ogni equazione di 1° grado ad una incognita ammette sempre una ed una sola soluzione.

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

Preliminari e regola.

109. Ogni equazione è l'espressione algebrica di un problema.

P.e. l'equazione $3x + 4 = {}^x/_5 - 1$ è l'espressione del *Problema: Si*

---

* Non sempre il valore $\frac{0}{0}$ è indizio di indeterminazione. Si abbia p.e. $x = \frac{(m-n)b}{(m-n)a}$. Per qualsiasi valore di m e di n, eccetto per il valore $m = n$, la differenza $m - n$ è diversa da *zero*, e noi possiamo sopprimere il fattore $m - n$ comune al numeratore ed al denominatore, e scrivere $x = \frac{(m-n)b}{(m-n)a} = \frac{b}{a}$. Si pone perciò la *convenzione* che la frazione $\frac{(m-n)b}{(m-n)a}$, la quale ha sempre il valore $\frac{b}{a}$, tranne quando è $m = n$, abbia il medesimo valore anche quando è $m = n$. Con questa convenzione si potrà dire che, *per ogni valore di m e di n, è sempre* $\frac{(m-n)b}{(m-n)a} = \frac{b}{a}$. Ne segue la regola:

REGOLA. *Quando il valore di x ha la forma ${}^0/_0$, bisogna prima osservare se questa forma deriva dalla presenza di un fattore comune al numeratore ed al denominatore. In tal caso, il vero valore di x è quello che si ottiene sopprimendo quel fattore comune il quale, col suo annullarsi, dava ad x la forma ${}^0/_0$.*

trovi un numero x il cui triplo aumentato di 4 sia eguale alla quinta parte del medesimo numero diminuita di 1. Viceversa non si può dire che *ogni problema algebrico* sia esprimibile per mezzo di equazioni; perchè vi sono problemi contenenti condizioni implicite od esplicite, le quali non si possono esprimere coi segni ordinari dell'algebra. Tali sono p.e. tutti i problemi in cui si cerca un numero di uomini; perchè contengono, implicitamente, la condizione che il numero cercato sia *intero.* Questa condizione non si può esprimere coi segni ordinari dell'algebra, e perciò non è possibile introdurla nell'equazione.

Si è convenuto di estendere ai problemi algebrici molte denominazioni delle equazioni. Perciò si dirà che un problema algebrico è ad *una*, a *due*, a *tre*, ecc. *incognite;* oppure *di 1°, 2°, 3° ecc. grado;* oppure che ha *una, due, tre, ecc. soluzioni*, secondochè tali sono le equazioni che lo rappresentano.

Vediamo ora che cosa si può fare per risolvere un problema per mezzo delle equazioni, limitandoci, pel momento, alla considerazione dei problemi di 1° grado ad una incognita; ossia a quei problemi la cui risoluzione si può far dipendere solamente dalla risoluzione di un' equazione di 1° grado ad una incognita.

1° CASO. Il problema è numerico, ed esprimibile per mezzo di un'equazione. * 1°. *Si mette in equazione il problema*, ossia si scrive l'equazione che rappresenta il problema. 2°. *Si risolve l'equazione;* e la radice dell'equazione sarà la soluzione del problema.

2° CASO. Il problema è numerico, e contiene condizioni non trascrivibili in equazione. 1°. *Si mette in equazione il problema* prescindendo dalle condizioni non trascrivibili, e si avrà così un'equazione rappresentante il medesimo problema, ma spogliato delle condizioni non trascrivibili in equazione. ** 2°. *Si risolve l'equazione.* 3°. *Si verifica* se la radice trovata è anche soluzione del problema, e la si rigetta nel caso contrario. ***

3° CASO. Il problema è letterale. 1°. *Si mette in equazione il problema* come nel 1° e nel 2° caso. 2°. *Si risolve l'equazione.* 3°. *Si*

---

* Per comodità di locuzione diremo che un problema algebrico è *numerico* o *letterale*, secondochè i dati del problema sono espressi coi numeri del sistema decimale, o con lettere.

** In questo caso non potremo più affermare che la radice dell'equazione sarà anche soluzione del problema. Essa soddisferà certamente a tutte le condizioni che furono trascritte, ma potrebbe non soddisfare alle altre.

*** Alcune volte è un po' scomodo accertarsi se tutte le condizioni del problema sono state trascritte in equazione. È quindi cosa utile abituarsi a verificare *in ogni caso* se la radice dell' equazione è anche soluzione del problema. La radice dell' equazione può essere *positiva* o *negativa*, *intera* o *frazionaria*. *Se è intera e positiva*, generalmente soddisfa anche al problema. *Se è frazionaria e positiva*, soddisfa, in generale, anche al problema, purchè questo ammetta, per soluzione, un numero frazionario. *Se è negativa*, non soddisfa al problema, eccetto in casi rarissimi.

fa la discussione del problema; ossia si determina entro quali limiti devono essere compresi i valori dei dati del problema, affinchè la soluzione dell'equazione sia anche soluzione del problema. Si cerca inoltre per quali valori particolari dei dati del problema la soluzione di questo presenta delle particolarità degne di osservazione.

Riassumendo abbiamo:

REGOLA PER RISOLVERE UN PROBLEMA ALGEBRICO.

1°. ***Si mette in equazione il problema;***

2°. ***Si risolve l'equazione;***

3°. α) ***Se il problema è numerico ed interamente trascrivibile in equazione, la radice dell'equazione sarà la soluzione del problema.***

β) ***Se il problema è numerico e non interamente trascrivibile in equazione, si verifica se la radice dell'equazione soddisfa al problema.***

γ) ***Se il problema è letterale, si fa la discussione del problema.*** *

Problemi determinati.

110. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *determinato* quando ha un numero limitato di soluzioni.

Se esso è di 1° grado ad una incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ad un'*equazione determinata*.

Esempio. *Problema. Si trovi un numero i cui $^3/_4$ diminuiti di 5 siano eguali ai $^2/_5$ del medesimo numero aumentati di 16.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato. I $^3/_4$ del numero li rappresenteremo scrivendo $^3/_4 x$. Allora i $^3/_4$ del numero diminuiti di 5 li rappresenteremo con $^3/_4 x - 5$. Similmente, i $^2/_5$ del numero aumentati di 16 li rappresenteremo con $^2/_5 x + 16$. Dovendo queste due espressioni essere eguali fra loro, scriveremo $^3/_4 x - 5 = {}^2/_5 x + 16$. È evidente che tutte le condizioni del problema furono trascritte in equazione; epperciò questa equazione di 1° grado ad una incognita è la trascrizione algebrica del problema. La radice dell'equazione sarà la soluzione del problema. Risolvendo l'equazione, otteniamo successivamente:

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}x = 16 + 5, \text{ cioè } \frac{7}{20}x = 21, \text{ cioè } 7x = 420, \text{ cioè } x = \frac{420}{7} = 60.$$

Risposta. Il numero cercato è 60.

---

* Nella risoluzione algebrica di un problema di 1° grado ad una incognita, la 2ª parte, cioè *la risoluzione dell'equazione,* non presenta alcuna difficoltà, sapendo noi risolvere qualsiasi equazione di 1° grado ad una incognita. La 3ª parte, cioè la *discussione*, sovente non è necessaria, perchè il problema è numerico; del resto essa, generalmente, non è difficile. La difficoltà principale consiste nel mettere il problema in equazione. Stante la grande varietà di problemi, non è possibile dar regole generali per metterli in equazione. Più che tutto giova l'esercizio e la naturale attitudine individuale.

§ 110

Problemi indeterminati.

111. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *indeterminato* quando ammette un numero illimitato di soluzioni.

Se esso è di 1° grado ad una incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ad una *equazione indeterminata.*

Esempio. Problema. Si trovi un numero i cui $^3/_5$ *diminuiti di* $^1/_3$ *del numero stesso siano eguali ai* $^4/_{15}$ *del medesimo numero.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato. Dovrà essere:

$$\frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x=\frac{4}{15}x, \text{ ossia } \frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{4}{15}x=0, \text{ ossia } \left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}-\frac{4}{15}\right)x=0,$$

ossia $0.x=0$. Da cui $x={}^0/_0$.

Risposta. La soluzione $x={}^0/_0$ *è indizio di indeterminazione, e fa conoscere che qualsiasi numero risponde al problema.*

Problemi impossibili.

112. DEFINIZIONE. Diremo che un problema algebrico è *assurdo* od *impossibile* quando contiene condizioni o assurde in se stesse, od incompatibili fra loro.

Se esso è di 1° grado ad una incognita, ed interamente trascrivibile in equazione, darà origine ad un'equazione assurda, la cui radice avrà la forma $^m/_0=\infty$; il che è indizio di *impossibilità.* *

Se invece esso contiene condizioni non trascrivibili in equazione, darà origine ad un' equazione, la quale non rappresenta *tutto intero* l'enunciato del problema. In tal caso *può darsi* che l' equazione sia assurda; ma *può anche darsi* che l' equazione ammetta una soluzione, ed allora esisterà un numero che soddisferà a tutte le condizioni trascritte nell'equazione, e non alle altre; esso soddisferà all'equazione senza soddisfare al problema.

Esempio. Problema. Si trovi un numero di due cifre, in cui la cifra delle decine sia doppia di quella delle unità; e la quinta parte del numero diminuito di 3 sia eguale a 54.

Risoluzione. Sia x la cifra delle unità; quella delle decine sarà $2x$; e poichè una decina vale dieci unità, $2x$ decine varranno $10.2x=20x$ unità. Il numero cercato è eguale alla somma delle sue unità e delle sue decine, cioè a $x+20x$. La quinta parte del numero diminuito di 3 sarà eguale a $\frac{x+20x-3}{5}$. Avremo perciò l'equazione $\frac{x+20x-3}{5}=54$, ossia $21x-3=270$, ossia $21x=273$, ossia $x=13$.

---

* Non è però da credere che tutte le volte che si ha $x={}^m/_0$ il problema non ammetta soluzione. Vedremo infatti che vi sono problemi geometrici, in cui, al valore $x={}^m/_0=\infty$, corrisponde una soluzione *vera e reale* del problema.

Risposta. La cifra delle unità sarebbe 13, e quella delle decine 26; ma ciò non può essere: dunque il problema è impossibile.

Osservazione. Il valore $x=13$ soddisfa all' equazione, ma non al problema; perchè questo contiene le condizioni sottintese, e non trascrivibili in equazione, che i due numeri cercati siano *interi*, *positivi*, e ciascuno *d'una cifra sola.*

Soluzioni negative.

113. Alcune volte l'impossibilità del problema è originata dal fatto che il problema richiede per soluzione un numero *positivo*, mentre la radice dell'equazione è un numero *negativo*. In questi casi, per rendere il problema *possibile*, basterebbe cambiare alcuni dati numerici del problema. Non volendo ciò fare, è spesso facile trovare un altro problema, il cui enunciato *si scosti pochissimo* dall'enunciato del problema primitivo, ed abbia i medesimi dati numerici e la medesima soluzione, ma positiva. Per raggiungere questo scopo, ci è utile il seguente teorema.

114. TEOREMA. Cambiando il segno a tutti e soli i termini contenenti l'incognita, la radice d'una equazione di 1° grado ad una incognita cambia il segno, ma non il suo valore numerico.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo (§ 106) che ogni equazione di 1° grado ad una incognita e ridotta a zero (coroll. 3° § 102) si può scrivere sotto la forma $ax=b$; ove x è l'incognita, a la somma algebrica dei coefficienti di x; e b la somma algebrica dei termini noti. Ora, se nell'equazione data si cambia il segno *a tutti, e soli*, i termini contenenti l'incognita, si viene a cambiare il segno *a tutti, e soli*, i termini che formano la somma a; epperciò *cambierà il segno*, *ma non il valore numerico di* a, mentre b rimane inalterato. Se dunque la primitiva equazione si può ridurre alla forma $ax=b$, da cui si ricava $x={}^{b}/_{a}$, l' equazione modificata si potrà ridurre alla forma $-ax=b$, da cui si ricaverà $x=\frac{b}{-a}=-\frac{b}{a}$. Ove si vede che la radice ha cambiato segno, ma non valore numerico.

115. Quando, nel risolvere un problema, si trova che l'equazione ha la radice negativa, si può operare nel seguente modo:

1° Se la grandezza rappresentata dall'incognita può avere due qualità opposte, p.e. le qualità d'essere *tempo passato o futuro*, *somma guadagnata o perduta*, ecc., e se col segno $+$ si è rappresentata una di queste due qualità, il segno — della radice indicherà che la grandezza cercata ha la qualità opposta. *

---

* Il primo che in Europa abbia interpretato le soluzioni negative dei problemi, fu Leonardo da Pisa nel 1202. Prima di lui queste soluzioni erano, dai matematici europei, chiamate *soluzioni false* e, come tali, rigettate. Però nel 500 gli Indiani le interpretavano già; ed è probabile che Leonardo da Pisa, il quale soggiornò lungo tempo in Oriente, ne abbia imparato da loro l'interpretazione.

Esempio. Se la qualità d'esser *guadagno* si rappresenta col $+$, e la domanda del problema è *Quante lire ho guadagnato?* e la radice è p.e. -3, si dovrà rispondere *Ho perduto lire 3.*

2°. Sia che la grandezza possa avere due qualità opposte, sia che non le possa avere, noi potremo sempre ritornare all'equazione ricavata trascrivendo il problema in equazione, e cambiare in essa il segno *a tutti e soli* i termini contenenti l'incognita. L'equazione così ottenuta avrà per radice la radice dell'equazione primitiva presa col segno $+$..

Se la natura dell'incognita (nel caso speciale di cui si tratta) è tale da ammettere un doppio senso (come sarebbe *guadagno o perdita*, *passato o futuro* ecc.) si trascrive in linguaggio ordinario quest'equazione, accostandosi, per quanto è possibile, al dettato del problema primitivo. Si ottiene così *il problema modificato* che si cercava.

Se invece la natura dell'incognita non è tale da ammettere un doppio senso, l'equazione così ottenuta non sarà trascrivibile in linguaggio ordinario. Allora si utilizza il coroll. del § 103, e si cambia il segno a tutti i termini dell'equazione ottenuta col primo cambiamento parziale dei segni. Se l'equazione che ne risulta è trascrivibile in linguaggio ordinario, la si trascrive accostandosi, per quanto è possibile, al dettato del problema primitivo, e si ottiene così il *problema modificato* che si cercava. Se invece non è trascrivibile in linguaggio ordinario, *il problema non è modificabile senza cambiare i dati numerici.*

Esempio. Problema. Pietro riceve la mercede di 15 giorni di lavoro; Giacomo che guadagna L. 3 di meno al giorno, riceve la mercede di 12 giorni di lavoro: giuocano poi due partite fra loro. Nella prima Pietro guadagna L. 28, e nella seconda ne perde 40. Dopo ciò i due operai possiedono la medesima somma. Qual'è la paga giornaliera di ciascuno?

Risoluzione. Sia x il numero di lire che Pietro riceve di paga giornaliera; Giacomo riceverà L. $x-3$. Per 15 giorni di lavoro Pietro avrà ricevuto $15x$ lire; e Giacomo, per 12 giorni di lavoro, ne avrà ricevute $(x-3)12$. Ma Pietro prima guadagna L. 28, e poi ne perde 40; dunque alla fine delle due partite avrà L. $15x+28-40$. Giacomo invece prima perde 28 lire, e poi ne guadagna 40; dunque alla fine avrà lire $(x-3)12-28+40$. Ma devono possedere la medesima somma; avremo quindi l'equazione

$$15x+28-40=(x-3)12-28+40 \qquad (1)$$

ossia $15x-12x=-12$, ossia $3x=-12$, da cui $x=-4$.

La paga di Pietro sarebbe di -4 lire; ma ciò non può essere, non potendo la paga d'un operaio essere negativa.

Cambiamo dunque nella (1) il segno *a tutti e soli* i termini contenenti l'incognita, ed avremo

$$-15x+28-40=(-x-3)12-28+40 \qquad (2)$$

La (2) ha per radice $x=4$; ma essa non è trascrivibile in lin-

guaggio ordinario, perchè la paga dell'operaio non può essere negativa.

Cambiamo dunque il segno a tutti i termini della (2), ed otterremo l'equazione $15x-28+40=(x+3)12+28-40$ .... (3)
che è equivalente alla (2), e quindi avrà anch'essa per radice $x=4$. Traducendo la (3) in linguaggio ordinario, avremo il seguente problema:

Problema. Pietro riceve la mercede di 15 giorni di lavoro; Giacomo che guadagna lire 3 di più al giorno, riceve la mercede di 12 giorni di lavoro: giuocano poi due partite fra loro. Nella prima Pietro perde lire 28, e nella seconda ne guadagna 40. Dopo ciò i due operai possiedono la medesima somma. Qual'è la paga giornaliera di ciascuno?

Questo problema ci dà $x=4$. Per cui:

Risposta. La paga giornaliera di Pietro è di L. 4; quella di Giacomo è di L. 7.

Esempio di discussione dei problemi di primo grado ad una incognita.

116. PROBLEMA. *Una botte contiene vino da lire a al litro; un'altra contiene vino da lire b al litro. Con questi due vini voglio formare m litri di miscuglio del valore di lire c al litro. Quanti litri devo prendere da ciascuna botte?*

Risoluzione. Dei due valori a, b, sia p.e. a il maggiore, e sia x il numero dei litri che bisogna prendere dalla 1ª botte. Poichè un litro costa a lire, litri x costeranno ax lire.

Dalla 2ª botte si prenderanno allora $m-x$ litri; e, poichè uno di questi costa b lire, tutti insieme costeranno lire $b(m-x)$.

Gli m litri del miscuglio costeranno perciò lire $ax+b(m-x)$, e quindi un litro solo del miscuglio costerà lire $\frac{ax+b(m-x)}{m}$. Ma vogliamo che costi lire c; avremo dunque l'equazione $\frac{ax+b(m-x)}{m}=c$,
ossia $ax+b(m-x)=cm$; ossia $ax+bm-bx=cm$; ossia
$ax-bx=cm-bm$; ossia $(a-b)x=m(c-b)$; ossia $x=m\frac{c-b}{a-b}$...(1).

Discussione. È evidente che, per la natura del problema, i valori di x, m, a, b, c devono essere tutti positivi; che m può essere un numero positivo qualunque; e che deve essere $x<m$. Ci basterà dunque cercare quali relazioni devono esistere fra i valori positivi di a, b, c, affinchè *x sia positivo e minore di m.*

Poichè m è positivo, affinchè x sia positivo, *è necessario e sufficiente* che sia positiva la frazione $\frac{c-b}{a-b}$; ed essendo il denominatore $a-b$ po-

sitivo, (perchè abbiamo supposto $a>b$) *è necessario e sufficiente* che sia positivo il numeratore; cioè che sia $c>b$.

Affinchè x sia minore di m, *è necessario e sufficiente* che $\frac{c-b}{a-b}$ sia una frazione propria; ossia che si abbia $a-b>c-b$; da cui si ricava $a>c$.

Se dalla 1ª botte si prendono litri $m\frac{c-b}{a-b}$, dalla 2ª si prenderanno litri $m-m\frac{c-b}{a-b}=m\left[1-\frac{c-b}{a-b}\right]=m\left[\frac{a-b}{a-b}-\frac{c-b}{a-b}\right]=$

$$=m\left[\frac{a-b-(c-b)}{a-b}\right]=m\left[\frac{a-b-c+b}{a-b}\right]=m\frac{a-c}{a-b}.$$

Risposta. *Devo prendere $m\frac{c-b}{a-b}$ litri dalla 1ª botte; ed $m\frac{a-c}{a-b}$ litri dalla 2ª. Affinchè il problema ammetta soluzione, è necessario e sufficiente che sia contemporaneamente $a>c$ e $c>b$; ossia $a>c>b$.*

Ciò era d' altronde facile a prevedersi, dovendo naturalmente il valore di un litro del miscuglio essere intermedio fra i valori di un litro di ciascuno dei due vini che formano il miscuglio.

Osservazione. Se supponiamo $a=b$, i due vini hanno egual valore; ed il miscuglio dovrà avere il medesimo valore: e quindi $a=b=c$.

Il problema è allora indeterminato, potendo noi mescolare i vini delle due botti in una proporzione qualsiasi. In questo caso la (1) diventa: $x=m\frac{a-a}{a-a}=m\frac{0}{0}$, che è indizio di *indeterminazione*.

CAPO NONO.

Equazioni di 1° grado a due incognite

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI SISTEMI DI DUE EQUAZIONI DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE.

117. DEFINIZIONE. Un'equazione a più incognite ed ordinata si dice di 1° grado, se i suoi termini incogniti sono tutti di 1° grado rispetto alle incognite.

Se si portano nel 1° membro tutti i termini incogniti, e nel 2° membro tutti i termini noti, e si fa la riduzione dei termini simili, ogni equazione di 1° grado prenderà la forma $ax+by=c$, se ha due inco-

gnite; $ax+by+cz=d$, se ha tre incognite; $ax+by+cz+dv=e$, se ha quattro incognite; ecc. *

Abbiamo visto (§ 108) che una equazione di 1° grado ad una incognita ammette *in generale* sempre una, ed una sola soluzione. Vediamo ora che cosa possiamo dire, a questo proposito, rispetto ad una equazione di 1° grado a più incognite.

Si abbia p.e. l'equazione $3x+2y=5$. Se diamo ad y un valore arbitrario, p.e. $y=1$, risulta l'equazione $3x+2=5$, che è di 1° grado in x, ed ha per radice $x=1$. Dunque $x=1$, $y=1$ verificano l'equazione data; ossia (come si suol dire) $x=1$, $y=1$ *è una coppia di radici*, od anche *un sistema di radici* dell'equazione data. Se poniamo invece $y=2$, otteniamo l'equazione: $3x+2.2=5$, che ci dà $x=1/3$. Dunque $x=1/3$, $y=2$ *è un'altra coppia di radici* dell'equazione data. E così di seguito.

Si vede facilmente che, variando ad arbitrio il valore di y, varia in conseguenza il valore di x. Se facessimo invece variare ad arbitrio il valore di x, l'equazione data diventerebbe una equazione di 1° grado in y, e ci fornirebbe i corrispondenti valori di y. Conchiuderemo dicendo: **Un'equazione di 1° grado a due incognite ha un numero illimitato di coppie di radici.**

118. Due equazioni a due incognite, ed aventi le medesime incognite, si dicono *equivalenti* se ammettono tutte e due i medesimi sistemi di radici. Tali sarebbero p.e. le due equazioni $2x-y=5$ e $6x-3y=15$, la 2ª delle quali si ottiene dalla 1ª moltiplicandone tutti i termini per 3. È evidente il seguente corollario:

COROLLARIO. Due equazioni a due incognite, equivalenti ad una terza, sono equivalenti fra loro.

Se si hanno due equazioni a due incognite, e non equivalenti fra loro, sappiamo già che ciascuna equazione ha un numero illimitato di coppie di radici. Si presenta ora naturale la domanda se esista una coppia di radici che risolva contemporaneamente le due equazioni. Vedremo in seguito che una tale coppia di radici generalmente esiste.

---

* Se alcuni coefficienti delle incognite sono letterali, per dare all'equazione la forma precedente, bisogna raccogliere in un sol termine tutti i termini contenenti una medesima incognita (mettendo quest'incognita a fattor comune), e rappresentarne il coefficiente con una lettera. Bisogna poi similmente rappresentare con una lettera la somma algebrica dei termini noti. ESEMPIO. *Si ordini l'equazione:*

$3x+my+5+mx+ny=2z+m-pz+x$. Avremo:

$3x+mx-x+my+ny-2z+pz=-5+m$, ossia

$(3+m-1)x+(m+n)y-(2-p)z=-5+m$, ossia

$(2+m)x+(m+n)y-(2-p)z=-5+m$. Rappresentando ora $2+m$ con a, ed $m+n$ con b, e $-(2-p)$ con c, e $-5+m$ con d, l'equazione data prende la forma

$ax+by+cz=d$.

119. DEFINIZIONE. Due equazioni a due incognite formano un *sistema* se deve esistere una coppia di radici che risolva contemporaneamente le due equazioni.

120. DEFINIZIONE. Due sistemi di equazioni si dicono *equivalenti* quando tutte le soluzioni di un sistema sono anche soluzioni dell'altro. Sono evidenti i seguenti corollari:

COROLLARIO 1°. Se due sistemi di equazioni sono equivalenti, per la ricerca delle radici, sarà indifferente far uso dell'uno oppure dell'altro dei due sistemi.

COROLLARIO 2°. Due sistemi equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.

COROLLARIO 3°. Se alcune od anche tutte le equazioni di un sistema, vengono sostituite da altre equazioni rispettivamente equivalenti alle primitive, si ottiene un nuovo sistema equivalente al sistema primitivo.

121. DEFINIZIONE. *Risolvere un'equazione a più incognite rispetto ad una incognita*, significa trovare un'altra equazione equivalente alla data, e nella quale questa incognita formi da sola *(ossia con esponente 1 e coefficiente 1)* uno dei membri dell'equazione. L'altro membro si chiama il valore dell'incognita.

Esempio. Per risolvere rispetto ad x l'equazione $5x+2y=1$, si trasporta nel 2° membro $2y$, e si ha $5x=1-2y$; poi si dividono tutti i termini pel coefficiente di x, e si ottiene: $x=\frac{1-2y}{5}$, che è l'equazione cercata. Essa è evidentemente equivalente (coroll. 2° § 102 e teor. § 103) alla equazione data. Il valore di x è $\frac{1-2y}{5}$; però esso non è ancora noto, essendo tuttora incognito y.

122. TEOREMA. Se in un sistema di due equazioni con due incognite ad una equazione si sostituisce quella che si ottiene sommando o sottraendo membro a membro le due equazioni, si ottiene un sistema equivalente al sistema dato.

Sia p.e. il sistema (I), *dico che esso è equivalente al sistema* (II).

$$\text{(I)}\ \begin{cases} A=A' \\ B=B' \end{cases} \qquad\qquad \text{(II)}\ \begin{cases} A=A' \\ A\pm B=A'\pm B' \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per le prop. 9ª e 10ª § 96, se è $A=A'$ e $B=B'$ sarà pure $A\pm B=A'\pm B'$; e quindi quei valori delle incognite che rendono $A=A'$ e $B=B'$, renderanno pure $A=A'$ e $A\pm B=A'\pm B'$.

Ossia *tutte le coppie di radici del 1° sistema saranno anche coppie di radici del 2° sistema.*

Viceversa, per le prop. 13ª e 14ª § 96, se è $A=A'$ ed $A\pm B=A'\pm B'$, sarà pure $B=B'$; e quindi quei valori delle incognite, che rendono

$A=A'$ ed $A\pm B=A'\pm B'$, renderanno pure $A=A'$ e $B=B'$. Ossia *tutte le coppie di radici del 2° sistema saranno anche coppie di radici del 1° sistema*. Dunque i due sistemi sono equivalenti.

Osservazione. È evidente che, prima di sommare o sottrarre membro a membro le due equazioni, posso moltiplicare tutti i termini di una di esse per un numero arbitrario m, purchè sia diverso da zero; e poi, se voglio, moltiplicare tutti i termini dell' altra per un medesimo numero arbitrario n, purchè sia diverso da zero. Infatti, così facendo, si ha il sistema $mA=mA'$, $nB=nB'$, equivalente al sistema dato, perchè, pel teor. 2° § 103, $mA=mA'$ è equivalente ad $A=A'$, ed $nB=nB'$ è equivalente a $B=B'$. Sul sistema $mA=mA'$, $nB=nB'$ si può ragionare come si fece sul sistema dato.

COROLLARIO 1°. Se in un sistema di due equazioni con due incognite si risolvono le due equazioni rispetto ad una medesima incognita, e si eguagliano fra loro i valori ottenuti, si ottiene una nuova equazione, la quale, sostituita ad una delle due equazioni del sistema, dà un nuovo sistema, equivalente al sistema dato.

Si abbia p.e. il sistema (I). *Risolvendo le due equazioni rispetto ad y si ottiene: dalla 1ª* $y=\frac{6-3x}{2}$; *dalla 2ª* $y=\frac{2x-1}{5}$. *

Eguagliando i due valori di y si ha $\frac{6-3x}{2}=\frac{2x-1}{5}$. *Sostituendo questa equazione alla 2ª del sistema* (I), *ottengo il sistema* (IV), *che dico essere equivalente al sistema* (I). **

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 3x+2y=6 \\ 2x-5y=1 \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} \frac{6-3x}{2}=y \\ y=\frac{2x-1}{5} \end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \begin{cases} \frac{6-3x}{2}=y \\ \frac{6-3x}{2}=\frac{2x-1}{5} \end{cases} \qquad \text{(IV)}\ \begin{cases} 3x+2y=6 \\ \frac{6-3x}{2}=\frac{2x-1}{5} \end{cases}$$

---

* Conviene abituarsi a scrivere in questi casi immediatamente il risultato. Se il coefficiente dell' incognita che si vuole eliminare è negativo, ed è nel 1° membro, è comodo fare così: Si immagina portato quel termine incognito nel 2° membro, e tutti gli altri nel 1°; poi si scrive l'incognita, poi il segno =, e poi il 1° membro, il quale si divide pel coefficiente dell'incognita.

Esempio. Per risolvere rispetto ad y l'equazione $2x-5y=1$, si immagina di ave[re] $2x-1=5y$, da cui $y=\frac{2x-1}{5}$. Analogamente si opera se l' incognita rispetto a c[ui] si risolve l'equazione è nel 2° membro della equazione.

** Nel sistema (II) si è scritto $\frac{6-3x}{2}=y$, e non $y=\frac{6-3x}{2}$, affinchè sommand[o]

DIMOSTRAZIONE. Il sistema (II) è evidentemente equivalente al sistema (I), perchè le sue equazioni sono rispettivamente equivalenti a quelle del sistema (I).

Sommando membro a membro le due equazioni del sistema (II), si ottiene $\frac{6-3x}{2}+y=y+\frac{2x-1}{5}$; ossia $\frac{6-3x}{2}=\frac{2x-1}{5}$, che, sostituita alla 2ª equazione del sistema (II), dà (teor. preced.) il sistema (III), equivalente al sistema (II), e quindi anche (coroll. 2° § 120) equivalente al sistema (I).

Sostituendo poi, nel sistema (III), alla 1ª equazione la sua equivalente $3x+2y=6$, si ha il sistema (IV), equivalente al sistema (III), e quindi anche (coroll. 2° § 120) equivalente al sistema (I).

COROLLARIO 2°. Se in un sistema di due equazioni con due incognite, ad una incognita d'una equazione si sostituisce il valore che si ottiene risolvendo l'altra equazione rispetto alla medesima incognita, si ottiene un nuovo sistema equivalente al sistema dato.

Si abbia p.e. il sistema (I). *Risolvendo p.e. la 1ª equazione rispetto ad y, ottengo* $y=\frac{6-3x}{2}$; *e sostituendo questo valore di y nella 2ª equazione, ottengo il sistema* (IV), *che dico essere equivalente al sistema* (I).

$$\text{(I)}\begin{cases}3x+2y=6\\2x-5y=1\end{cases}\qquad\text{(II)}\begin{cases}-5.\frac{6-3x}{2}=-5y\\2x-5y=1\end{cases}$$

$$\text{(III)}\begin{cases}-5.\frac{6-3x}{2}=-5y\\2x-5.\frac{6-3x}{2}=1\end{cases}\qquad\text{(IV)}\begin{cases}3x+2y=6\\2x-5.\frac{6-3x}{2}=1\end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Il sistema (II) è equivalente al sistema (I), perchè la $-5.\frac{6-3x}{2}=-5y$ è equivalente alla $3x+2y=6$. *

---

come faremo in seguito, membro a membro le due equazioni, si possa ottenere una equazione contenente nei due membri il termine y, il quale (coroll. 1° § 102) si potrà sopprimere.

* La 1ª equazione del sistema (II) è quella che si ottiene da $y=\frac{6-3x}{2}$, ossia da $\frac{6-3x}{2}=y$, moltiplicandone ambi i membri per -5, che è il coefficiente di y nella 2ª equazione data. Si è fatto così affinchè, sommando poi membro a membro le due equazioni del sistema (II), si possa ottenere una equazione non contenente y.

Sommando membro a membro le due equazioni del sistema (II), si ottiene $2x-5y-5.\frac{6-3x}{2}=-5y+1$; ossia $2x-5.\frac{6-3x}{2}=1$, che, sostituita alla 2ª equazione del sistema (II), dà (teor. preced.) il sistema (III) equivalente al sistema (II), e quindi anche (coroll. 2º § 120) equivalente al sistema (I).

Sostituendo poi nel sistema (III) alla 1ª equazione la sua equivalente $3x+2y=6$, si ottiene il sistema (IV), equivalente al sistema (III), e quindi anche (coroll. 2º § 120) equivalente al sistema (I).

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DI 1º GRADO A DUE INCOGNITE.

123. ***METODO DI RIDUZIONE***. Si risolva il sistema (I).

$$\text{(I)}\ \begin{cases}4x-3y=-3\\5x+2y=25\end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases}8x-6y=-6\\15x+6y=75\end{cases}\qquad \text{(III)}\ \begin{cases}4x-3y=-3\\x=3\end{cases}$$

Procuriamo di ottenere un sistema equivalente a questo, ed in cui un'equazione contenga una sola incognita, p.e. la sola incognita x.

Se i coefficienti di y fossero eguali nelle due equazioni, sommandole membro a membro si otterrebbe un'equazione contenente la sola x. *

Essi non sono eguali; ma noi possiamo renderli tali moltiplicando p.e. tutti i termini della 1ª pel coefficiente che la y ha nella 2ª; e tutti i termini della 2ª pel coefficiente che la y ha nella 1ª. Così facendo, otteniamo il sistema (II), le cui equazioni sono rispettivamente equivalenti a quelle del sistema (I). **

Sommando membro a membro le equazioni del sistema (II), otteniamo $8x+15x=-6+75$, ossia $23x=69$, ossia $x=\frac{69}{23}$, ossia $x=3$, la quale equazione può essere sostituita (osserv. § 122) alla 1ª od

---

* Se i termini contenenti l'incognita che si vuol eliminare hanno il medesimo segno, prima di sommare si cambia il segno a tutti i termini di una delle due equazioni.

** Per eguagliare i coefficienti dell' incognita che si vuole eliminare, è sufficiente moltiplicare tutti i termini di ciascuna equazione pel coefficiente che quest'incognita ha nell'altra equazione. Però è utile, *in generale*, cercare il m.c.m. dei coefficienti dell'incognita che si vuole eliminare, e moltiplicare tutti i termini di ciascuna equazione pel quoto che si ottiene dividendo il m.c.m. pel coefficiente che ha l' incognita nell'equazione stessa. Es. ***Si eguaglino i coefficienti di y nelle equazioni del sistema* (I).**

$$\text{(I)}\ \begin{cases}3x+8y=19\\5x+6y=17\end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases}9x+24y=57\\20x+24y=68\end{cases}$$

Cerco il m.c.m. di 6 e di 8, che è 24. Moltiplico tutti i termini della 1ª equazione per $24:8=3$; e tutti i termini della 2ª per $24:6=4$; ed ottengo le equazioni del sistema (II). È bene abituarsi a fare quasi tutte queste operazioni *a memoria*.

alla 2ª delle equazioni date. Sostituendola alla 2ª otterremo il sistema (III), equivalente al sistema (I).

Poichè le equazioni del sistema (III) formano un sistema, esse devono essere soddisfatte entrambe dai medesimi valori delle incognite. Ora la $x=3$ ha la sola radice 3; epperciò il sistema (III), e quindi anche il sistema (I), ammette per x il solo valore $x=3$.

Sostituendo questo valore di x nell'altra equazione del sistema (III), si ottiene $4.3-3y=-3$, ossia $4.3+3=3y$, ossia $15=3y$, da cui $y=5$. Si ha così un solo valore di y. *

Risposta. Il sistema dato ha la sola soluzione $x=3$, $y=5$.

Osservazione. Questo metodo di risolvere il sistema si chiama *metodo di riduzione* od anche *metodo di addizione e sottrazione.*

124. ***METODO DI PARAGONE.*** Si risolva il sistema (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x+4y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 6x-12y=-5 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 3x+4y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1'). \\ \dfrac{5-3x}{4}=\dfrac{6x+5}{12} \ldots\ldots\ldots (2'). \end{cases}$$

Anche qui si tratta di ottenere un sistema equivalente a questo, ed in cui un'equazione contenga una sola incognita. A tal fine elimineremo una delle due incognite, p.e. la y; e vogliamo fare l'eliminazione servendoci del coroll. 1° § 122. Risolviamo perciò la (1) e la (2) rispetto ad y, ed otteniamo: dalla (1) $y=\dfrac{5-3x}{4}$, dalla (2) $y=\dfrac{6x+5}{12}$.

Eguagliando questi due valori di y, si ha l'equazione $\dfrac{5-3x}{4}=\dfrac{6x+5}{12}$, che può essere sostituita alla (1) od alla (2). Sostituendola alla (2), otterremo il sistema (II) equivalente al sistema (I).

La (2′) dà per x *il solo valore* $x={}^2/_3$, **

Sostituendo nella (1′) il valore trovato di x, si ha: $3.{}^2/_3+4y=5$; ossia $4y=3$; ossia $y={}^3/_4$. La (1′) dà per y *il solo valore* $y={}^3/_4$.

Risposta. Il sistema ha la sola soluzione $x={}^2/_3$, $y={}^3/_4$. ***

---

* Se, partendo nuovamente dal sistema dato, si fosse eliminata la x fra le due equazioni, si sarebbe trovato $y=5$. Però, quando si è già trovato il valore d'una incognita, è più comodo sostituire (come abbiam fatto) il valore trovato in una delle due equazioni date.

** Per risolvere la (2′), ne moltiplichiamo ambi i membri per 12, ed otteniamo $\dfrac{5-3x}{4}.12=\dfrac{6x+5}{12}.12$, ossia $(5-3x)3=6x+5$, ossia $15-9x=6x+5$, ossia $-9x-6x=5-15$, ossia $-15x=-10$, ossia $15x=10$, ossia $x=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$.

*** Per trovare il valore di y avremmo potuto seguire la medesima via, cioè eliminare x fra le due equazioni date, e risolvere poi l'equazione ottenuta.

Osservazione. Per risolvere questo sistema abbiamo risolto rispetto ad y le due equazioni del sistema, ed *eguagliato*, ossia *paragonato*, ossia *confrontato* i due valori ottenuti. Per questa ragione questo metodo venne chiamato *metodo di paragone o metodo di confronto.*

125. ***METODO DI SOSTITUZIONE.*** Si risolva il sistema (I).

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 2x-3y=-11 \ldots\ldots (1). \\ 4x+5y=22 \ldots\ldots (2). \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} 2x-3y=-11 \ldots\ldots (1'). \\ y=4 \ldots\ldots (2'). \end{cases}$$

Procuriamo anche qui di ottenere un sistema equivalente a questo, ed in cui un' equazione contenga una sola incognita. Eliminiamo a tal fine un' incognita, p.e. la x, fra le due equazioni, servendoci del corollario 2° § 122. Risolviamo p.e. la (1) rispetto ad x, ed otteniamo $x=\frac{-11+3y}{2}$. Sostituendo questo valore di x nella (2), essa diventa

$4.\frac{-11+3y}{2}+5y=22$, ossia $2(-11+3y)+5y=22$, ossia

$-22+6y+5y=22$, ossia $11y=44$, ossia $y=4$.

Questa equazione può essere sostituita alla (1) od alla (2); sostituendola alla (2), avremo il sistema (II) equivalente al sistema (I).

La (2′) dà per y il solo valore $y=4$.

Sostituendo nella (1′) il valore già trovato di y, essa diventa $2x-3.4=-11$, ossia $2x=-11+12$, ossia $2x=1$, da cui $x=\frac{1}{2}$. Questo valore di x *è unico.*

Risposta. Il sistema ammette la sola soluzione $x=\frac{1}{2}$, $y=4$.*

Osservazione 1ª. Per risolvere questo sistema abbiamo *sostituito ad* x nella (2) il valore di x dato dalla (1). Per questa ragione questo metodo viene chiamato *metodo di sostituzione.*

Osservazione 2ª. Come si vede, per risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado con due incognite, si può far uso di uno qualunque dei tre metodi ora studiati. Generalmente si preferisce far uso del *metodo di riduzione*, perchè, con questo, più facilmente si possono fare quasi tutte le operazioni a memoria, e non s' introducono denominatori. In alcuni casi, specialmente quando un' incognita ha in una equazione per coefficiente l'unità, può tornar più comodo il *metodo di paragone*, o quello di *sostituzione*. La pratica suggerirà, nei diversi casi, quale metodo sia da preferirsi.

---

* Anche qui, per trovare il valore di x, si sarebbe potuto seguire la via tenuta per trovare il valore di y.

REGOLE PER L'ELIMINAZIONE DI UNA INCOGNITA FRA DUE EQUAZIONI DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE. *

126. ***METODO DI RIDUZIONE.*** ***Si eguagliano*** (§ 123), ***nelle due equazioni, i coefficienti dell'incognita che si vuole eliminare, e, se questi hanno egual segno, si cambia il segno*** (coroll. § 103) ***a tutti i termini d'una delle due equazioni. Poi si sommano membro a membro le due equazioni. L'equazione che ne risulta sarà l'equazione cercata.***

METODO DI PARAGONE. ***Si risolvono*** (§ 121) ***le due equazioni rispetto all'incognita che si vuole eliminare, e si eguagliano i valori ottenuti. L'equazione che ne risulta sarà l'equazione cercata.***

METODO DI SOSTITUZIONE. ***Si risolve*** (§ 121) ***una delle due equazioni rispetto all'incognita che si vuole eliminare, ed il valore ottenuto si sostituisce all'incognita stessa nell'altra equazione. L'equazione che ne risulta sarà l'equazione cercata.*** **

RISOLUZIONE DEL SISTEMA $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c'. \end{cases}$ ***

127. Poichè, come si è visto al § 117, ogni equazione di 1° grado a due incognite x, y si può mettere sempre sotto la forma $ax+by=c$, ogni sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite x, y, si potrà sempre mettere sotto la forma (A).

$$(A) \begin{cases} ax+by=c \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ a'x+b'y=c' \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Si sottintende che a, b, c, a', b', c' sono numeri noti; a, b, a', b' sono tutti diversi da zero, mentre c, c' possono essere zero.

Per risolvere il sistema (A) possiamo far uso di uno qualsiasi dei metodi studiati: sceglieremo quello di *confronto*. Risolvendo la (1) e la (2) rispetto ad y, avremo: dalla (1) $y=\frac{c-ax}{b}$; dalla (2) $y=\frac{c'-a'x}{b'}$.

---

* ***Eliminare un'incognita fra due equazioni di un sistema contenenti entrambe quest'incognita,*** significa trovare un'equazione che si possa sostituire nel sistema ad una delle due equazioni date, e che non contenga più l'incognita di cui si tratta.

** La teoria completa e rigorosa della eliminazione di una incognita fra due equazioni, anche quando le equazioni non sono di 1° grado, si trova per la prima volta nella *Théorie générale des Équations Algébriques*, pubblicata nel 1779 da Stefano Bézout, nato a Nemours nel 1730, e morto a Parigi nel 1783.

*** a' si legge *a primo*; a'' si legge *a secondo*; a''' si legge *a terzo*, ecc. I segni $'$ $''$ $'''$ ecc. che si mettono talvolta a destra ed in alto alle lettere, si chiamano *apici*. L'algebra rappresentando i numeri per mezzo delle lettere dell'alfabeto, supplisce al piccolo numero di queste per mezzo degli apici.

Eguagliando questi due valori di y, otterremo $\frac{c'-a'x}{b'}=\frac{c-ax}{b}$. Moltiplicando ambi i membri di quest'equazione per il prodotto bb' dei denominatori, si ha $b(c'-a'x)=(c-ax)b'$, ossia $bc'-ba'x=cb'-ab'x$, ossia $ab'x-ba'x=cb'-bc'$, ossia $(ab'-ba')x=cb'-bc'$; e (supponendo $ab'-ba'$ diverso da zero) $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$.

Risolviamo ora rispetto ad x la (1) e la (2), ed otterremo: dalla (1) $x=\frac{c-by}{a}$; dalla (2) $x=\frac{c'-b'y}{a'}$.

Eguagliando questi due valori di x, avremo $\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$. Moltiplicando ambi i membri di questa equazione per il prodotto aa' dei denominatori, si ha $(c-by)a'=a(c'-b'y)$, ossia $ca'-ba'y=ac'-ab'y$, ossia $ab'y-ba'y=ac'-ca'$, ossia $(ab'-ba')y=ac'-ca'$; e (supponendo $ab'-ba'$ diverso da zero) $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$.

Avremo quindi: $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$ $\quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$................$(A')$

Osservazione. Le (A') si chiamano *le formole di risoluzione* del sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite, perchè indicano quali operazioni bisogna fare sui coefficienti delle incognite e sui termini noti per avere i valori delle incognite. *

128. Queste formole si ricordano facilmente mediante la regola:

REGOLA DI CRAMER. Si fanno i prodotti ab e ba, si pone l'apice al secondo fattore, e si ha ab' e ba'; si sottrae poscia il 2° prodotto dal 1°, e si ottiene il denominatore comune $ab'-ba'$.

Il numeratore di ciascuna incognita si ottiene dal denominatore comune sostituendo, in esso, ai coefficienti dell'incognita i termini noti corrispondenti.

129. Le (A') si sogliono anche scrivere sotto un'altra forma molto facile a ritenersi a memoria. Per dar ragione di questa nuova forma, premetteremo le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE 1ª. Chiamasi determinante dei quattro numeri a, b, a', b', **scritti in questo ordine, la scrittura** $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; **e chiamasi** ***prima diagonale*** **quella che passa pel primo numero, e** ***seconda diagonale*** **l'altra.**

---

* Avendo da risolvere un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite, lo potremo sempre ridurre alla forma (A), e poi, senza far uso dei metodi dei §§ 123, 124, 125, basterà ricorrere alle formole (1') e (2'), e sostituire in esse ad a, a', b, b', c, c', i valori particolari che tali lettere hanno nel sistema che si ha da risolvere.

DEFINIZIONE 2ª. **Il determinante** $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ **rappresenta il binomio che si ottiene sottraendo dal prodotto dei numeri che stanno sulla 1ª diagonale il prodotto di quelli che stanno sulla 2ª.**

Avremo quindi per definizione: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.

Ciò premesso, i valori delle incognite di un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite sono dati dalla seguente regola:

REGOLA. ***Il denominatore comune è il determinante dei coefficienti delle incognite, scritti nell'ordine che hanno nel sistema*** (A).

Il numeratore di ciascuna incognita è il determinante che si ottiene dal denominatore scrivendo, in luogo dei coefficienti dell'incognita, i termini noti corrispondenti.

Avremo quindi: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$; $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$ .... (A').

Esempio. Si abbia da risolvere il sistema (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} 5x - 2y = 14 \\ -3x + 4y = -7 \end{cases}$$

Abbiamo $a = 5$; $a' = -3$; $b = -2$; $b' = 4$; $c = 14$; $c' = -7$.

Applicando la regola di Cramer abbiamo:

$$x = \frac{14.4 - (-2)(-7)}{5.4 - (-2)(-3)} = \frac{56 - 14}{20 - 6} = \frac{42}{14} = 3.$$

$$y = \frac{5(-7) - 14(-3)}{5.4 - (-3)(-2)} = \frac{-35 + 42}{20 - 6} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

Applicando la regola dei determinanti si ha:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{14.4 - (-2)(-7)}{5.4 - (-2)(-3)} = \frac{56 - 14}{20 - 6} = \frac{42}{14} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 14 \\ -3 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5(-7) - 14(-3)}{5.4 - (-2)(-3)} = \frac{-35 + 42}{20 - 6} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$

DISCUSSIONE DELLE FORMOLE DI RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE.

130. Abbiamo visto che il sistema

$$(A)\quad \begin{cases} ax+by=c \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ a'x+b'y=c' \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

ha per soluzione $x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$; $\quad y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ .... (A')

supposto che siano a, a', b, b', ed $ab'-ba'$ tutti diversi da zero.

Studieremo ora più da vicino queste formole di risoluzione, anche nel caso in cui non si verifichino le restrizioni da noi fatte.

131. TEOREMA. Se, essendo a, a', b, b' diversi da zero, sono eguali a zero il denominatore $ab'-ba'$ ed uno dei due numeratori, anche l'altro numeratore sarà eguale a zero.

Sia p.e. $ab'-ba'=0$ e $cb'-bc'=0$: *si vuol dimostrare che sarà anche* $ac'-ca'=0$.

DIMOSTRAZIONE. Se $ab'-ba'=0$ e $cb'-bc'=0$, sarà $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$ e $\dfrac{c}{c'}=\dfrac{b}{b'}$, da cui si ha evidentemente $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'}$; e quindi $ac'-ca'=0$.*

COROLLARIO 1°. Se un' incognita ha la forma $0/0$, anche l'altra incognita avrà la forma $0/0$.

COROLLARIO 2°. Se un' incognita ha la forma $m/0$, anche l'altra incognita avrà la forma $m/0$.

Infatti: Non può avere la forma $0/0$ perchè in tal caso (pel coroll. preced.) anche l'altra dovrebbe avere la forma $0/0$, il che è contro l'ipotesi.

Non può avere la forma $0/m$, nè la forma m/n, perchè il denominatore è il medesimo per tutte e due. Dunque avrà la forma $m/0$.

132. La discussione della formola di risoluzione può presentare i tre seguenti casi:

---

* Supporre $ab'-ba'=0$, equivale a supporre $ab'=ba'$, ossia (dividendo ambi i membri per $a'b'$) $\dfrac{ab'}{a'b'}=\dfrac{ba'}{a'b'}$; ossia $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}$. Analogamente: supporre $cb'-bc'=0$, equivale a supporre $cb'=bc'$, ossia $\dfrac{cb'}{b'c'}=\dfrac{bc'}{b'c'}$, ossia $\dfrac{c}{c'}=\dfrac{b}{b'}$; supporre $ac'-ca'=0$, equivale a supporre $ac'=ca'$, ossia $\dfrac{ac'}{a'c'}=\dfrac{ca'}{a'c'}$, ossia $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{c}{c'}$.

1° CASO. Denominatore comune diverso da zero. Ossia $ab'-ba' \gtrless 0$.

Ciascuna delle operazioni da eseguirsi sopra i numeri a, a', b, b', c, c' per ottenere i valori delle incognite, è sempre possibile, e conduce sempre ad un risultato unico; epperciò il valore di ciascuna incognita, in ogni caso particolare, esisterà e sarà unico. Il sistema ammette quindi una, ed una sola soluzione; e diremo che *il sistema è determinato.* *

2° CASO. Denominatore comune eguale a zero, ed i due numeratori eguali a zero. Ossia $ab'-ba'=0$; $cb'-bc'=0$; $ac'-ca'=0$.

Poichè b, b' sono diversi da zero, potremo moltiplicare tutti i termini della (1) per b' e tutti i termini della (2) per b, ed il sistema (A) si trasformerà nel sistema equivalente (A_1) **

$$(A_1) \begin{cases} ab'x+bb'y=b'c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1_1) \\ ba'x+bb'y=bc' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2_1) \end{cases}$$

ove la (1_1) e la (2_1) sono rispettivamente equivalenti alle (1), (2) del sistema (A). Avendo noi per ipotesi $ab'-ba'=0$ (ossia $ab'=ba'$), e $cb'-bc'=0$ (ossia $cb'=bc'$), si vede che le (1_1), (2_1) non sono se non una sola equazione. Dunque, nel sistema (A), non abbiamo sostanzialmente due equazioni distinte, ma una sola equazione fra due incognite; epperciò vi sarà un numero illimitato di coppie di radici; e diremo che *il sistema è indeterminato.* ***

3° CASO. Denominatore comune eguale a zero, ed i due numeratori diversi da zero. Ossia $ab'-ba'=0$; $cb'-bc' \gtrless 0$; $ac'-ca' \gtrless 0$.

Abbiamo per ipotesi $ab'-ba'=0$, ossia $ab'=ba'$, e $cb'-bc' \gtrless 0$, ossia $cb' \gtrless bc'$; e quindi le (1_1), (2_1) del sistema (A_1), le quali sono rispettivamente equivalenti alle (1), (2) del sistema (A), hanno eguali i primi membri e disuguali i secondi membri, il *che è assurdo.* Ne segue che le (1_1), (2_1), e quindi anche le due equazioni del sistema (A), sono *incompatibili* fra loro, e non esiste nessun valore di x e di y che le possa verificare contemporaneamente. Dunque il sistema non ammette soluzione. Diremo che *il sistema è impossibile.*

Osservazione. È facile vedere che tutto quanto si disse nell'ipotesi che nessuno dei numeri a, a', b, b' sia zero vale anche quando *uno solo* di essi è zero. ****

---

* Il valore di ciascuna incognita potrà essere intero o frazionario, positivo o negativo, od anche zero.

** A_1 si legge *A con uno;* similmente A_2 si legge *A con due;* A_3 si legge *A con tre;* ecc. I numeri 1, 2, 3,.... che si mettono a destra ed in basso di una lettera, si chiamano *indici.* Essi hanno il medesimo ufficio degli *apici.* (Vedi nota *** pag. 79).

*** Per trovare quante si voglia soluzioni del sistema, basterà dare ad una incognita un valore arbitrario, e resterà così determinato il corrispondente valore dell'altra.

**** In questo caso, le radici non assumono mai la forma $m/_0$, nè la forma $0/_0$, perchè se uno dei numeri a, a', b, b' è zero, il denominatore comune $ab'-ba'$ non può annullarsi, se non è anche zero un altro fra i numeri a, a', b, b'.

Del caso in cui due, o più di due, fra i numeri a, a', b, b' siano zero, non abbiamo da occuparci, perchè allora il sistema (A) cessa di essere un sistema di due equazioni a due incognite.

L'essere uno solo, o tutti e due i numeri c, c' eguali a zero, non modifica le conclusioni precedentemente ottenute.

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 1° GRADO A DUE INCOGNITE.

Risoluzione del problema.

133. Avendo da risolvere un problema di 1° grado con due incognite, si indichino rispettivamente con x, y le incognite; e, seguendo le norme date al § 109, **si metta in equazione il problema.**

Si otterranno così due equazioni, le quali, dovendo essere verificate dalla medesima coppia di valori delle incognite, formeranno **un sistema di due equazioni.**

Tutto ciò che si disse intorno alla risoluzione di un problema di 1° grado ad un'incognita, si può applicare alla risoluzione di un problema di 1° grado a due incognite.

Il problema sarà **determinato, indeterminato, impossibile,** secondochè tale sarà il sistema di equazioni che lo rappresenta.

Interpretazione delle soluzioni negative.

134. Per la interpretazione delle soluzioni negative, e la relativa modificazione dei problemi, si segue una via analoga a quella indicata ai §§ 113, 114, 115. Ci è utile il seguente teorema:

TEOREMA. Se in un sistema di due equazioni di 1° grado con due incognite, si cambia il segno a tutti, e soli, i coefficienti di una o di entrambe le incognite, si ottiene un nuovo sistema, le cui radici hanno il medesimo valore numerico di quelle del sistema primitivo; però hanno segno contrario i valori di quelle incognite i cui coefficienti cambiano segno.

Si abbia p.e. il sistema (A) *che ha per soluzione* $x=3$, $y=-4$.

$$(A)\ \begin{cases} 5x-2y=23 \\ 3x+7y=-19 \end{cases} \qquad\qquad (B)\ \begin{cases} 5x+2y=23 \\ 3x-7y=-19. \end{cases}$$

Cambiando il segno a tutti, e soli, i coefficienti di una incognita, p.e. di y, *si ottiene il sistema* (B); *e si vuol dimostrare che il sistema* (B) *avrà per soluzione* $x=3$, $y=4$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostrerò che $x=3$, $y=4$ è soluzione del sistema (B), se dimostro che verifica le due equazioni del sistema (B).

Per ciò fare, basterà sostituire in (B) alle incognite i rispettivi valori $x=3$, $y=4$.

Cominciamo per ora a sostituire in (A) ad y il valore -4, ed otteniamo il sistema (A').

$$(A') \begin{cases} 5x-2(-4)=23 \\ 3x+7(-4)=-19 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 5x+8=23 \\ 3x-28=-19. \end{cases}$$

Similmente in (B) sostituiamo ad y il valore $+4$, ed otteniamo il sistema (B'). *

$$(B') \begin{cases} 5x+2(+4)=23 \\ 3x-7(+4)=-19 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} 5x+8=23 \\ 3x-28=-19. \end{cases}$$

La rimanente sostituzione (cioè 3 al posto di x), essendo la medesima nei due sistemi, darà necessariamente risultati identici. Ma questa sostituzione, fatta in (A), verifica le due equazioni, perchè per ipotesi $x=3$, $y=-4$ è una soluzione del sistema (A); dunque, fatta in (B), verificherà pure le due equazioni del sistema (B'). Ne segue che il sistema (B) è soddisfatto ponendo $x=3$, $y=4$; dunque $x=3$, $y=4$ è una soluzione del sistema (B).

Osservazione. Si farebbe una dimostrazione analoga se si cambiasse il segno a tutti, e soli, i coefficienti delle due incognite.

Interpretazione dei simboli $^0/_0$, $^m/_0$.

135. Intorno all'interpretazione di questi simboli, può valere tutto quanto già si disse trattando della risoluzione dell'equazione e dei problemi di 1° grado ad una incognita.

Discussione dei problemi.

136. La discussione si fa tenendo una via analoga a quella tenuta nella discussione dei problemi ad una sola incognita.

---

* I due sistemi (A') e (B') risulteranno sempre necessariamente identici, perchè il sistema (B') non è altro che il sistema (A'), in cui, in tutti i termini contenenti una data incognita, si è cambiato il segno al coefficiente dell'incognita, ed all'incognita stessa. Questi termini adunque *non hanno cambiato valore numerico*, perchè (teorema § 41) il valore numerico del prodotto dipende solamente dai valori numerici dei fattori, e non dal loro segno; *non hanno cambiato segno*, perchè (teor. § 42) se si cambia il segno a due fattori di un prodotto, il segno del prodotto non cambia.

LIBRO SECONDO

I numeri irrazionali

CAPO PRIMO

Classi di numeri.

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ FONDAMENTALI.

137. DEFINIZIONE 1ª. Diremo *classe di numeri* l'insieme di tutti i numeri che godono d'una medesima proprietà.

Esempio. Sono classi di numeri: 1° l'insieme di tutti i numeri positivi; 2° l'insieme di tutti i numeri superiori a 7; 3° l'insieme di tutti quei numeri che sono superiori a 3 ed inferiori a 20.

2ª. Una classe di numeri dicesi *limitata*, od *illimitata*, secondochè contiene un numero limitato, od illimitato di numeri. *

* Una classe di numeri può anche avere *un solo* elemento, p.e. la classe dei numeri interi superiori a 4 ed inferiori a 6; od anche *zero* elementi, p.e. la classe dei numeri interi superiori ad 8 ed inferiori a 9.

Ogni classe limitata ha evidentemente un elemento massimo ed un elemento minimo. Invece una classe illimitata può non avere nè elemento massimo, nè elemento minimo; oppure averli entrambi, od uno solo dei due.

Esempio 1°. La classe dei numeri interi o frazionari superiori a 4 è illimitata, ed evidentemente non ha elemento massimo. Inoltre non ha elemento minimo. Infatti: preso nella classe un numero α piccolo quanto si vuole, p.e. $\alpha=4,0001$, è sempre possibile trovare un altro numero della classe, p.e. 4,00001, minore di α.

Esempio 2°. La classe dei numeri interi o frazionari non inferiori a 5, nè superiori a 19, è illimitata, ed ha per elemento massimo 19, e per elemento minimo 5.

Esempio 3°. La classe dei numeri interi o frazionari inferiori od eguali a 5, è illimitata, e non ha elemento minimo; ma ha per elemento massimo 5.

Esempio 4°. La classe dei numeri interi superiori a 3, è illimitata, e non ha elemento massimo; essa ha per elemento minimo 4.

Esempio. È *illimitata* la classe dei numeri superiori a 5; è *limitata* la classe dei numeri interi, e positivi, inferiori a 28.

3ª. Ogni numero d'una classe di numeri si chiama un *elemento* della classe.

4ª. Una classe A di numeri si dice *maggiore* di un'altra classe A' di numeri, se ciascun elemento di A è maggiore di ciascun elemento di A'; e si scrive $A>A'$. Viceversa si dice che A' è *minore* di A, e si scrive $A'<A$.

5ª. Diremo *contigue* due classi di numeri quando: 1° Sono illimitate; 2° Una delle due classi è maggiore dell'altra; 3° Dato un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, è possibile trovare due numeri, uno della classe maggiore e l'altro della classe minore, tali che la loro differenza sia minore di ε.

Esempio. La classe A dei numeri interi o frazionari, maggiori di 5, e la classe A' dei numeri interi o frazionari, minori di 5, sono contigue. Infatti: 1° Sono illimitate; 2° Ogni elemento di A è maggiore di ogni elemento di A'; 3° Dato un numero positivo ε piccolo ad arbitrio, p.e. $\varepsilon=0{,}00001$, * è possibile trovare un numero di A, p.e. 5,000001, ed un numero di A', p.e. 4,999999, tali che la loro differenza sia minore di ε. È infatti $5{,}000001-4{,}999999=0{,}000002$; ed è appunto $0{,}000002<0{,}00001$. **

6ª. Un numero, intero o frazionario, si dice *limite di due classi contigue di numeri*, se è inferiore a tutti i numeri della classe maggiore, e superiore a tutti i numeri della classe minore.

Esempio. Tale sarebbe il numero 5, rispetto alle classi contigue A ed A' precedentemente considerate. ***

Osservazione. Invece di dire *numero intero o frazionario limite di due classi contigue di numeri*, diremo semplicemente *numero limite*.

---

* Se fosse dato p.e. $\varepsilon=0{,}0000048$, si potrebbe osservare che è $0{,}0000001<\varepsilon$, e quindi ragionare sopra 0,0000001 invece che sopra 0,0000048.

** La classe dei numeri interi maggiori di 5, e la classe dei numeri interi minori di 5, quantunque siano illimitate, e la 1ª sia maggiore della 2ª, tuttavia non sono contigue. Infatti: il più piccolo numero della 1ª è 6, ed il più grande numero della 2ª è 4; epperciò la differenza fra un numero della 1ª ed un numero della 2ª è sempre eguale, o superiore, a $6-4$. Similmente la classe dei numeri interi o frazionari superiori ad 8, e la classe dei numeri interi o frazionari inferiori a 3 non sarebbero contigue.

*** Se delle due classi la maggiore avesse un elemento minimo, o la minore un elemento massimo, questo si chiamerebbe il numero limite delle due classi, e si potrebbe stabilire la seguente definizione:

Definizione. *Un numero si dice limite di due classi contigue di numeri, se non è superiore a nessuno dei numeri della classe maggiore, e non è inferiore a nessuno dei numeri della classe minore.*

Noi non avremo da occuparci di tali classi; epperciò non faremo uso di questa definizione.

138. TEOREMA 1°. Due classi contigue di numeri non possono avere più di un sol limite.

Siano A ed A' due classi contigue, e sia $A>A'$: dico che esse non possono avere più di un sol limite.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che siano l ed l' due limiti diversi delle classi contigue A ed A', e sia p.e. $l>l'$.

Per definizione, l ed l' sono entrambi minori di ogni numero di A, ed entrambi maggiori di ogni numero di A'. Perciò se a è un numero della classe A, ed a' un numero della classe A', potremo scrivere $a>l$ ed $l'>a'$. Ma si ha anche, per ipotesi, $l>l'$; dunque sarà $a>l>l'>a'$. Da $a>l>l'>a'$ segue che sarà in ogni caso $a-a'>l-l'$; epperciò la differenza fra un numero di A ed un numero di A' sarà sempre maggiore di $l-l'$, e quindi non potrà divenire minore di un numero positivo ε arbitrariamente piccolo. Ciò è contro l'ipotesi che A ed A' siano contigue. Dunque due classi contigue non possono avere più di un sol limite.

Osservazione 1ª. Poichè due classi contigue di numeri non possono avere due limiti diversi, un numero che sia limite di due classi contigue è pienamente determinato se sono date le due classi. Si dice allora che le due classi *individuano* il numero; e viceversa che il numero è *individuato* dalle due classi. Così p.e. le classi A ed A' dell'esempio che segue la definizione 5ª del § 137 individuano il numero 5. *

Osservazione 2ª. Per indicare che A ed A' sono classi contigue, e che è $A>A'$, scriveremo (A, A'); e se α è il numero che esse individuano, scriveremo $\alpha=(A, A')$. Per indicare che $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots$ sono gli elementi della classe A, scriveremo $A=(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots)$.

139. TEOREMA 2°. Ogni numero intero o frazionario si può considerare come il limite di due classi contigue di numeri.

DIMOSTRAZIONE. Dato un numero qualsiasi α, intero o frazionario, possiamo sempre spartire tutti i rimanenti numeri interi o frazionari in due classi, ponendo nella 1ª tutti quelli che sono maggiori di α, e nella 2ª tutti quelli che sono minori di α. Le due classi così ottenute sono contigue, ed individuano α.

Infatti: 1° Esse sono evidentemente illimitate; 2° La 1ª classe è maggiore della 2ª; 3° Dato un numero positivo ε, piccolo ad arbitrio, è sempre possibile trovare un numero della classe maggiore p.e. $\alpha+\frac{\varepsilon}{4}$, ed uno della classe minore p.e. $\alpha-\frac{\varepsilon}{4}$, tali, che la loro differenza sia minore di ε. È infatti $\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{4}\right)-\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\alpha+\frac{\varepsilon}{4}-\alpha+\frac{\varepsilon}{4}=2.\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}$.

* Il teorema si può anche enunciare così: *Due classi contigue di numeri non possono individuare due numeri diversi.*

4° Il numero α è poi evidentemente il limite delle due classi; poichè, per ipotesi, esso è minore di tutti i numeri della 1ª, e maggiore di tutti i numeri della 2ª. *

OPERAZIONI SULLE CLASSI DI NUMERI.

140. DEFINIZIONI. 1ª. Dicesi *somma* di due classi A, B di numeri, la classe formata dai numeri che si ottengono sommando ciascun elemento di A con ciascun elemento di B. Si rappresenta con $A+B$.

2ª. Dicesi *differenza* di due classi A, B di numeri, la classe formata dalle differenze che si ottengono sottraendo ciascun elemento di B da ciascun elemento di A. Si rappresenta con $A-B$. **

3ª. Dicesi *prodotto* di due classi A, B di numeri, la classe formata dai prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun elemento di A per ciascun elemento di B. Si rappresenta con AB.

---

* *Un medesimo numero può essere il limite di quante si voglia coppie di classi contigue.* Esempio. Dato il numero 4, possiamo costruire tante coppie (A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D'), ecc., ecc.

	A	B	C	D
	....	....	....	....
	$4+\frac{1}{2}$	$4+\frac{1}{2^2}$	4,1	4,2
	$4+\frac{1}{3}$	$4+\frac{1}{2^3}$	4.01	4,02
	$4+\frac{1}{4}$	$4+\frac{1}{2^4}$	4,001	4,002
	$4+\frac{1}{5}$	$4+\frac{1}{2^5}$	4.0001	4,0002
	....	....	....	....
	4	4	4	4
	....	....	....	....
	$4-\frac{1}{5}$	$4-\frac{1}{2^5}$	3,9999	3,9998
	$4-\frac{1}{4}$	$4-\frac{1}{2^4}$	3,999	3,998
	$4-\frac{1}{3}$	$4-\frac{1}{2^3}$	3 99	3,98
	$4-\frac{1}{2}$	$4-\frac{1}{2^2}$	3.9	3 8
	....	....	....	....
	A'	B'	C'	D'

quante desideriamo; e tali che tutte individuino il numero 4.

** Se è $A<B$, gli elementi di $A-B$ sono numeri negativi.

4ª. Dicesi *quoto* di due classi A, B di numeri, la classe formata dai quoti che si ottengono dividendo ciascun elemento di A per ciascun elemento di B. Si rappresenta con $\frac{A}{B}$ o con $A:B$.

5ª. Dicesi *potenza* n^{ma} della classe A di numeri, la classe formata dalle potenze n^{me} degli elementi di A. Si rappresenta con A^n.

6ª. Dicesi *radice* n^{ma} della classe A di numeri, la classe formata dalle radici n^{me} degli elementi di A. Si rappresenta con $\sqrt[n]{A}$. *

Esempi. Sia p.e. A la classe dei numeri interi compresi fra 10 e 15, e B la classe dei numeri interi compresi fra 4 ed 8. Avremo:

$A=(11,\ 12,\ 13,\ 14)$; $B=(5,\ 6,\ 7)$.

$A+B=(11+5,\ 11+6,\ 11+7,\ 12+5,\ 12+6,\ 12+7,\ 13+5,\ 13+6,\ 13+7,\ 14+5,\ 14+6,\ 14+7)$.

$A-B=(11-5,\ 11-6,\ 11-7,\ 12-5,\ 12-6,\ 12-7,\ 13-5,\ 13-6,\ 13-7,\ 14-5,\ 14-6,\ 14-7)$.

$AB=(11.5,\ 11.6,\ 11.7,\ 12.5,\ 12.6,\ 12.7,\ 13.5,\ 13.6,\ 13.7,\ 14.5,\ 14.6,\ 14.7)$.

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{11}{5},\ \frac{11}{6},\ \frac{11}{7},\ \frac{12}{5},\ \frac{12}{6},\ \frac{12}{7},\ \frac{13}{5},\ \frac{13}{6},\ \frac{13}{7},\ \frac{14}{5},\ \frac{14}{6},\ \frac{14}{7}\right).$$

$A^n=(11^n,\ 12^n,\ 13^n,\ 14^n)$.

$\sqrt[n]{A}=(\sqrt[n]{11},\ \sqrt[n]{12},\ \sqrt[n]{13},\ \sqrt[n]{14})$.

CAPO SECONDO.

Numeri limiti

EGUAGLIANZA E DISUGUAGLIANZA DEI NUMERI LIMITI.

141. TEOREMA 1°. Se due coppie di classi contigue di numeri individuano due numeri eguali, ogni elemento della classe maggiore di ciascuna delle due coppie è maggiore di ogni elemento della classe minore dell'altra coppia.

Sia p.e. $\alpha=(A,\ A')$, $\beta=(B,\ B')$, ed inoltre $\alpha=\beta$. Si vuol dimostrare che ogni elemento di A sarà maggiore di ogni elemento di B'; e che ogni elemento di B sarà maggiore di ogni elemento di A'.

DIMOSTRAZIONE. Ogni elemento di A essendo maggiore di α, e quindi anche del suo eguale β, sarà maggiore di ogni elemento di B'.

Similmente, ogni elemento di B essendo maggiore di β, e quindi anche del suo eguale α, sarà maggiore di ogni elemento di A'.

---

* *Dicesi radice n^{ma} di un numero a, e si indica con $\sqrt[n]{a}$, quel numero che, elevato alla n^a potenza, riproduce a.*

ESEMPIO. Il 3 è radice quarta di 81, perchè $3^4=81$; e si scrive $3=\sqrt[4]{81}$

§ 141

142. LEMMA. Se due classi contigue di numeri individuano un numero, è sempre possibile trovare un numero di una delle due classi tale, che la differenza fra esso ed il numero limite sia minore di un numero positivo ε arbitrariamente piccolo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha=(A, A')$. Poichè, per ipotesi, le classi A, A' sono contigue, è sempre possibile trovare un numero a di A ed uno a' di A' tali, che sia $a-a'<\varepsilon$. Ma è, per ipotesi, $a>\alpha>a'$; e quindi se è $a-a'<\varepsilon$, a fortiori sarà $a-\alpha<\varepsilon$, ed $\alpha-a'<\varepsilon$.

143. TEOREMA 2°. Se due coppie di classi contigue individuano due numeri disuguali, qualche elemento della classe maggiore della coppia che individua il numero minore, è minore di qualche elemento della classe minore dell'altra coppia.

Sia p.e. $\alpha=(A, A')$ *e* $\beta=(B, B')$; *e sia* $\alpha>\beta$. *Dico che qualche elemento* b_m *di* B *sarà minore di qualche elemento* a'_n *di* A'. *

A	……, ……, a_4, a_3, a_2, a_1, ……, ……	B	……, ……, b_7, b_6, b_5, b_4, b_3, b_2, b_1, b_m, ……, ……
	α		β
A'	……, ……, ……, a'_n, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6, a'_7, a'_8, ……, ……, ……	B'	……, ……, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, ……, ……

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\alpha=(A, A')$, per quanto piccola sia la differenza $\alpha-\beta$, è sempre possibile trovare un elemento a'_n di A' tale, che sia $\alpha-a'_n<\alpha-\beta$; da cui si ricava $a'_n>\beta$. **

Essendo $\beta=(B, B')$, per quanto piccola sia la differenza $a'_n-\beta$, è sempre possibile trovare un elemento b_m di B tale che sia $b_m-\beta<a'_n-\beta$, da cui si ricava $b_m<a'_n$. ***

COROLLARIO 1°. La condizione necessaria e sufficiente affinchè due numeri limiti $\alpha=(A, A')$ e $\beta=(B, B')$ siano eguali, è che ogni elemento di A sia maggiore di ogni elemento di B', e che ogni elemento di B sia maggiore di ogni elemento di A'.

DIMOSTRAZIONE. 1°. Questa condizione è *necessaria*, poichè, se essa non è soddisfatta, (teor. 1° § 141) α non può essere eguale a β. 2°. Essa è *sufficiente*; poichè se è soddisfatta, (pel teor. preced.) non può essere che α sia diverso da β; e quindi dovrà essere $\alpha=\beta$.

Dalla definizione di classi contigue, e dal preced. coroll. deriva immediatamente il seguente:

COROLLARIO 2°. Due classi contigue di numeri non cessano di es-

---

* In questa rappresentazione schematica dei numeri limiti, supporremo, per semplicità, che gli elementi vadano ordinatamente decrescendo dall'alto al basso; e che due elementi collocati sulla stessa orizzontale siano eguali.

** Da $\alpha-a'_n<\alpha-\beta$ si ricava $a'_n>\beta$, perchè, se da numeri eguali si ottengono resti disuguali, è segno che i sottraendi sono disuguali; ed è maggiore quel sottraendo che ha dato è resto minore; ossia $a'_n>\beta$.

*** Da $b_m-\beta<a'_n-\beta$ si ricava $b_m<a'_n$, perchè, essendo eguali i sottraendi, se il 1° resto è minore del 2°, deve essere il 1° minuendo minore del 2°; ossia $b_m<a'_n$.

sere contigue, nè di individuare il medesimo numero, anche se si introducono o si sopprimono nella classe maggiore quanti si voglia elementi, tutti superiori ad un elemento qualsiasi della classe stessa; e se si introducono o si sopprimono nella classe minore quanti si voglia elementi, tutti inferiori ad un elemento qualsiasi della classe stessa.

COROLLARIO 3°. Ogni numero limite positivo (o negativo) potrà essere individuato da classi contenenti solamente numeri positivi (o negativi).

Osservazione. Noi ci occuperemo solamente dei numeri limiti positivi individuati da classi formate con soli numeri positivi, lasciando al lettore la cura di estendere ai numeri limiti negativi quanto diremo dei positivi.

ADDIZIONE DEI NUMERI LIMITI.

144. TEOREMA. La somma di due numeri limiti è un numero limite, che ha per classe maggiore la somma delle classi maggiori, e per classe minore la somma delle classi minori dei numeri dati.

Sia $\alpha=(A,\ A')$ *e* $\beta=(B,\ B')$: *dico che* $\alpha+\beta$ *sarà il limite delle classi* $A+B$, *ed* $A'+B'$; *ossia che è* $\alpha+\beta=(A+B,\ \ A'+B')$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Le classi* $A+B$ *ed* $A'+B'$ *sono illimitate*, perchè sono illimitate le classi A, A', B, B'.

2°. *Ogni elemento di* $A+B$ *è maggiore di ogni elemento di* $A'+B'$, perchè ogni elemento di A è maggiore di ogni elemento di A', ed ogni elemento di B è maggiore di ogni elemento di B'.

3°. *Si può trovare un elemento* $a+b$ *di* $A+B$, *ed uno* $a'+b'$ *di* $A'+B'$ *tali che sia* $(a+b)-(a'+b')<\varepsilon$, *essendo* ε *un numero positivo arbitrariamente piccolo.* Infatti si ha evidentemente:

$$(a+b)-(a'+b')=a+b-a'-b'=a-a'+b-b'=(a-a')+(b-b').$$

Poichè A, A' sono classi contigue, si possono scegliere a, a' in modo che sia $a-a'<\frac{\varepsilon}{2}$; e poichè B, B' sono classi contigue, si possono scegliere b, b', in modo che sia $b-b'<\frac{\varepsilon}{2}$. Sostituendo allora nell'eguaglianza precedente $\frac{\varepsilon}{2}$ ad $a-a'$ ed a $b-b'$, si ha

$$(a+b)-(a'+b')<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ossia}\ (a+b)-(a'+b')<\varepsilon.$$

Ne segue che le classi $A+B$ ed $A'+B'$ sono contigue, epperciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue* $A+B$ *ed* $A'+B'$ *è* $\alpha+\beta$. *

Infatti, poichè per ipotesi α è minore di ogni elemento di A, e β è

* Per dimostrare che un numero è limite di due classi di numeri, basta (per la definiz. 6ª § 137) dimostrare che esso è minore di ogni elemento della classe maggiore, e maggiore di ogni elemento della classe minore.

minore di ogni elemento di B, sarà $\alpha+\beta$ minore di ogni elemento di $A+B$. Analogamente sarà $\alpha+\beta$ maggiore di ogni elemento di $A'+B'$. Dunque $\alpha+\beta=(A+B,\ \ A'+B')$.

Esempio.

	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	7,5		4,2		7,5+4,2	=11,7
	7,3		4		7,3+4	=11,3
A	7,04	B	3,3	$A+B$	7,04+3,3	=10,34
	7,005		3,07		7,005+3,07	=10,075
	7,001		3,02		7,001+3,02	=10,021
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	$\alpha=7$		$\beta=3$		$\alpha+\beta=7+3$	=10
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	6,999		2,979		6,999+2,979	=9,978
	6,98		2,85		6,98+2,85	=9,83
A'	6,9	B'	2,78	$A'+B'$	6,9+2,78	=9,68
	6		2,5		6+2,5	=8,5
	5,8		2		5,8+2	=7,8
	....		....		....	....
	....		....		....	.... *
	....		....		....	....

SOTTRAZIONE DEI NUMERI LIMITI.

145. TEOREMA. La differenza di due numeri limiti è un numero limite, che ha per classe maggiore la differenza fra la classe maggiore del minuendo e la classe minore del sottraendo, e per classe minore la differenza fra la classe minore del minuendo e la classe maggiore del sottraendo.

Sia $\alpha=(A,\ A')$ *e* $\beta=(B,\ B')$: *dico che* $\alpha-\beta$ *è il limite delle classi* $A-B'$ *e* $A'-B$; *ossia che è* $\alpha-\beta=(A-B',\ \ A'-B)$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Le classi* $A-B'$ *ed* $A'-B$ *sono illimitate*, perchè sono illimitate le classi A, A', B, B'.

2°. *Ogni elemento* $a-b'$ *di* $A-B'$ *è maggiore di ogni elemento* $a'-b$ *di* $A'-B$. Infatti: essendo a, a', b, b' rispettivamente elementi di A, A', B, B', poichè è $a>a'$, sarà $a-b'>a'-b'$; e poichè è $b>b'$, sarà $a'-b'>a'-b$. Da $a-b'>a'-b'$ e da $a'-b'>a'-b$, segue evidentemente $a-b'>a'-b$.

3°. *Si può trovare un elemento* $a-b'$ *di* $A-B'$ *ed uno* $a'-b$ *di* $A'-B$ *tali che sia* $(a-b')-(a'-b)<\varepsilon$, *essendo* ε *un numero positivo arbitrariamente piccolo*. Infatti si ha evidentemente:

$$(a-b')-(a'-b)=a-b'-a'+b=a-a'+b-b'=(a-a')+(b-b').$$

* Abbiamo eseguito solo alcune delle somme $a+b$ ed $a'+b'$, scegliendo quelle dei numeri che si trovano sopra una medesima orizzontale. Esaminando i risultati, si vede facilmente che, essendo $7=(A,\ A')$ e $3=(B,\ B')$, è $7+3=10=(A+B,\ A'+B')$.

Ora, poichè A, A' sono classi contigue, si possono scegliere a, a' in modo che sia $a-a'<\frac{\varepsilon}{2}$; e poichè B, B' sono classi contigue, si possono scegliere b, b', in modo che sia $b-b'<\frac{\varepsilon}{2}$. Sostituendo allora nell'eguaglianza precedente $\frac{\varepsilon}{2}$ ad $a-a'$ ed a $b-b'$, si ha:

$(a-b')-(a'-b)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$, ossia $(a-b')-(a'-b)<\varepsilon$.

Ne segue che le classi $A-B'$ ed $A'-B$ sono contigue, e perciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue* $(A-B',\ A'-B)$ *è il numero* $\alpha-\beta$. Infatti: Poichè è $a>\alpha$, sarà $a-b'>\alpha-b'$. Poichè è $\beta>b'$, sarà $\alpha-b'>\alpha-\beta$. Da $a-b'>\alpha-b'$ e da $\alpha-b'>\alpha-\beta$ segue evidentemente $a-b'>\alpha-\beta$; ossia ogni elemento di $A-B'$ è maggiore di $\alpha-\beta$. *

Poichè è $\alpha>a'$, sarà $\alpha-\beta>a'-\beta$. Poichè è $b>\beta$, sarà $a'-\beta>a'-b$. Da $\alpha-\beta>a'-\beta$ e da $a'-\beta>a'-b$ segue evidentemente $\alpha-\beta>a'-b$; ossia ogni elemento di $A'-B$ è minore di $\alpha-\beta$.

Dunque $\alpha-\beta$ è il limite delle classi contigue $(A-B',\ A'-B)$; ossia $\alpha-\beta=(A-B',\ A'-B)$.

Esempio.

	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	6,3		3,5		6,3—1	=5,3
	5,8		3,3		5,8—1,1	=4,7
A	5,4	B	2,5	$A-B'$	5,4—1,31	=4,09
	5,08		2,21		5,08—1,75	=3,33
	5,003		2,18		5,003—1,898	=3,105
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	$\alpha=5$		$\beta=2$		$\alpha-\beta=5-2$	=3
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	4,999		1,898		4,999—2,18	=2,819
	4,87		1,75		4,87—2,21	=2,66
A'	4,6	B'	1,31	$A'-B$	4,6—2,5	=2,1
	4		1,1		4—3,3	=0,7
	3,7		1		3,7—3,5	=0,2
	....		....		....	....
	....		....		....	.... **
	....		....		....	....

* Per ricordare come si dimostra che è $a-b'>\alpha-\beta$, si osservi che basta scrivere una terza differenza, la quale abbia per minuendo il minuendo di una delle due differenze date, ed abbia per sottraendo il sottraendo dell'altra. Si scrive questa differenza in mezzo alle due differenze $a-b'$, $\alpha-\beta$, e, dal confronto delle tre differenze, risulta immediatamente che è $a-b'>\alpha-\beta$.

Analogamente si opera per dimostrare che è $\alpha-\beta>a'-b$.

** Abbiamo eseguito solamente alcune delle sottrazioni $a-b'$ ed $a'-b$. Esami-

MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI LIMITI.

146. TEOREMA. Il prodotto di due numeri limiti è un numero limite che ha per classe maggiore il prodotto delle classi maggiori, e per classe minore il prodotto delle classi minori dei numeri dati.

Sia $\alpha=(A, A')$ *e* $\beta=(B, B')$: *dico che* $\alpha\beta$ *è il limite delle classi* AB *ed* $A'B'$, *ossia che è* $\alpha\beta=(AB, A'B')$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Le classi* AB *ed* $A'B'$ *sono illimitate,* perchè sono illimitate le classi A, A', B, B'.

2°. *Ogni elemento di* AB *è maggiore di ogni elemento di* $A'B'$, perchè ogni elemento di A è maggiore di ogni elemento di A', ed ogni elemento di B è maggiore di ogni elemento di B'.

3°. *Si può trovare un elemento* ab *di* AB, *ed uno* $a'b'$ *di* $A'B'$ *tali che sia* $ab-a'b'<\varepsilon$, *essendo* ε *un numero positivo arbitrariamente piccolo.*

Infatti: ad $ab-a'b'$ aggiungiamo $-a'b+a'b$, ed avremo:

$$ab-a'b'=ab-a'b+a'b-a'b'=(ab-a'b)+(a'b-a'b')=$$
$$=(a-a')b+(b-b')a'.$$

Scelto ad arbitrio un numero b_n della classe B, potremo (pel corollario 2° § 143) nella classe B sopprimere b_n ed ogni numero maggiore di b_n. Sarà allora b_n maggiore di ogni b. Inoltre è $\alpha>a'$; e quindi essendo $ab-a'b'=(a-a')b+(b-b')a'$, sarà

$$ab-a'b'<(a-a')b_n+(b-b')\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Poichè A, A' sono classi contigue, si possono scegliere a, a' in modo che sia $a-a'<\dfrac{\varepsilon}{2b_n}$; e poichè B, B' sono classi contigue, si possono scegliere b, b' in modo che sia $b-b'<\dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$.

Sostituendo questi valori di $a-a'$ e di $b-b'$ nella (1) si avrà:

$$ab-a'b'<\frac{\varepsilon}{2b_n}b_n+\frac{\varepsilon}{2\alpha}\alpha, \text{ ossia } ab-a'b'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ ossia } ab-a'b'<\varepsilon.$$

Ne segue che le classi AB ed $A'B'$ sono contigue, epperciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue* AB, $A'B'$ *è il numero* $\alpha\beta$. Infatti poichè α è minore di ogni elemento di A, e β è minore di ogni elemento di B, sarà $\alpha\beta$ minore di ogni elemento di AB. Similmente $\alpha\beta$ sarà maggiore di ogni elemento di $A'B'$.

Dunque le classi AB ed $A'B'$ sono contigue, ed individuano il numero $\alpha\beta$; ossia $\alpha\beta=(AB, A'B')$.

---

nando i risultati, si vede facilmente che, essendo $5=(A, A')$ e $2=(B, B')$, è
$$5-2=3=(A-B', \; A'-B).$$

Esempio.

	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	5,28		4,2		5,28 . 4,2	=22,176
	5,2		3,9		5,2 . 3,9	=20,28
A	4,73	B	3,5	AB	4,73 . 3,5	=16,555
	4,5		3,28		4,5 . 3,28	=14,76
	4,01		3,004		4,01 . 3,004	=12,04604
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	$\alpha=4$		$\beta=3$		$\alpha\beta=4.3$	$=12$
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	....		....		....	....
	3,97		2,99		3,97 . 2,99	=11,8703
	3,7		2,6		3,7 . 2,6	=9,62
A'	3,21	B'	2,28	$A'B'$	3,21 . 2,28	=7,3188
	3		1,7		3 . 1,7	=5,1
	2,8		1,5		2,8 . 1,5	=4,20
	....		....		....	....
	....		....		....	.... *
	....		....		....	....

POTENZA DEI NUMERI LIMITI. **

147. TEOREMA. La potenza ennesima (per n intero e positivo) di un numero limite è un numero limite che ha per classe maggiore la potenza ennesima della classe maggiore, e per classe minore la potenza ennesima della classe minore del numero dato.

Sia il numero $\alpha=(A,\ A')$; *dico che sarà* α^n *il limite delle classi* A^n *ed* A'^n; *ossia che sarà* $\alpha^n=(A^n,\ A'^n)$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Le classi* A^n, A'^n *sono illimitate,* perchè sono illimitate le classi A, A'.

2°. *Ogni elemento di* A^n *è maggiore di ogni elemento di* A'^n, perchè ogni elemento di A è maggiore di ogni elemento di A'.

3°. *Si può trovare un elemento* a^n *di* A^n, *ed uno* a'^n *di* A'^n *tali che sia* $a^n-a'^n<\varepsilon$, *essendo* ε *un numero positivo arbitrariamente piccolo.* Infatti se a è un elemento di A, ed a' un elemento di A' (per la osserv. § 80) si ha

$$a^n-a'^n=(a-a')(a^{n-1}+a'a^{n-2}+a'^2a^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a'^{n-1}).$$

Pel coroll. 2° § 143 possiamo sopprimere nella classe A un elemento arbitrario a_n, ed ogni altro elemento maggiore di a_n. Sarà allora a_n mag-

---

* Abbiamo eseguito solamente alcuni dei prodotti ab ed $a'b'$, scegliendo quelli dei numeri che si trovano sopra una medesima orizzontale. Esaminando i risultati, si vede facilmente che, essendo $4=(A,\ A')$ e $3=(B,\ B')$, è $4.3=12=(AB,\ A'B')$.

** Questo capitolo dovrebbe essere studiato dopo il capitolo *Alcuni teoremi sulle potenze.* L'abbiamo posto qui per ragioni di simmetria.

giore di ogni elemento di A e di ogni elemento di A'; e ponendo in $(a^{n-1}+a'a^{n-2}+a'^2a^{n-3}+\ldots\ldots+a'^{n-1})$, a_n al posto di a e di a', si avrà evidentemente

$a^n-a'^n<(a-a')(a_n{}^{n-1}+a_n{}^{n-1}+a_n{}^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n{}^{n-1})$; ossia *

$a^n-a'^n<(a-a').na_n{}^{n-1}$.

Poichè A ed A' sono classi contigue, è sempre possibile scegliere a ed a' in modo che sia $a-a'<\frac{\varepsilon}{na_n{}^{n-1}}$. Ponendo $\frac{\varepsilon}{na_n{}^{n-1}}$ al posto di $a-a'$ nella disuguaglianza precedente, si avrà a fortiori

$a^n-a'^n<\frac{\varepsilon}{na_n{}^{n-1}}.na_n{}^{n-1}$, ossia $a^n-a'^n<\varepsilon$.

Le classi A^n ed A'^n sono dunque contigue, epperciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue* (A^n, A'^n) *è il numero* α^n. Infatti: essendo α minore di ogni elemento di A, e maggiore di ogni elemento di A', sarà α^n minore di ogni elemento di A^n, e maggiore di ogni elemento di A'^n.

Dunque le classi A^n ed A'^n sono contigue, ed individuano il numero α^n; ossia $\alpha^n=(A^n, A'^n)$.

Esempio.

	....		....		....
	....		....		....
	....		....		....
	5,7		$5{,}7^2$	=	32,49
	5,5		$5{,}5^2$	=	30,25
A	5,3	A^2	$5{,}3^2$	=	28,09
	5,02		$5{,}02^2$	=	25,2004
	5,001		$5{,}001^2$	=	25,010001
	....		....		....
	....		....		....
	....		....		....
	$\alpha=5$		$\alpha^2=5^2$	=	25
	....		....		....
	....		....		....
	....		....		....
	4,997		$4{,}997^2$	=	24,970009
	4,91		$4{,}91^2$	=	24,1081
A'	4,8	A'^2	$4{,}8^2$	=	23,04
	4,2		$4{,}2^2$	=	17,64
	3,7		$3{,}7^2$	=	13,69
	....		....		....
	....		....		.... **

* Si osservi che il polinomio $a^{n-1}+a'a^{n-2}+a'^2a^{n-3}+a'^3a^{n-4}+\ldots\ldots\ldots+a'^{n-1}$ ha n termini; cioè un termine contenente a^{n-1}, un altro contenente a^{n-2}, un altro contenente a^{n-3}, ecc. fino ad uno contenente a, e poi l'ultimo (cioè a'^{n-1}) che non contiene più nessuna potenza di a.

** Esaminando i risultati, si scorge facilmente che, essendo $5=(A, A')$, è $5^2=25=(A^2, A'^2)$.

148. ***Osservazione.*** Si è visto che, essendo contigue le classi A, A', sono pure contigue le classi A^n, A'^n, (per n intero e positivo). Ci è comodo aver questo risultato espresso esplicitamente per mezzo del seguente teorema:

TEOREMA. Se due classi di numeri sono contigue, le loro potenze n^e (per n intero e positivo) sono pure classi contigue. *

DIVISIONE DEI NUMERI LIMITI.

149. TEOREMA. Il quoto di due numeri limiti è un numero limite che ha per classe maggiore il quoto della classe maggiore del dividendo per la classe minore del divisore, e per classe minore il quoto della classe minore del dividendo per la classe maggiore del divisore.

Sia $\alpha=(A, A')$ *e* $\beta=(B, B')$: *dico che* $\frac{\alpha}{\beta}$ *è il limite delle classi* $\frac{A}{B'}$ *ed* $\frac{A'}{B}$; *ossia che è* $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Le classi* $\frac{A}{B'}$ *ed* $\frac{A'}{B}$ *sono illimitate*, perchè sono illimitate le classi A, A', B, B'.

2°. *Ogni elemento* $\frac{a}{b'}$ *di* $\frac{A}{B'}$ *è maggiore di ogni elemento* $\frac{a'}{b}$ *di* $\frac{A'}{B}$. Infatti: essendo a, a', b, b', rispettivamente elementi di A, A', B, B', poichè è $a>a'$, sarà $\frac{a}{b'}>\frac{a'}{b'}$. Poichè è $b>b'$, sarà $\frac{a'}{b'}>\frac{a'}{b}$. Da $\frac{a}{b'}>\frac{a'}{b'}$ e da $\frac{a'}{b'}>\frac{a'}{b}$ segue evidentemente $\frac{a}{b'}>\frac{a'}{b}$. **

3°. *Si può trovare un elemento* $\frac{a}{b'}$ *di* $\frac{A}{B'}$, *ed uno* $\frac{a'}{b}$ *di* $\frac{A'}{B}$ *tali che sia* $\frac{a}{b'}-\frac{a'}{b}<\varepsilon$, *essendo* ε *un numero positivo arbitrariamente piccolo*. Infatti: si ha evidentemente $\frac{a}{b'}-\frac{a'}{b}=\frac{ab-a'b'}{bb'}$.

Ora (pel coroll. 2° § 143) nella classe B' possiamo sopprimere un certo elemento b'_n ed ogni altro elemento minore di b'_n. Allora, qualunque siano b e b', sarà $b'_n<b$ e $b'_n<b'$, per cui $b'^2_n<bb'$. Sarà allora $\frac{ab-a'b'}{bb'}<\frac{ab-a'b'}{b'^2_n}$; e quindi $\frac{a}{b'}-\frac{a'}{b}<\frac{ab-a'b'}{b'^2_n}$.

---

* È evidente il TEOREMA: *La potenza n^a (per n intero e negativo) di un numero limite è un numero limite che ha per classe maggiore la potenza n^a della classe minore, e per classe minore la potenza n^a della classe maggiore del numero dato.*

** Per ricordare come si dimostrano le disuguaglianze della parte 2ª e della parte 4ª di questo teorema, si tenga una via analoga a quella indicata nella nota * § 145.

Pel teor. § 146, 3°, si può scegliere a, a', b, b' in modo che $ab-a'b'$ sia arbitrariamente piccolo; ed in particolare, sia $ab-a'b'<\varepsilon b_n'^2$. Sostituendo allora $\varepsilon b_n'^2$ al posto di $ab-a'b'$, si avrà a fortiori
$\frac{a}{b'}-\frac{a'}{b}<\frac{\varepsilon b_n'^2}{b_n'^2}$, ossia $\frac{a}{b'}-\frac{a'}{b}<\varepsilon$.

Le classi $\frac{A}{B'}$, $\frac{A'}{B}$ sono dunque contigue, epperciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue* $\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$ *è il numero* $\frac{\alpha}{\beta}$.

Infatti: poichè per ipotesi è $\alpha<a$, sarà $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{a}{\beta}$; e poichè è $\beta>b'$, sarà $\frac{a}{\beta}<\frac{a}{b'}$. Da $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{a}{\beta}$ e da $\frac{a}{\beta}<\frac{a}{b'}$ segue $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{a}{b'}$.

Dunque $\frac{\alpha}{\beta}$ è minore di ogni elemento di $\frac{A}{B'}$.

Poichè per ipotesi è $\alpha>a'$, sarà $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{a'}{\beta}$; e poichè è per ipotesi $\beta<b$, sarà $\frac{a'}{\beta}>\frac{a'}{b}$. Da $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{a'}{\beta}$ e da $\frac{a'}{\beta}>\frac{a'}{b}$ segue $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{a'}{b}$.

Dunque $\frac{\alpha}{\beta}$ è maggiore di ogni elemento della classe $\frac{A'}{B}$.

Conchiuderemo dicendo che le classi $\frac{A}{B'}$, ed $\frac{A'}{B}$ sono contigue, e che individuano il numero $\frac{\alpha}{\beta}$; ossia che è $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$.

Esempio.

	A		B			
	....		....	$\frac{A}{B'}$	....	....	....
	6,9		2,85		6,9	: 1,21	= 5,702...
	6,7		2,7		6,7	: 1,43	= 4,685...
A	6,3	B	2,4	$\frac{A}{B'}$	6,3	: 1,6	= 3,937...
	6,05		2,01		6,05	: 1,91	= 3,167...
	6,001		2,0003		6,001	: 1,997	= 3,005...
	....		....		....	....	....
	$\alpha=6$		$\beta=2$		$\alpha:\beta=6:2$		$=3$
	....		....		....	....	....
	5,995		1,997		5,995	:2,0003	= 2,997...
	5,97		1,91		5,97	:2,01	= 2,970...
A'	5,8	B'	1,6	$\frac{A'}{B}$	5,8	:2,4	= 2,416...
	5,4		1,43		5,4	:2,7	= 2
	5,1		1,21		5,1	:2,85	= 1,789...
	....		....		....	....	.... *

* Abbiamo eseguito solo alcuni dei quoti $\frac{a}{b'}$ ed $\frac{a'}{b}$. Esaminando i risultati, si vede facilmente che, essendo $6=(A, A')$ e $2=(B, B')$, è $6:2=3=\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$.

ESTRAZIONE DI RADICE DEI NUMERI LIMITI.

150. LEMMA. Se a è un numero positivo, non potenza n^a esatta, (per n intero e positivo) è sempre possibile trovare due numeri tali che le loro potenze ennesime siano l'una minore di a e l'altra maggiore di a, e che differiscano da a per meno di ε, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo. *

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo le radici aritmetiche n^e di a approssimate a meno di $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \frac{1}{10^5}, \ldots\ldots$ per eccesso e per difetto **; e siano rispettivamente $\frac{x_1}{10}, \frac{x_2}{10^2}, \frac{x_3}{10^3}, \ldots\ldots$ quelle approssimate per difetto, ed $\frac{x_1+1}{10}, \frac{x_2+1}{10^2}, \frac{x_3+1}{10^3}, \frac{x_4+1}{10^4}, \frac{x_5+1}{10^5}, \ldots\ldots$ quelle approssimate per eccesso. Sia A la classe delle radici approssimate per eccesso, ed A' la classe delle radici approssimate per difetto; si avrà:

$$A=\left(\frac{x_1+1}{10}, \frac{x_2+1}{10^2}, \frac{x_3+1}{10^3}, \frac{x_4+1}{10^4}, \frac{x_5+1}{10^5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

$$A'=\left(\frac{x_1}{10}, \frac{x_2}{10^2}, \frac{x_3}{10^3}, \frac{x_4}{10^4}, \frac{x_5}{10^5}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

È facile vedere che le classi A ed A' sono contigue ***; e quindi

---

* Le potenze di cui ci occuperemo in questo capitolo saranno tutte *intere e positive*; e le radici, *radici aritmetiche*. Questo capitolo dovrebbe essere studiato dopo il capitolo *Radice con indice negativo*; lo abbiamo posto qui per ragioni di simmetria.

** Ciò è sempre possibile. Infatti, è facile trovare, per via di tentativi, due numeri interi consecutivi, p. e. 5 e 6, tali che sia $5^n<a<6^n$.

Fra i numeri 5 5,1 5,2 5,3 5,4 5,5 5,6 5,7 5,8 5,9 6, se ne troveranno (per tentativi) due consecutivi, p.e. 5,7 e 5,8, tali che sia $5{,}7^n<a<5{,}8^n$.

Similmente fra i numeri 5,70 5,71 5,72 5,73 5,74 5,75 5,76 5,77 5,78 5,79 5,80 se ne troveranno (per tentativi) due consecutivi, p.e. 5,73 e 5,74, tali che sia $5{,}73^n<a<5{,}74^n$.

Evidentemente i numeri 5 5,7 5,73........ sono le radici aritmetiche n^e di a rispettivamente a meno di una unità, di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{10^2}, \ldots\ldots\ldots$ per difetto; ed i numeri 6 5,8 5,74........ sono le radici aritmetiche n^e di a rispettivamente a meno di una unità, di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{10^2}, \ldots\ldots\ldots$ per eccesso. E se a non è potenza n^a esatta, si potrà continuare così finchè si desidera.

*** Infatti: 1°. *Sono illimitate*, perchè a, per ipotesi, non è potenza n^a esatta. 2°. *Ogni elemento di A* (essendo radice n^a di a per eccesso) *è maggiore di ogni elemento di A'*, (che è radice n^a di a per difetto). 3°. *La differenza fra un elemento di A ed uno di A' si può rendere minore di ε*. Ed invero la differenza fra un elemento di A, p.e. $\frac{x_m+1}{10^m}$ ed il corrispondente di A', cioè $\frac{x_m}{10^m}$, è $\frac{1}{10^m}$; e si può scegliere il numero intero e positivo m tanto grande che sia $\frac{1}{10^m}<\varepsilon$.

(teor. § 148) sono pure contigue le classi A^n ed A'^n; cioè le classi:

$$A^n = \left[\left(\frac{x_1+1}{10}\right)^n, \left(\frac{x_2+1}{10^2}\right)^n, \left(\frac{x_3+1}{10^3}\right)^n, \left(\frac{x_4+1}{10^4}\right)^n, \left(\frac{x_5+1}{10^5}\right)^n, \ldots\right]$$

$$A'^n = \left[\left(\frac{x_1}{10}\right)^n, \left(\frac{x_2}{10^2}\right)^n, \left(\frac{x_3}{10^3}\right)^n, \left(\frac{x_4}{10^4}\right)^n, \left(\frac{x_5}{10^5}\right)^n, \ldots\ldots\right]$$

Esisterà perciò un elemento $\left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^n$ di A^n ed uno $\left(\frac{x_n}{10^n}\right)^n$ di A'^n tali che sia $\left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^n - \left(\frac{x_n}{10^n}\right)^n < \varepsilon$. Ma, per ipotesi, $\frac{x_n+1}{10^n}$ è radice n^a di a per eccesso, ed $\frac{x_n}{10^n}$ è radice n^a di a per difetto, epperciò è $\left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^n > a > \left(\frac{x_n}{10^n}\right)^n$.

Essendo $\left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^n - \left(\frac{x_n}{10^n}\right)^n < \varepsilon$, i numeri $\left(\frac{x_n+1}{10^n}\right)^n$ e $\left(\frac{x_n}{10^n}\right)^n$ differiscono fra loro per meno di ε, e quindi a fortiori ciascuno di loro differirà da a per meno di ε.

I numeri $\frac{x_n+1}{10^n}$ ed $\frac{x_n}{10^n}$ soddisfano quindi alle condizioni imposte dall'enunciato del teorema. Dunque.....

151. TEOREMA. La radice aritmetica ennesima (per n intero e positivo) di un numero limite positivo, è un numero limite che ha per classe maggiore la radice ennesima della classe maggiore, e per classe minore la radice ennesima della classe minore del numero dato. *

Sia $\alpha = (A, A')$; *dico che sarà* $\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{A'})$.

Per ogni numero a *della classe* A, *prendiamo un numero positivo* b (Lemma preced.) *tale che sia* $b^n > a$, *e* $b^n - a < \frac{\varepsilon}{3}$, *ove* ε *è un numero positivo arbitrariamente piccolo.*

Similmente, per ogni numero a' *della classe* A', *prendiamo un numero positivo* b' *tale che sia* $a' > b'^n$, *ed* $a' - b'^n < \frac{\varepsilon}{3}$. *Sarà* b *la radice* n^a *di* a *per eccesso, e* b' *la radice* n^a *di* a' *per difetto: epperciò se indichiamo con* B *la classe dei numeri* b *così ottenuti, e con* B' *la classe dei numeri* b', *avremo* $B = \sqrt[n]{A}$, $B' = \sqrt[n]{A'}$.

Per dimostrare che è $\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{A'})$, *basterà dimostrare che è* $\sqrt[n]{\alpha} = (B, B')$.

* Non sempre esiste un numero intero o frazionario che sia radice n^a di un altro numero intero o frazionario dato. Per ora considereremo solo quei casi in cui una tal radice esiste.

Dimostrazione. 1°. *Le classi B, B' sono illimitate*, essendo illimitate le classi A ed A'.

2°. *Ogni elemento di B è maggiore di ogni elemento di B'.* Infatti: qualunque siano a, a', b, b' è sempre per ipotesi $b^n > a$, ed $a > a'$ ed $a' > b'^n$, da cui $b^n > b'^n$; e quindi (pel teor. 3° § 192) $b > b'$.

3°. *Si può scegliere un elemento b di B, ed uno b' di B' tali che sia* $b - b' < \varepsilon$. Infatti: abbiamo per costruzione $b^n - a < \frac{\varepsilon}{3}$, ed $a' - b'^n < \frac{\varepsilon}{3}$. Inoltre, essendo contigue le classi A ed A', potremo scegliere a ed a' in modo che sia $a - a' < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sommando membro a membro queste tre disuguaglianze, si avrà $(b^n - a) + (a' - b'^n) + (a - a') < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$, ossia $b^n - b'^n < \varepsilon$.

Per la osserv. § 80 si ha

$$(b^n - b'^n) = (b - b')(b^{n-1} + b'b^{n-2} + b'^2 b^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b'^{n-1}).$$

Dovendo il prodotto $b^n - b'^n$ essere arbitrariamente piccolo, dovrà essere arbitrariamente piccolo uno almeno dei fattori. Il 2° fattore, essendo somma di numeri positivi (perchè sono positivi b, b'), non può essere arbitrariamente piccolo qualunque sia il numero n. Dovrà dunque essere arbitrariamente piccolo l'altro fattore $b - b'$. Dunque sarà $b - b' < \varepsilon$.

Ne segue che le classi B, B' sono contigue, epperciò non possono individuare più di un sol numero.

4°. *Il limite delle classi contigue B, B' è $\sqrt[n]{\alpha}$.* Infatti si ha per ipotesi $b^n > a$; e quindi $b^n > \alpha$, da cui (coroll. § 192) $\sqrt[n]{b^n} > \sqrt[n]{\alpha}$, ossia $b > \sqrt[n]{\alpha}$. Similmente si ha $b'^n < \alpha$; da cui $\sqrt[n]{b'^n} < \sqrt[n]{\alpha}$, ossia $b' < \sqrt[n]{\alpha}$. Dunque $\sqrt[n]{\alpha}$ è minore di ogni b e maggiore di ogni b'; epperciò sarà $\sqrt[n]{\alpha} = (B, B')$; ossia $\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{A'})$.

I NUMERI E LE GRANDEZZE. *

152. Varie grandezze omogenee, considerate solamente in quanto sono grandezze, e prescindendo da ogni altra loro qualità, possono essere diverse l'una dall'altra; e, se ciò si verifica, si è perchè ciascuna possiede qualche carattere differenziale che la distingue da tutte le altre.

* Per maggiori indicazioni sopra questo argomento, il lettore potrà consultare con frutto la pregevolissima opera del prof. Rodolfo Bettazzi intitolata: *Teoria delle Grandezze* (Pisa–Spoerri 1890), premiata dalla R. Accademia dei Lincei.

DEFINIZIONE. L'*ente ideale* che rappresenta il carattere differenziale che distingue una grandezza da tutte le altre grandezze omogenee con essa, dicesi *numero*. *

Osservazione. Adopreremo anche il numero per rappresentare la grandezza stessa.

153. Esprimiamo le relazioni esistenti fra le grandezze omogenee ed i numeri che le rappresentano, per mezzo dei seguenti postulati.

POSTULATO 1°. Ogni grandezza ha sempre uno, ed un sol numero, che la rappresenta.

POSTULATO 2°. Grandezze eguali sono rappresentate da numeri eguali. *E viceversa:* **Numeri eguali rappresentano grandezze eguali.**

COROLLARIO. Grandezze disuguali sono rappresentate da numeri disuguali. *E viceversa:* **Numeri disuguali rappresentano grandezze disuguali.**

POSTULATO 3°. Se A, B sono due grandezze omogenee, ed a, b i numeri che le rappresentano, secondochè è $A \gtreqqless B$ sarà $a \gtreqqless b$.

COROLLARIO. Secondochè è $a \gtreqqless b$ sarà $A \gtreqqless B$.

POSTULATO 4°. Se A, B sono due grandezze omogenee, ed a, b i numeri che le rappresentano, la grandezza $A+B$ sarà rappresentata dal numero $a+b$.

COROLLARIO 1°. Il numero $a+b$ rappresenterà la grandezza $A+B$.

COROLLARIO 2°. La grandezza $A-B$ sarà rappresentata dal numero $a-b$. *E viceversa:* **Il numero $a-b$ rappresenterà la grandezza $A-B$.**

154. TEOREMA. Esistono numeri che non sono nè interi, nè frazionari.

DIMOSTRAZIONE. Sia A la classe dei numeri interi o frazionari i cui quadrati sono maggiori di 2, ed A' la classe dei numeri interi o frazionari i cui quadrati sono minori di 2. Evidentemente A, A' sono classi contigue; e non esiste nessun numero intero o frazionario che sia limite delle due classi. **

---

* Veniamo a conoscere questo carattere differenziale quando *misuriamo* le grandezze per mezzo dell'unità di misura. (Ammettiamo che si conosca il significato della parola *misurare*). Per *unità di misura* si può scegliere una grandezza arbitraria, purchè interamente nota, ed omogenea alle grandezze date. Supporremo sempre che l'unità di misura sia la medesima per tutte le grandezze omogenee date.

** Infatti: ragionando su 2 come si fece sul numero a nella nota *** del § 150, si trova che A ed A' sono classi contigue. Il limite delle classi A, A' (se esistesse) sarebbe un numero il cui quadrato è 2; e nessun numero intero o frazionario può esser tale.

Ed invero: il 2 non è evidentemente il quadrato di un numero intero. Inoltre esso non è neppure il quadrato di una frazione; poichè, se così fosse, vi sarebbe una fra-

Presa una certa lunghezza arbitraria come unità di misura, immaginiamo costruiti i segmenti rappresentati rispettivamente da ciascuno dei numeri delle classi A, A'. Otterremo così due classi S, S' di segmenti le quali saranno contigue. *

Ora ogni segmento di S è rappresentato da un numero di A, cioè da un numero il cui quadrato è maggiore di 2; ed ogni segmento di S' è rappresentato da un numero di A', cioè da un numero il cui quadrato è minore di 2; epperciò se esiste il limite delle classi S, S', esso sarà un segmento rappresentato da un numero il cui quadrato è eguale a 2.

Ora, si sa dalla Geometria che un tal segmento esiste, ed è la diagonale del quadrato costruito sull'unità lineare. Dunque (pel postul. 1° § 153) esisterà il numero che lo rappresenta. Esisterà perciò un numero il cui quadrato è 2; e, per le cose dette, questo numero non è nè intero nè frazionario. Esso poi è evidentemente il limite delle classi contigue A, A'.

Osservazione. A questo numero daremo il nome di **numero irrazionale**; e chiameremo **numeri razionali** i numeri interi ed i frazionari.

CONCETTO DI NUMERO IRRAZIONALE.

155. Il teor. preced. ci ha mostrato l'esistenza di classi contigue di numeri razionali le quali hanno per limite un numero che non è razionale. Estenderemo, *per convenzione*, questa conclusione a tutte quelle coppie di classi contigue di numeri razionali le quali sono prive di limite razionale; e stabiliremo il seguente postulato:

POSTULATO. Due classi contigue di numeri razionali ammettono sempre un limite ed uno solo. Se questo limite non è un numero razionale, diremo che è un *numero irrazionale*.

Avremo quindi la seguente definizione:

---

zione irreducibile $\frac{r}{s}$ (con $s>1$), la quale è eguale a $\sqrt{2}$. Ma se è $\frac{r}{s}=\sqrt{2}$, sarà $\left(\frac{r}{s}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$, ossia $\frac{r^2}{s^2}=2$. Ma se $\frac{r}{s}$ è irreducibile, con $s>1$, sarà pure (per noti teor. di Aritm.) irreducibile $\frac{r^2}{s^2}$ e con $s^2>1$; ed allora si avrebbe una frazione irreducibile eguale al numero intero 2, il che è assurdo.

* Infatti: 1°. Le classi S, S' sono illimitate, perchè tali sono A ed A'; 2°. Pel coroll. del postul. 3° § 153, ogni segmento di S è maggiore di ogni segmento di S'; 3°. Se s è un segmento di S, ed s' un segmento di S', ed a, a' i corrispondenti numeri di A, A', sarà $s-s'$ il segmento rappresentato dal numero $a-a'$. Poichè $a-a'$ può diventare minore di ogni numero positivo dato, il segmento $s-s'$ (pel coroll. del postul. 3° § 153) potrà diventare minore di ogni segmento dato.

Dunque S, S' sono contigue.

DEFINIZIONE. Chiamasi *numero irrazionale* il limite di due classi contigue di numeri razionali, le quali siano prive di limite razionale. *

Osservazione. Tutto ciò che si disse dei numeri limiti razionali, si può dire anche dei numeri limiti irrazionali; e per estendere le cose dette anche ai numeri limiti irrazionali, basterà fare la convenzione che, dicendo *numero limite,* si intenda dire *numero limite razionale od irrazionale.*

156. TEOREMA. La radice aritmetica ennesima (per n intero e positivo) di ogni numero positivo (sia esso razionale od irrazionale) esiste sempre ed è unica. Essa poi è un numero razionale od un numero irrazionale.

DIMOSTRAZIONE. Qualunque sia il numero positivo α, (pel teor. 2° § 139 e per la definiz. preced.) esso si può considerare come limite di due classi contigue A, A', ed avere $\alpha = (A, A')$. Pel teor. del § 151, le classi $\sqrt[n]{A}$ e $\sqrt[n]{A'}$ saranno contigue; e se hanno un limite, esso è $\sqrt[n]{\alpha}$. Ma, pel postulato del § 155, questo limite esiste sempre, ed è razionale od irrazionale; dunque $\sqrt[n]{\alpha}$ esiste sempre, ed è un numero razionale, od un numero irrazionale. Essa poi è unica, perchè due classi contigue di numeri non possono avere più di un sol limite.

157. Coll'estensione data al significato della parola *numero*, abbiamo ora tre specie di numeri, cioè:

1°. *Numeri che si possono concepire come somma di unità intere;* cioè i numeri interi, positivi o negativi.

2°. *Numeri che si possono concepire come somma di unità frazionarie;* cioè i numeri frazionari, positivi o negativi.

3°. *Numeri che si possono concepire come limiti di classi contigue di numeri;* cioè i numeri razionali e gli irrazionali, positivi o negativi.

Coi soli numeri interi positivi, le tre operazioni dirette (addizione, moltiplicazione ed elevazione a potenza) sono sempre possibili; e le quattro operazioni inverse (sottrazione, divisione, estrazione di radice ed estrazione di logaritmo) non sono sempre possibili. Estendendo il campo dei numeri mediante l'introduzione del *concetto di numero frazionario*, si è resa possibile in ogni caso la divisione dei numeri, siano essi interi o frazionari.

Estendendo maggiormente il campo dei numeri, mediante l'introduzione del *concetto di numero positivo e numero negativo*, si è resa possibile in ogni caso la sottrazione dei numeri interi o frazionari, positivi o negativi.

---

* La più antica teoria degli irrazionali pare sia dovuta a Pitagora, nato a Samo nel 569 av. Cr., e morto a Taranto verso il 500. Egli chiamò il numero razionale ῥητός = *esprimibile;* e l'irrazionale ἄλογος = *non esprimibile.*

Estendendo ancora di più il campo dei numeri, colla introduzione del *concetto di numero razionale e numero irrazionale*, si è resa possibile l'estrazione della radice aritmetica n^a (per n intero e positivo) di ogni numero positivo, sia esso razionale od irrazionale. *

CAPO TERZO.

Radicali

PRELIMINARI.

158. DEFINIZIONE 1ª. Dicesi *radice ennesima* di un numero, un altro numero la cui potenza ennesima è eguale al numero dato. **

La radice n^a di a si rappresenta con $\sqrt[n]{a}$ che si legge *radice ennesima di a*, oppure *radice indice n di a*. Se α è la radice n^{ma} di a, scriveremo $\alpha = \sqrt[n]{a}$. Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama *radicale;* il numero a, *radicando;* ed il numero n, *indice del radicale*. Il segno $\sqrt{}$ preso isolatamente si chiama *segno di radice*. ***

L'operazione mediante la quale dati a ed n si trova $\sqrt[n]{a}$, si chiama *estrazione di radice*.

---

* Il teor. preced. ha dimostrato l'esistenza di questa radice; vedremo in seguito come si fa per trovarne il valore.

** La parola *radice* è la traduzione letterale dell'indiano *mûla,* che significa *base della potenza*, ed anche *radice delle piante*. Le espressioni *radice quadrata*, *radice cubica*, sono la traduzione letterale delle espressioni indiane *varga mûla*, *ghana mûla*.

*** Il segno di radice quadrata fu introdotto, quasi contemporaneamente, dall'arabo Alkalsâdî, e dal frate Luca Paciolo, nato in Borgo S. Sepolcro (Toscana) nel 1445, e morto nel 1515. Ambedue usarono per segno di radice quadrata l'iniziale della parola *radice*; con questa differenza però che, mentre Alkalsâdî poneva quest'iniziale sopra il radicando, Luca Paciolo la poneva a sinistra del radicando. Paciolo scriveva R̥ʃ invece di scrivere la sola iniziale R, ed adoperò questo segno R̥ʃ nella sua opera pubblicata nel 1470. In seguito Nicola Chuquet adottò, nel suo libro edito nel 1484, il segno R̥ʃ per tutte le radici; e scrisse R̥ʃ¹, R̥ʃ², R̥ʃ³, R̥ʃ⁴, ecc. al posto di radice 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, ecc. Il matematico tedesco Rudolff (o Ludolff) stampò nel 1525 un trattato d'algebra in cui introdusse i segni $\surd$, $\surd\surd\surd$, $\surd\surd$, per indicare rispettivamente *radice quadrata*, *radice cubica*, *radice quarta*. I seguaci di Rudolff usarono per le radici quadrata e cubica, un solo segno $\surd$, scrivendovi a destra l'iniziale della parola *quadrato, cubo*. Così p.e. per indicare la radice cubica di $a+b$, scrivevano $\surd c$ L$a+b$⌋, od anche $\surd c\,(a+b)$ od anche $\surd c\,\overline{a+b}$. Poscia allungando il tratto orizzontale, si scrisse $\surd\overline{c\;a+b}$; infine si tolse anche l'iniziale delle parole quadrato, cubo, e si mise un numero nell'apertura del segno $\sqrt{}$.

§ 158

Osservazione 1ª. Poichè $\sqrt[n]{a}$ è un numero la cui potenza n^a è a, avremo per definizione $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Osservazione 2ª. Poichè si suole considerare *la potenza ad esponente uno* (V. nota * pag. 30), si suole anche considerare *il radicale di indice uno*, e si pone per definizione $\sqrt[1]{a} = a$.

Osservazione 3ª. È sottinteso che n è un numero intero, positivo. Se l'indice è 2, il radicale si suole chiamare *radicale quadrato* e la radice, *radice quadrata*. Se l'indice è 3, il radicale si suole chiamare *radicale cubico*, e la radice, *radice cubica.* *

DEFINIZIONE 2ª. Se esiste un numero intero o frazionario α tale che sia $\alpha^n = a$, il numero a si chiama *potenza n^a esatta di* α, ed α *radice ennesima esatta di a.*

159. TEOREMA. Se la radice n^a (per n intero e positivo) di un numero intero non è un numero intero, non è neppure una frazione.

Consideriamo un numero intero qualsiasi, p.e. 18. Dico che se $\sqrt[n]{18}$ (per n intero e positivo) non è un numero intero, non sarà neppure una frazione.

DIMOSTRAZIONE. Se $\sqrt[n]{18}$ fosse una frazione, p.e. $\frac{a}{b}$, (che possiamo sempre supporre irreducibile, con $b>1$), sarebbe $\sqrt[n]{18} = \frac{a}{b}$, e quindi $(\sqrt[n]{18})^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, ossia $18 = \frac{a^n}{b^n}$. Ma se $\frac{a}{b}$ è irreducibile, con $b>1$, anche $\frac{a^n}{b^n}$ sarà irreducibile, con $b^n>1$; ** ed allora si avrebbe una frazione irreducibile, con denominatore diverso da 1, la quale sarebbe eguale ad un numero intero, il che è assurdo. Dunque....... ***

---

* L'indice 2 si suole ommettere. Sarà perciò la medesima cosa scrivere $\sqrt[2]{a}$ o scrivere $\sqrt{a}$.

** Si è dimostrato in Aritmetica che qualunque potenza (intera e positiva) d'una frazione irreducibile, con denominatore diverso da 1, è ancora una frazione irreducibile, con denominatore diverso da 1.

*** Scriviamo la serie (α) dei numeri interi; e facciamo prima il quadrato e poi il cubo di ciascun numero della serie (α), ed otterremo le serie (β) e (γ).

(α)	1	2	3	4	5	6	7	8 ....
(β)	1	4	9	16	25	36	49	64 ....
(γ)	1	8	27	64	125	216	343	512 ....

Da queste serie si vede subito che ciascun numero della serie (α) è la radice quadrata o cubica del corrispondente numero della serie (β) o (γ); e quindi che la maggior parte dei numeri interi non ha per radice quadrata, nè per radice cubica, un numero intero. E potremo dire in generale che la maggior parte dei numeri interi non

160. Abbiamo visto (teor. § 156) che se a è positivo ed n è intero e positivo, esiste sempre una, ed una sola, radice aritmetica n^a di a. Volendo tener conto anche del segno del radicando e del segno della radice, distingueremo vari casi particolari. Ricordiamo intanto che (teor. 1° § 44) le potenze pari sono tutte positive, qualunque sia il segno della base.

Rappresentando con α il valore numerico della radice n^a di a, avremo:

1° CASO. Indice pari - Radicando positivo.

Se n è pari, si ha: $(+\alpha)^n = a$, e $(-\alpha)^n = a$. Dunque tanto $+\alpha$ come $-\alpha$ sono radici n^e di a. Ne segue:

TEOREMA 1°. Le radici d'indice pari dei numeri positivi hanno due valori eguali e di segno contrario.

2° CASO. Indice pari - Radicando negativo.

Non esiste alcun numero razionale od irrazionale la cui potenza n^a (per n pari) sia un numero negativo. Ne segue:

TEOREMA 2°. Le radici d'indice pari dei numeri negativi non esistono nè fra i numeri razionali, nè fra i numeri irrazionali. *

3° CASO. Indice dispari - Radicando positivo.

Il valore di α può essere positivo, ma non negativo; perchè (teor. 2° § 45) solamente un numero positivo, elevato ad una potenza dispari, può dare per risultato un numero positivo. Ne segue:

TEOREMA 3°. Le radici d'indice dispari dei numeri positivi hanno un solo valore, e questo è positivo.

4° CASO. Indice dispari - Radicando negativo.

Il valore di α può essere negativo, ma non positivo, perchè solamente un numero negativo elevato ad una potenza dispari può dare per risultato un numero negativo. Ne segue:

TEOREMA 4°. Le radici d'indice dispari dei numeri negativi hanno un solo valore, e questo è negativo.

161. DEFINIZIONI. 1ª. Un radicale si chiama *aritmetico* se il suo radicando è un numero aritmetico; si chiama *algebrico* se il suo radicando è un numero con segno.

2ª. Diremo che un monomio è *irrazionale* se contiene radicali; e chiameremo *coefficiente del radicale* il prodotto dei fattori razionali del monomio. **

Esempio. Sono irrazionali i monomi $7a\sqrt{2bc}$, $-{}^3/_4 a^3b\sqrt[n]{c}$, $2a^2\sqrt[3]{bc}$; e $7a$, $-{}^3/_4 a^3b$, $2a^2$ sono i coefficienti dei rispettivi radicali.

---

ha per radice aritmetica n^a un numero intero; epperciò ha per radice aritmetica n^a un numero irrazionale.

* Forse il primo che abbia enunciato esplicitamente questo teorema ed il teorema precedente fu il matematico indiano Bhâskara, nato nel 1114 dell'Era Volgare.

** Si osservi che dicendo che un monomio è *irrazionale*, si vuol dire solamente che contiene qualche radicale, ma non che è un numero irrazionale. Un monomio può

PRINCIPALI PROPRIETÀ DEI RADICALI ARITMETICI. *

162. La proprietà fondamentale dei radicali aritmetici è data dal seguente teorema:

TEOREMA 1°. Il valore di un radicale aritmetico non cambia se si moltiplica pel medesimo numero l'esponente del radicando e l'indice della radice.

Dimostrerò p.e. che $\sqrt[n]{a^m}$ *e* $\sqrt[nr]{a^{mr}}$ *sono eguali, dimostrando che, elevati entrambi alla potenza* nr^a, *danno risultati eguali.*

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 3° § 49 si ha $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nr} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^r =$

per definiz. di radice (osserv. 1ª § 158) $= (a^m)^r =$

pel teor. 5° § 48 $= a^{mr}$.

Per definiz. di radice si ha: $\left(\sqrt[nr]{a^{mr}}\right)^{nr} = a^{mr}$.

Dunque $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$.

Osservazione. Questa eguaglianza si può anche scrivere così: $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$; ed osservando che si passa dal 1° al 2° membro dividendo l'esponente e l'indice per r, il teor. preced. si può enunciare così:

TEOREMA. Il valore di un radicale aritmetico non varia se si divide l'esponente del radicando e l'indice della radice per un medesimo numero che li divida esattamente.

163. TEOREMA 2°. La radice aritmetica n^a **di un prodotto è eguale al prodotto delle radici aritmetiche** n^e **dei fattori.**

Dimostrerò p.e. che $\sqrt[n]{abcd}$ *e* $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{d}$ *sono eguali, dimostrando che, elevati alla potenza* n^a, *danno risultati eguali.*

---

essere irrazionale, e tuttavia rappresentare un numero razionale. ESEMPIO. $3\sqrt{25}$ è un monomio irrazionale, eppure si ha: $3\sqrt{25} = 3.5 = 15$.

* In questo capitolo ci occuperemo solo delle *radici il cui indice è un numero intero, positivo e diverso da zero; e sarà sottinteso che, se l'indice si moltiplica o si divide per un numero, questo numero sia intero, positivo e diverso da zero.* Inoltre ci occuperemo solamente di radicali aritmetici; epperciò potremo far uso dei due seguenti teoremi d'Aritmetica.

TEOREMA 1°. *Se* $a = b$, *sarà* $a^n = b^n$.

TEOREMA 2°. *Se* $a^n = b^n$, *sarà* $a = b$.

Ne segue che, per dimostrare che due radicali aritmetici sono eguali, basterà dimostrare che, elevati alla medesima potenza, danno risultati eguali.

Si osservi però che questi teoremi non sono più veri se si tiene conto anche del segno. Infatti dal sapere p.e. che è $(+3)^2 = (-3)^2$, non si può conchiudere che sia $+3 = -3$.

DIMOSTRAZIONE. Per definiz. si ha $\left(\sqrt[n]{abcd}\right)^n = abcd$.

Pel teor. 3° § 46 si ha:

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{d}\right)^n =$$

per definiz. (oss. 1ª § 158) $\qquad = abcd$.

Dunque $\sqrt[n]{abcd} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d}$.

Osservazione. Poichè la preced. eguaglianza si può anche scrivere $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdot\sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{abcd}$, il teor. preced. si può enunciare così:

TEOREMA. Il prodotto di più radicali aritmetici del medesimo indice è un radicale aritmetico del medesimo indice, avente per radicando il prodotto dei radicandi.

164. TEOREMA 3°. La radice aritmetica n^a di una frazione è una frazione che ha per numeratore la radice aritmetica n^a del numeratore, e per denominatore la radice aritmetica n^a del denominatore.

Dimostrerò p.e. che $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ *e* $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ *sono eguali, dimostrando che, elevati entrambi alla potenza n^a, danno risultati eguali.*

DIMOSTRAZIONE. Per definiz. si ha $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$.

Pel coroll. § 88, e per definiz. si ha $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$.

Dunque $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Osservazione. Questa eguaglianza si può anche scrivere $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$;

ed il teorema precedente si può anche enunciare così:

TEOREMA. Il quoto di due radicali aritmetici del medesimo indice è un radicale aritmetico del medesimo indice, avente per radicando il quoto del radicando del dividendo pel radicando del divisore.

165. DEFINIZ. Estrarre da a, successivamente, le radici aritmetiche m^a, n^a, p^a, q^a ecc. significa: Da a estrarre la radice aritmetica m^a, poi dal risultato estrarre la radice aritmetica n^a, poi dal nuovo risultato estrarre la radice aritmetica p^a, ecc. Si indica con $\sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}$.

166. TEOREMA 4°. La radice aritmetica m^a **della radice aritmetica** n^a **di un numero è eguale alla radice** mn^a **di quel numero.**

Dimostrerò p.e. che $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ *e* $\sqrt[mn]{a}$ *sono eguali, dimostrando che, elevati entrambi alla potenza* mn^a*, danno risultati eguali.*

DIMOSTRAZIONE. Pel coroll. 3° § 49 si ha:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n =$$

per definiz. di radice $= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

Per definiz. di radice $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a.$

Dunque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

Osservazione. La preced. eguaglianza si può anche scrivere così: $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$; ed il teor. preced. si può anche enunciare così:

TEOREMA. Per estrarre la radice aritmetica mn^a **di un numero, basta estrarre la radice aritmetica** m^a **della radice aritmetica** n^a **di quel numero.**

COROLLARIO 1°. Per estrarre da un numero successivamente parecchie radici aritmetiche, basta estrarre da quel numero una radice aritmetica unica, avente per indice il prodotto degli indici.

Dico che si avrà p.e. $\sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}} = \sqrt[qpnm]{a}.$

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. preced. si ha successivamente:

$$\sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}} = \sqrt[qp]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}} = \sqrt[qpn]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[qpnm]{a}.$$

Osservazione. L'eguaglianza ora dimostrata si può anche scrivere così: $\sqrt[qpnm]{a} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}$; ed il coroll. preced. si può anche enunciare così:

TEOREMA. Per estrarre da un numero una radice aritmetica il cui indice sia un prodotto di più fattori, basta estrarre dal numero, successivamente, le radici aritmetiche aventi per indice i singoli fattori del prodotto.

COROLLARIO 2°. Dovendo estrarre successivamente da un numero varie radici aritmetiche, è indifferente l'ordine con cui si estraggono le radici *(Legge Commutativa).*

Dico che si ha p.e. $\sqrt[s]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}=\sqrt[n]{\sqrt[s]{\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}}}}$.

Dimostrazione. Pel coroll. 1° si ha:

$$\sqrt[s]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}=\sqrt[srnm]{a}\;;\ \text{e}\ \sqrt[n]{\sqrt[s]{\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}}}}=\sqrt[nsmr]{a}.$$

E poichè è $srnm=nsmr$, sarà:

$$\sqrt[srnm]{a}=\sqrt[nsmr]{a}\;;\ \text{e quindi}\ \sqrt[s]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}}=\sqrt[n]{\sqrt[s]{\sqrt[m]{\sqrt[r]{a}}}}.$$

Da questi due corollari deriva immediatamente il seguente:

COROLLARIO 3°. Per estrarre da un numero una radice aritmetica il cui indice sia un prodotto di vari fattori, basta estrarre dal numero successivamente le radici aritmetiche che hanno per indice i singoli fattori, presi in un ordine qualsiasi.

167. TEOREMA 5°. La potenza m^a della radice aritmetica n^a di un numero è eguale alla radice aritmetica n^a della potenza m^a del medesimo numero. *

Dico che sarà p.e. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Dimostr. Per defin. è $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\ldots\ldots\ (m\ \text{volte})=$

e pel teor. § 163, osservaz. $=\sqrt[n]{aaa\ldots(m\ \text{volte})}=\sqrt[n]{a^m}$.

Applicazioni

RIDUZIONE D'UNA ESPRESSIONE RAZIONALE SOTTO FORMA DI RADICALE ARITMETICO.

168. Ridurre un'espressione razionale sotto forma di radicale aritmetico, significa trovare un radicale aritmetico eguale all'espressione razionale data.

* Questo teorema si suole anche enunciare così:

Teorema. *Dovendo eseguire su di un numero successivamente un' estrazione di radice aritmetica ed un innalzamento a potenza, è indifferente fare prima l'una o l'altra delle due operazioni.* Od anche più brevemente:

Teorema. *Per elevare un radicale aritmetico ad una potenza, basta elevare a quella potenza il radicando.*

Un' espressione razionale a si può sempre mettere sotto forma di radicale aritmetico avente un dato indice m. Infatti si ha per definizione (oss. 2ª § 158), e pel teor. 1° § 162 $a = \sqrt[1]{a^1} = \sqrt[1.m]{a^{1.m}} = \sqrt[m]{a^m}$.

Ciò si suole esprimere brevemente così:

REGOLA. ***Un' espressione razionale si può mettere sotto il segno di radice elevandola alla potenza indicata dall'indice della radice.***

RIDUZIONE DI UN RADICALE ARITMETICO SOTTO FORMA DI ESPRESSIONE RAZIONALE.

169. Ridurre un radicale aritmetico sotto forma di espressione razionale, significa trovare un'espressione razionale eguale al radicale aritmetico dato.

Per la osserv. del § 162, e per la defin. del § 158 (osserv. 2ª) si avrà p.e. $\sqrt[n]{a^{mn}} = \sqrt[n:n]{a^{mn:n}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$.

Ciò si suole esprimere concisamente così:

REGOLA. ***In un radicale aritmetico si può sopprimere il segno di radice, e dividere l'esponente del radicando per l'indice della radice.*** *

INTRODUZIONE DI UN FATTORE SOTTO IL SEGNO DI RADICE.

170. Introdurre un fattore sotto il segno di radice significa: Data un'espressione algebrica contenente un fattore fuori del segno di radice, trovarne un'altra eguale alla data, ed in cui quel fattore compaia non più fuori, ma sotto il segno di radice.

Esempio. *In* $a\sqrt[m]{b^3}$ *si voglia portare* a *sotto il segno di radice.*

Poichè per la defin. di radice (osserv. 1ª § 158) $a = \sqrt[m]{a^n}$, avremo $a\sqrt[m]{b^3} = \sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b^3}$; e quindi pel teorema del § 163, $\sqrt[m]{a^m} \cdot \sqrt[m]{b^3} = \sqrt[m]{a^m b^3}$. Dunque $a\sqrt[m]{b^3} = \sqrt[m]{a^m b^3}$.

Ciò si suole esprimere concisamente così:

REGOLA. ***Si può portare un fattore sotto il segno di radice, elevandolo alla potenza indicata dall'indice della radice.***

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DEL SEGNO DI RADICE.

171. Trasportare un fattore fuori del segno di radice significa: Data un'espressione algebrica contenente un fattore sotto il segno di

---

* Evidentemente ciò è possibile solo quando l'esponente del radicando è divisibile per l'indice della radice.

radice, trovarne un'altra eguale alla data, ed in cui il fattore considerato non compaia più sotto, ma fuori del segno di radice.

Esempio. *In* $\sqrt[m]{a^{mn}b^3}$ *si voglia portare a fuori del segno di radice.*

Pei teor. dei §§ 163, 162, e per la definiz. del § 158 (osserv. 2ª), si avrà successivamente:

$$\sqrt[m]{a^{mn}b^3} = \sqrt[m]{a^{mn}} \cdot \sqrt[m]{b^3} = \sqrt[m:m]{a^{mn:m}} \cdot \sqrt[m]{b^3} = \sqrt[1]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^3} = a^n\sqrt[m]{b^3}.$$

Ciò si suole esprimere concisamente così:

REGOLA. ***Si può portare un fattore fuori del segno di radice, dividendone l'esponente per l'indice della radice.*** *

ESTRAZIONE DELLA RADICE ARITMETICA n^a DEI MONOMI.

172. Dalla regola del § 52 si ricava che, se un monomio è potenza n^a esatta di un altro monomio, deve avere per coefficiente una potenza n^a esatta, ed i fattori letterali devono avere per esponenti dei multipli di n. Pel teor. 2° § 168, e per la regola del § 169, un tale monomio è trasformabile in un'espressione razionale.

Esempio. $\sqrt[3]{27a^3b^9c^6} = \sqrt[3]{3^3a^3b^9c^6} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^9} \cdot \sqrt[3]{c^6} = 3ab^3c^2$; ove si vede che $3ab^3c^2$ è appunto la radice terza aritmetica di $27a^3b^9c^6$. Ne segue la regola:

REGOLA. ***Per estrarre la radice aritmetica n^a da un monomio che sia potenza n^a esatta, basta scrivere un nuovo monomio che abbia per coefficiente la radice aritmetica n^a del coefficiente, ed abbia i fattori letterali del monomio dato, coi rispettivi esponenti divisi per n.***

Osservazione. Se il monomio dato non è potenza n^a esatta di un altro monomio, non esiste un monomio razionale, la cui potenza n^a sia eguale al monomio dato. In tal caso si portano fuori del segno di radice i fattori che si possono portare fuori, e si lasciano gli altri sotto il segno di radice.

Esempio. $\sqrt[3]{27a^5b^3c^6} = \sqrt[3]{3^3a^{3+2}b^3c^6} = \sqrt[3]{3^3a^3a^2b^3c^6} = 3abc^2\sqrt[3]{a^2}.$

RIDUZIONE DI UN RADICALE ARITMETICO AL MINIMO INDICE.

173. Ridurre un radicale aritmetico al minimo indice significa trovare un radicale aritmetico eguale al dato, e tale che l'esponente del radicando e l'indice della radice siano numeri primi fra loro.

* Evidentemente questa operazione non è sempre possibile.

Se l'esponente del radicando e l'indice della radice hanno qualche divisore comune, si potranno (teorema § 162) dividere entrambi pel loro *M.C.D.*; ed il radicale ottenuto sarà il radicale cercato.

Esempio. *Si riduca al minimo indice* $\sqrt[15]{a^{10}}$.

Si avrà: $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[15:5]{a^{10:5}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Ciò si suole esprimere concisamente così:

REGOLA. Per ridurre un radicale aritmetico al minimo indice basta dividere l'esponente di ciascun fattore del radicando e l'indice della radice pel loro M.C.D. *

DEFINIZIONE. Un radicale aritmetico si dice *irreducibile*, se è ridotto al minimo indice, e se si sono portati fuori di radicale tutti i fattori che vi si potevano portar fuori.

RIDUZIONE DEI RADICALI ARITMETICI AL MEDESIMO INDICE.

174. TEOREMA. Se dati più radicali aritmetici si moltiplica in ciascuno l'esponente del radicando e l'indice della radice pel prodotto degli indici degli altri radicali, si ottengono altri radicali eguali rispettivamente ai radicali dati, ed aventi tutti il medesimo indice.

Si abbiano p.e. i radicali aritmetici $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[5]{c}$; *dico che essi saranno rispettivamente eguali a* $\sqrt[2.3.5]{a^{3\cdot3\cdot5}}$, $\sqrt[3.2.5]{b^{2\cdot2\cdot5}}$, $\sqrt[5.2.3]{c^{1\cdot2\cdot3}}$, *ossia a* $\sqrt[30]{a^{45}}$, $\sqrt[30]{b^{20}}$, $\sqrt[30]{c^6}$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Sono equivalenti rispettivamente ai radicali dati*, perchè si ottengono da questi moltiplicando pel medesimo numero l'esponente del radicando e l'indice della radice.

2°. *Hanno il medesimo indice*, che è, per costruzione, il prodotto degli indici dei radicali dati.

Osservazione. Questa operazione si chiama *riduzione dei radicali aritmetici al medesimo indice;* e l'enunciato del teorema può servire di regola. **

---

* Si suppone, come è d'ordinario, che il radicando sia un prodotto; in caso contrario basta dire: *si divide l'esponente del radicando e l'indice della radice, ecc.*

** Dal teor. del § 162 si ricava che il valore di un radicale aritmetico, rispetto all'esponente del radicando ed all'indice della radice, gode della medesima proprietà fondamentale di cui gode il valore d'una frazione rispetto al numeratore ed al denominatore; ed è facile vedere che l'enunciato del teor. preced. non è che l'enunciato della regola della riduzione di più frazioni al medesimo denominatore, in cui si è cambiata la parola *numeratore* in *esponente*, e la parola *denominatore* in *indice*.

Inoltre è facile vedere che, affinchè sia $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[s]{a^r}$, è necessario e sufficiente che sia

Con dimostrazione analoga a quella con cui in Aritmetica si dimostra la regola per ridurre più frazioni al minimo comun denominatore, si può dimostrare la seguente regola:

REGOLA. ***Per ridurre più radicali aritmetici al minimo indice comune, si rende prima irreducibile ciascun radicale; poi si trova il m.c.m. dei vari indici, il quale sarà l'indice comune; infine si moltiplica l'esponente di ciascun radicando pel quoto che si ottiene dividendo l'indice comune per l'indice corrispondente.***

OPERAZIONI CON RADICALI ARITMETICI.

Addizione e sottrazione.

175. Più radicali aritmetici irreducibili si dicono *simili* se sono eguali, oppure se differiscono solamente per il coefficiente. *

È evidente la seguente regola:

REGOLA. ***La somma algebrica di più radicali aritmetici simili è un radicale aritmetico simile ai radicali dati, ed avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei radicali dati.***

Esempio. $3\sqrt{2a}-\sqrt{2a}+5\sqrt{2a}=(3-1+5)\sqrt{2a}=7\sqrt{2a}$.

Osservazione. Dalla regola si ricava che *la somma algebrica di più radicali aritmetici irreducibili è ancora un radicale aritmetico irreducibile, epperciò non può essere un'espressione razionale.*

Moltiplicazione.

176. Il teorema del § 163 ci dà la seguente regola:

REGOLA. ***Il prodotto di più radicali aritmetici del medesimo indice è un radicale aritmetico del medesimo indice, avente per radicando il prodotto dei radicandi. *****

Esempio 1°. $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3bc}=\sqrt{ab.2a.3bc}=\sqrt{6a^2b^2c}=ab\sqrt{6c}$.

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{ns}=\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^{ns}$, ossia $\left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^s=\left[\left(\sqrt[s]{a^r}\right)^s\right]^n$, ossia $a^{ms}=a^{rn}$, ossia $ms=rn$, ossia $\frac{ms}{ns}=\frac{rn}{ns}$, ossia $\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$. E quindi per determinare il valore del radicale $\sqrt[n]{a^m}$, non è necessario dare a, m, n, ma basta dare a ed il rapporto $\frac{m}{n}$.

* Ne segue che, affinchè più radicali aritmetici irreducibili siano simili, devono avere egual radicando ed egual indice. Per decidere se più radicali non irreducibili sono simili, bisogna prima renderli irreducibili.

Esempio. I radicali aritmetici $\sqrt{12a^3b}$, $\sqrt{3abc^2}$, $\sqrt{27a^3b^3d^4}$ non paiono simili; ma, rendendoli irreducibili, si ottiene: $\sqrt{12a^3b}=\sqrt{2^2.3.a^2.ab}=2a\sqrt{3ab}$; parimenti $\sqrt{3abc^2}=c\sqrt{3ab}$; e $\sqrt{27a^3b^3d^4}=\sqrt{3.3^2.a^2b^2.d^4.ab}=3abd^2\sqrt{3ab}$. I tre radicali $2a\sqrt{3ab}$, $c\sqrt{3ab}$, $3abd^2\sqrt{3ab}$ così ottenuti sono evidentemente simili.

** Se i radicali dati hanno indice diverso, si riducono prima al medesimo indice.

Esempio 2°. $3\sqrt[3]{4a^2} \cdot {}^1/_2\sqrt[3]{2a} = 3 \cdot {}^1/_2\sqrt[3]{4a^2 . 2a} = {}^3/_2\sqrt[3]{8a^3} = {}^3/_2 \cdot 2a = 3a.$

Osservazione. Dall'esempio 2° si vede che *il prodotto di due radicali aritmetici irreducibili può essere un'espressione razionale.*

Divisione.

177. Ricordando che la frazione $^a/_b$ è il quoto $a{:}b$, il teorema del § 164 ci dà la seguente regola:

REGOLA. Il quoto di due radicali aritmetici del medesimo indice è un radicale aritmetico del medesimo indice, avente per radicando il quoto del radicando del dividendo pel radicando del divisore. *

Esempio 1°. $8\sqrt[3]{6a^2b} : 2\sqrt[3]{3a} = \frac{8}{2}\sqrt[3]{\frac{6a^2b}{3a}} = 4\sqrt[3]{2ab}.$

Esempio 2°. $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3.$

Osservazione. Dall'esempio 2° si vede che *il quoto di due radicali aritmetici irreducibili può essere un'espressione razionale.*

Potenza.

178. Dal teor. 5° § 167 si ricava immediatamente la regola:

REGOLA. La potenza m^a (per m intero e positivo) di un radicale aritmetico è un radicale aritmetico del medesimo indice, avente per radicando la potenza m^a del radicando.

Esempio 1°. $\left(\sqrt[15]{a^2b^3}\right)^2 = \sqrt[15]{(a^2b^3)^2} = \sqrt[15]{a^4b^6}.$

Esempio 2°. $\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^6 = \sqrt[3]{(ab^2)^6}.$ Riducendo al minimo indice questo radicale si ha $\sqrt[3:3]{(ab^2)^{6:3}} = \sqrt[1]{(ab^2)^2} = \sqrt[1]{a^2b^4} = a^2b^4.$

Osservazione. Dall'esempio 2° si vede che *la potenza m^a di un radicale aritmetico irreducibile può essere un'espressione razionale.*

Radice.

179. Dal coroll. 1° § 166 si ricava immediatamente la regola:

REGOLA. La radice aritmetica m^a (per m intero e positivo) di un radicale aritmetico è un radicale aritmetico avente per radicando il medesimo radicando, e, per indice, il prodotto di m per l'indice del radicale dato.

Esempio. Si avrà: $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^2b^2c}} = \sqrt[6]{a^2b^2c}.$

---

* Se i radicali dati hanno indice diverso, si riducono prima al medesimo indice.

Osservazione. *La radice aritmetica m^a (per m intero e positivo) di un radicale aritmetico irreducibile non può mai essere un'espressione razionale.* Sia p.e. $\sqrt[n]{a^r}$ (per n, r interi positivi) un radicale irreducibile: dico che $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}}=\sqrt[mn]{a^r}$ è irrazionale. Infatti: se fosse razionale, (pel § 169) r dovrebbe essere divisibile per mn; ma essendo $\sqrt[n]{a^r}$ irreducibile, r non è divisibile per n, epperciò tanto meno sarà divisibile per mn. Dunque $\sqrt[mn]{a^r}$ è irrazionale.

RICERCA DEI FATTORI PER CUI BISOGNA MOLTIPLICARE UNA DATA ESPRESSIONE CONTENENTE RADICALI ARITMETICI PER OTTENERE PER PRODOTTO UN'ESPRESSIONE RAZIONALE.

180. Esamineremo solamente alcuni casi più semplici.

1° CASO. L'espressione data è un monomio. Si abbia p.e. il radicale aritmetico $\sqrt[n]{a}$, ove n è un numero intero positivo. Poichè per definizione $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, basterà fare il prodotto di n fattori eguali a $\sqrt[n]{a}$, ossia $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots$ *(n volte)*, ossia $\sqrt[n]{a}\cdot\left[\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\right.$ *(n-1 volta)*$\left.\right]$. Ma $\left[\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\right.$*(n-1 volta)*$\left.\right]=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$. Dunque basterà eseguire il prodotto $\sqrt[n]{a}\cdot\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$. Ne segue la regola:

REGOLA. Per ottenere da $\sqrt[n]{a}$ un prodotto razionale, basta moltiplicare $\sqrt[n]{a}$ per $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}$.

Esempio. Sia dato $\sqrt[5]{3a^2}$. Poichè $n=5$, sarà $n-1=4$. Basta quindi moltiplicare $\sqrt[5]{3a^2}$ per $\left(\sqrt[5]{3a^2}\right)^4$; e si ha $\sqrt[5]{3a^2}\cdot\left(\sqrt[5]{3a^2}\right)^4=\left(\sqrt[5]{3a^2}\right)^5=3a^2$.

2° CASO. L'espressione data è un binomio i cui radicali sono tutti radicali aritmetici quadrati. Sia p.e. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Pel teor. 1° § 58, basterà moltiplicare $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, ed otterremo:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$$

Osservazione. Se si avesse $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, basterebbe moltiplicare per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Si opera analogamente se uno dei monomi è razionale.

REGOLA. Per ottenere da $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ un prodotto razionale, basta moltiplicare $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ per $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

3° CASO. L'espressione è un trinomio i cui radicali sono tutti radicali aritmetici quadrati. Si opera come è indicato nella seguente regola:

REGOLA. 1°. Si mette il trinomio dato sotto forma di binomio; poi, operando come nel secondo caso, si ottiene un'espressione che conterrà un solo radicale quadrato.

2°. Si mette questa espressione sotto forma di binomio chiudendo in una parentesi tutti i termini razionali; e sul binomio ottenuto si opera come nel caso precedente.

Esempio. Sia dato $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

Si ha $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$.

Moltiplicando $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ per $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$ si ottiene:

$$[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}][(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=$$
$$=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2=a+2\sqrt{ab}+b-c=$$
$$=(a+b-c)+2\sqrt{ab}.$$

Moltiplichiamo ora questo risultato per $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$, ed otteniamo:

$$[(a+b-c)+2\sqrt{ab}][(a+b-c)-2\sqrt{ab}]=(a+b-c)^2-(2\sqrt{ab})^2=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc-4ab=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc.$$

Osservazione. Si opera analogamente se un termine del trinomio è razionale. Se vi sono due termini razionali, si opera sul trinomio dato come si operò sopra $a+2\sqrt{ab}+b-c$ dell'esempio precedente.

4° CASO. L'espressione data è un quadrinomio i cui radicali sono tutti radicali quadrati.

REGOLA. Si mette il quadrinomio sotto forma di binomio, ciascun termine del quale contenga due termini del quadrinomio; e sul binomio così ottenuto si opera come nel 3° caso.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE CON DENOMINATORE CONTENENTE RADICALI ARITMETICI IN UN'ALTRA CON DENOMINATORE RAZIONALE.

181. Poichè il valore di una frazione non cambia moltiplicandone ambi i termini pel medesimo numero diverso da zero, basterà moltiplicare i due termini della frazione data per una espressione diversa da zero, e tale che il prodotto di questa espressione pel denominatore sia un' espressione razionale. *

* Questo metodo per rendere razionale il denominatore d'una frazione si trova già in Bhâskara, matematico indiano nato nel 1114.

Esempio 1°. Sia data la frazione $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$. Avremo:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}}=\frac{5\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\sqrt[3]{4}\cdot\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt[3]{4^2}}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}=\frac{5\sqrt[3]{16}}{4}.$$

Esempio 2°. Sia data la frazione $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$. Avremo:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{3}.\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-2}=\frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-1}=$$

$$=-2-\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

Osservazione. Dall'esempio 2° si vede che talvolta il risultato della riduzione è un' espressione intera.

CAPO QUARTO.

Potenze

PRELIMINARI.

182. Le principali proprietà delle potenze furono dimostrate nei §§ 46, 88, 47, 48, 70, e si riassumono nelle seguenti formole:

$$(abcd)^m=a^mb^mc^md^m \quad\dots\dots(1)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m} \quad\dots\dots(2)$$

$$a^m.a^n=a^{m+n} \quad\dots\dots(3)$$

$$(a^m)^n=a^{mn} \quad\dots\dots(4)$$

$$a^m:a^n=a^{m-n} \quad\dots\dots(5)$$

Giova però ricordare che queste formole furono dimostrate supponendo che ogni esponente sia un numero *intero, positivo, maggiore di 1.*

Uno dei principî fondamentali dell'algebra è che le proprietà fondamentali delle diverse operazioni devono sussistere qualunque sia il valore numerico rappresentato dalle lettere. * Noi quindi estenderemo la definizione di potenza in modo che le cinque eguaglianze precedenti sussistano per qualsiasi valore dell'esponente.

* Questo principio fu detto dall' Hankel *principio di permanenza delle leggi formali;* e lo Schuberth propose di chiamarlo *principio dell' esclusione delle eccezioni.*

POTENZA AD ESPONENTE UNO.

183. Cominciamo a togliere la restrizione che ogni esponente debba essere *maggiore di 1*.

Supponiamo, a tal fine, di dover dividere a^4 per a^3. * In questo caso è $m=4$, $n=3$, ed $m-n=1$. Se proviamo ad applicare la formola (5) del § 182, otteniamo $a^4:a^3=a^{4-3}=a^1$. La scrittura a^1, secondo la definizione di potenza (§ 43), dovrebbe significare *un prodotto di un solo fattore*; il che non ha senso. Dunque la (5) non è valida quando è $m-n=1$.

La scrittura a^1 è una combinazione di segni che compare per la prima volta, e non ha ancora ricevuto nessun significato. Essa si può paragonare ad un *vocabolo nuovo* non ancora usato in una data lingua. Vi potremo quindi dare un significato arbitrario, purchè non assurdo in se stesso, nè in contraddizione con ciò che si è precedentemente stabilito. Ora noi *vogliamo* dare ad a^1 un significato tale che ci permetta far uso della (5) anche nel caso di $m-n=1$.

Se eseguiamo la divisione nel modo ordinario, otteniamo: $a^4:a^3=(aaaa):(aaa)=a$. *Dunque il vero quoto di a^4 per a^3 è a.* Abbiamo visto che la formola (5) darebbe per quoto $a^{4-3}=a^1$; *epperciò* se *vogliamo*, anche in questo caso, poter far uso della (5), *dobbiamo porre per definizione $a^1=a$.*

Analogamente potremo considerare p.e. 7^1 come il quoto di 7^5 per 7^4, perchè $7^5:7^4=(7.7.7.7.7):(7.7.7.7)=7$; così pure potremo considerare p.e. 15^1 come il quoto di 15^3 per 15^2; ecc.

Diremo che a^1 *è la prima potenza di* a, e stabiliremo in generale:

DEFINIZIONE. La prima potenza di un numero è il numero stesso.

POTENZA AD ESPONENTE ZERO. **

184. Togliamo la restrizione che ogni esponente debba essere *diverso da zero*.

Supponiamo, a tal fine, di dover dividere a^m per a^n nel caso particolare in cui sia $m=n$. Se proviamo ad applicare anche in questo caso la formola (5) del § 182, otteniamo: $a^m:a^n=a^{m-n}=a^0$.

La scrittura a^0 non ha ancora senso, perchè, secondo la definizione di potenza (§ 43), significherebbe *un prodotto formato da nessun fattore*, la qual cosa non ha senso. Dunque la (5) non è valida nel caso di $m=n$. Noi *vogliamo* dare ad a^0 un significato tale che ci permetta di far uso della (5) anche quando è $m=n$.

---

* Sarà sottinteso che, nei §§ 183,..... 189, le basi delle potenze sono numeri diversi da zero.

** La potenza ad esponente *zero*, e quella ad esponente *uno* si trovano, per la prima volta, in un manoscritto di autore incognito, esistente nella biblioteca di Monaco (Baviera), ed avente la data del 1461.

Osserviamo a tal fine che $a^m:a^m$ è il quoto che si ottiene dividendo un numero per se stesso; e, pel teor. 1° § 68, questo quoto è sempre l'unità positiva. Dunque qualunque sia il valore di a e di m, * è sempre $a^m:a^m=1$. La (5) invece ci darebbe $a^m:a^m=a^0$; epperciò se *vogliamo* poter far uso della (5) anche quando è $m=n$, *dobbiamo porre per definizione* $a^0=1$.

Analogamente potremo considerare p.e. 5^0 come il quoto di 5^3 per 5^3, perchè $5^3:5^3=5^0$; poi 12^0 p.e. come il quoto di 12^6 per 12^6, perchè $12^6:12^6=12^0$; ecc.

Diremo che a^0 *è la potenza zero di* a, e stabiliremo in generale:

DEFINIZIONE. La potenza zero di un numero è l'unità positiva.

POTENZA AD ESPONENTE NEGATIVO. **

185. Togliamo ora la restrizione che l'esponente debba essere *positivo*.

Supponiamo di dover dividere a^m per a^n nel caso particolare in cui sia $m<n$; e sia p.e. $m=3$, $n=5$. Se proviamo ad applicare anche in questo caso la formola (5) del § 182, otteniamo $a^3:a^5=a^{3-5}=a^{-2}$. La scrittura a^{-2} non ha ancora senso; perchè, secondo la definizione di potenza (§ 43), rappresenterebbe *un prodotto avente un numero negativo di fattori*, la qual cosa non ha senso. Dunque la (5) non è valida se è $m<n$.

Noi *vogliamo* dare ad a^{-2} un significato tale che ci permetta di adoperare la (5) anche quando è $m<n$.

Il vero quoto di a^3 per a^5 è $\frac{a^3}{a^5}=\frac{aaa}{aaaaa}=\frac{1}{aa}=\frac{1}{a^2}$. Infatti: poichè il valore di una frazione non cambia quando se ne divide il numeratore ed il denominatore pel medesimo numero diverso da zero, potremo nella frazione $\frac{aaa}{aaaaa}$ dividere il numeratore ed il denominatore per aaa, ed otterremo $\frac{a^3}{a^5}=\frac{aaa}{aaaaa}=\frac{(aaa):(aaa)}{(aaaaa):(aaa)}=\frac{1}{aa}=\frac{1}{a^2}$.

La (5) invece darebbe $\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}$. Se *vogliamo* poter fare uso della (5) anche quando è $m<n$, dobbiamo porre per definiz. $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$.

Analogamente avremo p.e. $8^5:8^9=8^{5-9}=8^{-4}=\frac{1}{8^4}$.

---

* *Purchè m sia intero e positivo;* poichè, in caso contrario, a^m non ha ancora significato.

** Gli esponenti negativi compaiono per la prima volta nell'opera ***Le Triparty en la science des nombres*** di Nicola Chuquet, pubblicata nel 1484. La notazione di Chuquet era però diversa dalla nostra; p.e. per scrivere $7x^{-3}$, Chuquet, sottintendendo l'incognita x, scriveva $7^{3\bar{m}}$ ($\bar{m}$ significa *meno*). Fu Giovanni Wallis (1616-1703) che introdusse l'attuale modo di scrivere le potenze negative.

Diremo che a^{-m} *è una potenza negativa di a*, e stabiliremo in generale:

DEFINIZIONE. Una potenza negativa è eguale ad una frazione avente per numeratore l'unità, e per denominatore la medesima base, col medesimo esponente, ma positivo.

Osservazione. Poichè è $\frac{1}{a^m} = \frac{1^m}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$, sarà anche $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$; e potremo quindi dire: *a^{-m} è la potenza m^a dell'inverso di a*; od anche: *a^{-m} è il prodotto di m fattori eguali ad $^1/_a$*.

POTENZA AD ESPONENTE FRAZIONARIO. *

186. Togliamo ora la restrizione che l'esponente debba essere *intero*.

Al § 169 si è dimostrato che, quando *m* è divisibile per *n*, si ha $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. ** *Vogliamo* ora che questa eguaglianza sussista anche quando *m* non è divisibile per *n*; e stabiliamo la definizione:

DEFINIZIONE. Per qualsiasi valore intero e positivo di *m* e di *n*, si avrà $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. ***

---

187. La dimostrazione diretta della validità delle cinque formole del § 182 per gli esponenti *uno* e *zero*, essendo assai facile, la omettiamo; la daremo invece pel caso in cui uno degli esponenti, o tutti e due, sono numeri *interi negativi*, oppure *frazionari* (positivi o negativi).

188. ***ESPONENTI INTERI, POSITIVI O NEGATIVI.***

TEOREMA 1°. $(abcd)^{-m} = a^{-m}b^{-m}c^{-m}d^{-m}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione del § 185 abbiamo:

$$(abcd)^{-m} = \frac{1}{(abcd)^m} = \frac{1}{a^m b^m c^m d^m}.$$

Ora abbiamo evidentemente $\frac{1}{a^m b^m c^m d^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} \cdot \frac{1}{c^m} \cdot \frac{1}{d^m}$.

---

* Il primo ad introdurre nella scienza l'idea di potenza frazionaria, ed a dare le regole di calcolo di queste potenze, fu Nicola Oresme, vescovo di Lisieux, nato a Caen (o presso Caen) verso il 1323, e morto a Lisieux nel 1382. La notazione di Oresme era però assai diversa da quella che si usa oggidì, la quale si introdusse solo dopo Wallis.

** Si osservi che, in questo caso, $^m/_n$ è un numero intero quantunque abbia l'apparenza di frazione.

*** Questa definizione si può esprimere più diffusamente così:

DEFINIZIONE. *Una potenza ad esponente frazionario $^m/_n$ (con m, n interi positivi) è un radicale aritmetico avente per indice della radice il denominatore dell'esponente, e per radicando quella potenza della base che ha per esponente il numeratore del primitivo esponente.*

Diremo *potenza frazionaria* invece di *potenza con esponente frazionario*. È poi opportuno osservare che questa definizione non stabilisce nulla di sostanzialmente nuovo, ma introduce solamente un nuovo modo di scrivere il radicale $\sqrt[n]{a^m}$.

Ma $\frac{1}{a^m}=a^{-m}$; $\frac{1}{b^m}=b^{-m}$; $\frac{1}{c^m}=c^{-m}$; $\frac{1}{d^m}=d^{-m}$. Avremo quindi:

$$(abcd)^{-m}=\frac{1}{(abcd)^m}=\frac{1}{a^mb^mc^md^m}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{b^m}\cdot\frac{1}{c^m}\cdot\frac{1}{d^m}=a^{-m}b^{-m}c^{-m}d^{-m}.$$

TEOREMA 2°. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{a^{-m}}{b^{-m}}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo per definizione $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$. E poichè è $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, sarà $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\frac{1}{\frac{a^m}{b^m}}$. Ora questa è una frazione che ha per numeratore 1 e per denominatore $\frac{a^m}{b^m}$. Dividendone il numeratore ed il denominatore per a^m, si otterrà una frazione equivalente ad essa. Il numeratore 1 diviso per a^m darà per quoto $\frac{1}{a^m}$. Il denominatore $\frac{a^m}{b^m}$ diviso per a^m darà per quoto $\frac{1}{b^m}$; perchè, come sappiamo, è $\frac{a^m}{b^m}:a^m=\frac{a^m:a^m}{b^m}=\frac{1}{b^m}$. Avremo quindi:

$$\frac{1}{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{1:a^m}{\frac{a^m}{b^m}:a^m}=\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{a^m:a^m}{b^m}}=\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}}=\frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$ Riassumendo abbiamo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\frac{1}{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{1:a^m}{\frac{a^m}{b^m}:a^m}=\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{a^m:a^m}{b^m}}=\frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{b^m}}=\frac{a^{-m}}{b^{-m}}.$$

TEOREMA 3°. - *1° CASO.* $a^m.a^{-n}=a^{m-n}$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, avremo:

$$a^m.a^{-n}=a^m.\frac{1}{a^n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}.$$

2° CASO. $a^{-m}.a^n=a^{-m+n}$.

DIMOSTRAZIONE. $a^{-m}.a^n=\frac{1}{a^m}.a^n=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-m+n}$.

3° CASO. $a^{-m}.a^{-n}=a^{-m-n}$.

DIM. $a^{-m}.a^{-n}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^ma^n}=\frac{1}{a^{(m+n)}}=a^{-(m+n)}=a^{-m-n}$.

TEOREMA 4°. - *1° CASO.* $(a^m)^{-n}=a^{-mn}$.

DIMOSTRAZIONE. $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

2º CASO. $(a^{-m})^n = a^{-mn}$.

DIMOSTRAZIONE. $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1^n}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

3º CASO. $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

DIMOSTRAZIONE. $(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n}$. Poichè pel 2º Caso, si ha $(a^{-m})^n = a^{-mn}$, e per la definiz. del § 185 è $a^{-mn} = \frac{1}{a^{mn}}$, si avrà:

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-mn}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = 1 : \frac{1}{a^{mn}} = 1 . \frac{a^{mn}}{1} = a^{mn}.$$

TEOREMA 5º. - *1º CASO.* $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$.

DIMOSTRAZIONE. $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m . \frac{a^n}{1} = a^m . a^n = a^{m+n}$.

2º CASO. $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$.

DIMOSTR. $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m . a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}$.

3º CASO. $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$.

DIMOSTRAZ. $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m} . \frac{a^n}{1} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

Osservazione. Resta così dimostrato che le cinque formole del § 182 sono vere per qualsiasi valore *intero*, *positivo*, *nullo o negativo* dell'esponente.

La potenza 0^1 non ha significato: e non possiamo qui seguire la via indicata al § 183, cioè porre p.e. $0^4 : 0^3 = (0000) : (000) = 0^1$; perchè tutte le regole intorno alla divisione sono state dimostrate nell'ipotesi che il divisore sia diverso da *zero*. *Volendo* che la definizione del § 183 non soffra eccezioni, possiamo scrivere $0^1 = 0$.

Evidentemente si ha: $0^m = 0$.

La potenza 0^{-m} non ha significato. *Volendo* dargliene uno che sia in relazione colle convenzioni precedenti, possiamo porre:

$$0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Alla scrittura 0^0 non si è dato alcun significato.

Riassumendo avremo: $0^1 = 0$; $0^m = 0$; $0^{-m} = \infty$.

189. *ESPONENTI FRAZIONARI.* *

* Nelle seguenti dimostrazioni adopreremo solo esponenti frazionari positivi; sarà poi facilissimo all'alunno, quando il voglia, estendere le dimostrazioni al caso in cui fra gli esponenti ve ne siano degli interi, o dei negativi.

Può essere utile osservare che i seguenti teoremi si dimostrano tutti così: *Si scrive la potenza frazionaria sotto forma di radicale aritmetico; si eseguisce sul radicale l'operazione di cui si tratta (facendo uso dei noti teoremi sulle potenze e sui radicali aritmetici); e poi si restituisce al risultato la forma di potenza frazionaria.*

TEOREMA 1°. $(abcd)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}} . c^{\frac{m}{n}} . d^{\frac{m}{n}}$.

DIMOSTRAZ. Per defin. § 186, $(abcd)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(abcd)^m} =$

pel teorema 3° § 46 $= \sqrt[n]{a^m b^m c^m d^m} =$

pel teorema 2° § 163, $= \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[n]{b^m} . \sqrt[n]{c^m} . \sqrt[n]{d^m} =$

per definizione § 186, $= a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}} . c^{\frac{m}{n}} . d^{\frac{m}{n}}$.

TEOREMA 2°. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per definiz. § 186, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} =$

pel corollario § 88, $= \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} =$

pel teorema 3° § 164, $= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} =$

per definizione § 186, $= \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

TEOREMA 3°. $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per definiz. § 186, $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[s]{a^r} =$

riducendoli al medesimo indice, $= \sqrt[ns]{a^{ms}} . \sqrt[ns]{a^{rn}} =$

pel teorema 2° § 163, $= \sqrt[ns]{a^{ms} . a^{rn}} =$

pel teorema 4° § 47, $= \sqrt[ns]{a^{ms+rn}} =$

per la definizione del § 186, $= a^{\frac{ms+rn}{ns}} = a^{\frac{ms}{ns} + \frac{rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}$.

TEOREMA 4°. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$.

DIMOSTRAZIONE. Poichè $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, sarà $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{r}{s}} =$

per la definizione del § 186, $= \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r} =$

pel teorema 5° § 167, $= \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mr}}} =$

pel teorema 4° § 166, $= \sqrt[ns]{a^{mr}} =$

per la definizione del § 186, $= a^{\frac{mr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$.

TEOREMA 5°. $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}$.

DIMOSTR. Per defin. § 186, $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} =$

riducendoli al medesimo indice, $= \sqrt[ns]{a^{ms}} : \sqrt[ns]{a^{rn}} =$

pel teorema § 164, osservazione, $= \sqrt[ns]{a^{ms} : a^{rn}} =$

per la (5) del § 182, e la osserv. del § 188, $= \sqrt[ns]{a^{ms-rn}} =$

per la definizione del § 186, $= a^{\frac{ms-rn}{ns}} = a^{\frac{ms}{ns} - \frac{rn}{ns}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}$.

ALCUNI TEOREMI SULLE POTENZE.

190. TEOREMA 1°. Le potenze intere e positive di un numero maggiore dell'unità sono tutte maggiori dell'unità; e se ne può sempre trovare una maggiore di un numero dato arbitrariamente grande.

Sia il numero $a > 1$. Dico che: 1°. Qualunque sia il numero intero positivo m, sarà $a^m > 1$; 2°. Qualunque sia il numero H, è sempre possibile trovare un numero intero positivo n in modo che sia $a^n > H$.

DIMOSTRAZIONE. *1ª Parte.* $a^m > 1$. Infatti: scrivendo $a > 1$, $a > 1$,....... *(m volte)*, e moltiplicando membro a membro le m disuguaglianze, si ha $a^m > 1^m$, ossia $a^m > 1$. *

2ª Parte. $a^n > H$. Per la osservazione del § 59, si ha:

$a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1)(a - 1)$.....................(1).

Ora (per la 1ª parte) i termini a^{n-1}, a^{n-2},..... a sono tutti maggiori di 1; e quindi ponendo 1 al posto di a^{n-1}, a^{n-2},..... a, si avrà $a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1 > 1 + 1 + 1 + ... + 1$ *(n volte)*,** ossia $a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1 > n$; epperciò, ponendo n al posto di $a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1$ nella (1), si avrà $a^n - 1 > n(a - 1)$.

Se ora si sceglie n in modo che sia $n(a-1) > H$, si avrà a fortiori $a^n - 1 > H$, e quindi $a^n > H$. ***

191. TEOREMA 2°. Le potenze intere e positive di un numero positivo minore dell'unità sono tutte positive e minori dell'unità; e se ne può sempre trovare una minore di un numero positivo dato arbitrariamente piccolo.

---

* Lo studioso può dimostrare, per esercizio, che se m, n, p, q sono numeri positivi, e se è $m > n$, $p > q$, sarà $mp > nq$; e può cominciare così: *se è $m > n$, vi sarà un numero positivo x tale che sia $m = n + x$, analogamente $p = q + y$; poi ecc.*

** Perchè, come è facile verificare, i termini a^{n-1}, a^{n-2}, a^{n-3},...... a, 1 sono in numero di n.

*** Ciò è sempre possibile. Infatti basta prendere $n > \frac{H}{a-1}$; poichè se è $n > \frac{H}{a-1}$, moltiplicandone ambi i membri pel numero positivo $a - 1$, si ha $n(a-1) > \frac{H}{a-1} \cdot (a-1)$, ossia $n(a-1) > H$.

Sia il numero positivo $a<1$. Dico che: 1°. Qualunque sia il numero intero positivo m, sarà a^m minore di 1, e positivo; 2°. Se ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo, si può trovare un numero intero positivo n tale che sia $a^n<\varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. ***1ª Parte.*** **$a^m<1$ ed a^m positivo.** Infatti: poichè a è positivo, scrivendo $a<1$, $a<1$..... $_{(m\ volte)}$, e moltiplicando membro a membro queste disuguaglianze, si ha $a^m<1^m$, ossia $a^m<1$. Inoltre a^m è positivo, perchè è un prodotto di fattori tutti positivi.

2ª Parte. $a^n<\varepsilon$. Essendo a positivo e minore di 1, sarà $1/a>1$, e quindi (pel teorema preced.) si può sempre trovare un numero intero positivo n tale che sia $\left(\frac{1}{a}\right)^n>\frac{1}{\varepsilon}$, ossia $\frac{1}{a^n}>\frac{1}{\varepsilon}$.

E poichè di due frazioni di egual numeratore la maggiore ha il denominatore minore, dovendo essere $\frac{1}{a^n}>\frac{1}{\varepsilon}$, sarà $a^n<\varepsilon$.

COROLLARIO. Se si ha una potenza intera e positiva d'una base positiva, la base è maggiore, minore, od eguale all'unità, secondochè la potenza è maggiore, minore, od eguale all'unità.

DIMOSTRAZIONE. Deriva immediatamente dai due teor. preced. e dal fatto che qualunque potenza intera dell' unità è eguale all'unità.

192. TEOREMA 3°. Se due potenze intere e positive con basi positive hanno esponenti eguali, la base maggiore dà una potenza maggiore; e viceversa, la potenza maggiore ha una base maggiore.

Siano i due numeri positivi a, b; e sia m un numero intero positivo. Si vuol dimostrare che se è $a>b$, sarà $a^m>b^m$: e viceversa, se è $a^m>b^m$, sarà $a>b$.

DIMOSTRAZIONE. ***Parte 1ª. Se è $a>b$, sarà $a^m>b^m$.***

Infatti: scrivendo $a>b$, $a>b$, $a>b$,........ $_{(m\ volte)}$, e moltiplicando membro a membro queste m disuguaglianze, si ottiene (vedi nota * § 190).
$a.a.a.a......_{(m\ volte)}>b.b.b.b......_{(m\ volte)}$, ossia $a^m>b^m$.

Parte 2ª. Se è $a^m>b^m$, sarà $a>b$. Infatti: se non fosse $a>b$, sarebbe $a<b$, oppure $a=b$. Non può essere $a<b$, perchè allora (per la 1ª parte della dimostr.) sarebbe $a^m<b^m$, il che è contro l'ipotesi. Non può essere $a=b$, perchè allora (per un noto teor. d'aritm.) sarebbe $a^m=b^m$, il che è pure contro l'ipotesi. Non potendo essere $a<b$, nè $a=b$, sarà $a>b$.

COROLLARIO. Se due numeri positivi sono disuguali, ed m è un numero intero positivo, la radice aritmetica m^a del maggiore, è maggiore della radice aritmetica m^a del minore.

Siano a, b, m numeri positivi, ed inoltre m sia intero: dico che se è $a>b$, sarà $\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{b}$; e dimostro che sarà $\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{b}$, dimostrando che non può essere $\sqrt[m]{a}<\sqrt[m]{b}$, nè $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b}$.

DIMOSTRAZIONE. Se fosse $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$, sarebbe (pel teor. precedente) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m < \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$, ossia $a<b$, * il che è contro l'ipotesi.

Parimenti, se fosse $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$, sarebbe $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$, ossia $a=b$, il che è pure contro l'ipotesi.

Non potendo essere $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$, nè $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$, sarà $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

193. TEOREMA 4°. Le potenze razionali positive di base positiva sono, in valore assoluto, maggiori o minori dell'unità secondochè la base è maggiore o minore dell'unità. **

DIMOSTRAZIONE. Sia a una base positiva. Pel caso in cui l'esponente è intero, il teor. fu già dimostrato nei §§ 190, 191. Se l'esponente è frazionario, ed è p.e. $\frac{m}{n}$, si ha (defin. § 186), $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Ora secondochè è $a \gtrless 1$ (pei teor. 1° e 2° §§ 190, 191) sarà $a^m \gtrless 1$; e quindi (coroll. § 192) aritmeticamente $\sqrt[n]{a^m} \gtrless \sqrt[n]{1}$, ossia $\sqrt[n]{a^m} \gtrless 1$, ossia $a^{\frac{m}{n}} \gtrless 1$.

194. TEOREMA 5°. Sia a un numero positivo, ed m, n numeri razionali. Considerando solo il valore aritmetico delle potenze, avremo:

1°. Se a è *maggiore di 1*, secondochè è $m \gtreqless n$, sarà $a^m \gtreqless a^n$; e viceversa secondochè è $a^m \gtreqless a^n$, sarà $m \gtreqless n$.

2°. Se a è *minore di 1*, secondochè è $m \gtreqless n$, sarà $a^m \lesseqgtr a^n$; e viceversa secondochè è $a^m \gtreqless a^n$, sarà $m \lesseqgtr n$.

DIMOSTRAZIONE. *1ª Parte. Se è $a>1$, secondochè è $m \gtreqless n$, sarà $a^m \gtreqless a^n$.* Infatti: si ha in ogni caso $a^m : a^n = a^{m-n}$. Ora secondochè è $m \gtreqless n$, sarà $m-n \gtreqless 0$, e quindi (pel teor. preced. e perchè $a^0=1$) sarà $a^{m-n} \gtreqless 1$. Ora l'essere il quoto $a^{m-n} \gtreqless 1$ ci dice che il dividendo a^m è rispettivamente maggiore od eguale al divisore a^n; ossia $a^m \gtreqless a^n$.

Se è $a>1$, secondochè è $a^m \gtreqless a^n$, sarà $m \gtreqless n$. Infatti: se è $a^m > a^n$, non può essere $m \leqq n$, perchè allora sarebbe $a^m \leqq a^n$, il che è contro l'ipotesi. Sarà dunque $m>n$.

Similmente se è $a^m = a^n$, non può essere $m \gtrless n$, perchè allora sarebbe $a^m \gtrless a^n$, il che è contro l'ipotesi. Sarà dunque $m=n$.

2ª Parte. Si dimostra come la 1ª parte.

195. TEOREMA 6°. Qualunque sia il numero positivo a, è possibile trovare un numero positivo n tale che sia $a^n - 1 < \varepsilon$ se è $a>1$, ed $1 - a^n < \varepsilon$ se è $a<1$, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo.

DIMOSTRAZIONE. *1ª Parte. $a>1$, ed $a^n - 1 < \varepsilon$.*

---

* Poichè per definiz. (§ 158 osservaz. 1ª) è $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$ e $\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = b$.

** Diciamo *potenza razionale* invece di dire *potenza avente per esponente un numero razionale.*

Poichè ε è positivo, sarà $\varepsilon+1>1$, e quindi (pel teor. 1° § 190) è sempre possibile trovare un numero positivo m tale che sia $(\varepsilon+1)^m>a$; e quindi (pel coroll. § 192) sia aritmeticamente $\sqrt[m]{(\varepsilon+1)^m}>\sqrt[m]{a}$, ossia $\varepsilon+1>\sqrt[m]{a}$, ossia $\varepsilon+1>a^{\frac{1}{m}}$.

Sottraendo 1 da ambi i membri di questa disuguaglianza, si ottiene $\varepsilon>a^{\frac{1}{m}}-1$; ossia $a^{\frac{1}{m}}-1<\varepsilon$. Se si prende per n il valore $1/m$, ossia se si pone $1/m=n$, si avrà $a^n-1<\varepsilon$. *

2ª Parte. *$a<1$, ed $1-a^n<\varepsilon$.* Essendo ε positivo e piccolissimo, sarà $1-\varepsilon<1$ e positivo; e quindi (pel teor. 2° § 191) è sempre possibile trovare un numero intero positivo m tale che sia $(1-\varepsilon)^m<a$; e quindi, aritmeticamente, $\sqrt[m]{(1-\varepsilon)^m}<\sqrt[m]{a}$, ossia $1-\varepsilon<a^{\frac{1}{m}}$. Se si aggiunge $-a^{\frac{1}{m}}+\varepsilon$ ai due membri della disuguaglianza, si ha evidentemente $1-\varepsilon-a^{\frac{1}{m}}+\varepsilon<a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{m}}+\varepsilon$, ossia $1-a^{\frac{1}{m}}<\varepsilon$.

Se ora si pone $1/m=n$, si avrà $1-a^n<\varepsilon$. **

POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE.

196. Se M è la classe dei numeri razionali $m_1, m_2, m_3, m_4\ldots\ldots$, indicheremo con a^M la classe delle potenze $a^{m_1}\ a^{m_2}\ a^{m_3}\ a^{m_4}\ ,\ldots\ldots$

TEOREMA. Se $\mu=(M, M')$, e gli elementi delle classi M, M' sono tutti numeri razionali, le classi a^M, ed $a^{M'}$ sono contigue qualunque sia il numero positivo a diverso da zero e da uno.

DIMOSTRAZIONE. ***1° Caso.*** $a>1$.

1°. *Le classi a^M, $a^{M'}$ sono illimitate, perchè tali sono M, M'.*

2°. *Ogni elemento di a^M è maggiore di ogni elemento di $a^{M'}$.* Infatti: essendo $a>1$, ed ogni elemento di M maggiore di ogni elemento di M', (pel teor. 5° § 194) ogni potenza della classe a^M sarà maggiore di ogni potenza della classe $a^{M'}$.

3°. *Si può sempre trovare un elemento a^m di a^M, ed uno $a^{m'}$ di $a^{M'}$ tali che sia $a^m-a^{m'}<\varepsilon$, ove ε è un numero positivo arbitrariamente piccolo.* Infatti: Se in $a^m-a^{m'}$ si mette in evidenza il fattore $a^{m'}$,

---

* Si può osservare che, essendo $a>1$, (pel coroll. § 192) sarà $\sqrt[m]{a}>\sqrt[m]{1}$, ossia $\sqrt[m]{a}>1$, ossia $a^{\frac{1}{m}}>1$; e quindi a^n-1 è un numero positivo.

** Si può osservare che, essendo per ipotesi $a<1$, (pel teorema 5° § 194) sar[à] $a^n<a^0$, ossia $a^n<1$; epperciò $1-a^n$ è un numero positivo. Poichè è $a^0=1$, sar[à] $1-a^n=a^0-a^n$; e dovendo la differenza $1-a^n$, ossia la differenza a^0-a^n, essere pi[c]colissima, deve essere piccolissima la differenza fra i due esponenti, e quindi n de[ve] avere un valore vicinissimo a zero.

si ha $a^m - a^{m'} = a^{m'}(a^m : a^{m'} - a^{m'} : a^{m'}) = a^{m'}(a^{m-m'} - 1)$. Poichè M e M' sono contigue, è sempre possibile trovare m ed m' tali che $m - m'$ sia tanto piccolo da aversi $a^{m-m'} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{m_n}}$, ove m_n è un elemento di M scelto ad arbitrio, e di a^{m_n} consideriamo solo il valore aritmetico. Moltiplicando allora ambi i membri di questa disuguaglianza pel numero aritmetico a^{m_n}, si avrà:

$$a^{m_n}(a^{m-m'} - 1) < \frac{\varepsilon}{a^{m_n}} . a^{m_n}, \quad \text{ossia} \quad a^{m_n}(a^{m-m'} - 1) < \varepsilon.$$

Ora essendo m_n un elemento di M, sarà $m' < m_n$, e quindi $a^{m'} < a^{m_n}$; epperciò a fortiori sarà $a^{m'}(a^{m-m'} - 1) < \varepsilon$; ossia $a^m - a^{m'} < \varepsilon$.

Dunque le classi a^M, $a^{M'}$ sono contigue.

2° Caso. $a < 1$. Si dimostra come nel 1° caso, osservando che la classe maggiore è la classe $a^{M'}$. *

197. Poichè due classi contigue di numeri individuano sempre uno, ed un sol numero, le classi contigue a^M, $a^{M'}$ individueranno uno, ed un sol numero, il quale sarà minore di ogni elemento di una delle due classi, e maggiore di ogni elemento dell'altra classe. Ora una potenza di a che avesse per esponente un numero minore di ogni elemento di M, e maggiore di ogni elemento di M' soddisferebbe appunto a queste condizioni.

Essendo per ipotesi $\mu = (M, M')$, se μ è razionale, a^μ sarà la potenza cercata, ed avremo $a^\mu = (a^M, a^{M'})$.

Ma se μ è irrazionale, il segno a^μ non ha ancora significato. Potremo perciò dargliene uno affatto arbitrario, purchè non assurdo in se stesso, nè in contraddizione coi principii precedentemente stabiliti.

Ora noi *vogliamo* che l'eguaglianza $a^\mu = (a^M, a^{M'})$ sussista per ogni valore razionale od irrazionale di μ, epperciò stabiliremo la definizione:

DEFINIZIONE. Se a è un numero positivo, e $\mu = (M, M')$ un numero razionale od irrazionale, chiameremo *potenza* μ^{ma} *di* a il limite delle classi contigue $(a^M, a^{M'})$; e scriveremo $a^\mu = (a^M, a^{M'})$.

Osservazione 1ª. Se è $a < 1$, la classe maggiore è la $a^{M'}$; e si scrive $a^\mu = (a^{M'}, a^M)$. **

Osservazione 2ª. Estenderemo pure agli esponenti irrazionali la definizione data al § 185, ponendo per definizione, qualunque sia il numero μ razionale od irrazionale, $a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}$.

Osservazione 3ª. Poichè ci occupiamo solo delle radici aritmetiche, sarà sottinteso che le potenze di cui ci occuperemo, siano esse razionali od irrazionali, avranno solo il valore aritmetico.

---

* Per dimostrare che è $a^{m'} - a^m < \varepsilon$, si pone $a^{m'} - a^m = a^{m'}(a^{m'} : a^{m'} - a^m : a^{m'}) = a^{m'}(1 - a^{m-m'})$; e poi si dimostra, come sopra, che è $a^{m'}(1 - a^{m-m'}) < \varepsilon$.

** Diremo *potenza irrazionale* invece di dire *potenza con esponente irrazionale*.

Non sarebbe difficile, in base alle convenzioni fatte, dimostrare che le 5 formole del § 182 ed i teor. dei §§ 190.....195 sono veri anche se alcuni o tutti gli esponenti sono irrazionali. Ne lasciamo la dimostrazione allo studioso.

RADICE CON INDICE RAZIONALE OD IRRAZIONALE.

198. Estenderemo la definizione del § 158 al caso in cui l'indice è un numero razionale od irrazionale qualsiasi, e diremo:

DEFINIZIONE. Qualunque siano i numeri a, n, razionali od irrazionali, $\sqrt[n]{a}$ è quel numero la cui potenza n^a è a; ossia $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Osservazione 1ª. Estenderemo pure agli esponenti irrazionali la definizione del § 186; e porremo per definizione, anche se μ, ν sono irrazionali, $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$.

Osservazione 2ª. Con dimostrazioni analoghe a quelle dei §§ 162 e seguenti, si dimostra facilmente che, anche per questi radicali, valgono i teoremi dimostrati pei radicali ad indice intero positivo; ed in particolare che il teor. 1° § 162 è valido anche se il moltiplicatore è un numero razionale od irrazionale qualsiasi. Ne lasciamo la cura allo studioso.

199. TEOREMA 1°. Qualunque sia il numero razionale od irrazionale a, se m, n sono numeri interi positivi, si avrà $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[m]{a^n}$.

DIMOSTRAZ. Per la osservaz. preced. si avrà $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n} n]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}$.

200. TEOREMA 2°. Qualunque sia il numero razionale od irrazionale a, se n è un numero razionale positivo, si avrà $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per la osservazione 2ª § 198, si ha:

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n]{a^1} = \sqrt[(-n)(-1)]{a^{1(-1)}} = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

COROLLARIO. Si avrà pure $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Infatti: $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$. *

---

* È evidente che, anche per n razionale od irrazionale, è $\sqrt[n]{1} = 1$. Si osservi poi l'analogia che vi è fra $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e $\sqrt[-n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

CAPO QUINTO.

Equazioni di 2° grado ad un' incognita.

PRELIMINARI.

201. DEFINIZIONE. Un'equazione ad una sola incognita, ed ordinata, si dice di 2° grado se il massimo esponente che ha l'incognita è 2.

Quindi il 1° membro d'un'equazione ordinata di 2° grado ad una sola incognita potrà avere tre termini; cioè uno con l'incognita a 2° grado, uno con l'incognita a 1° grado, ed un termine noto.

Se indichiamo con x l'incognita, con a il coefficiente di x^2, con b il coefficiente di x, e con c il termine noto, l'equazione avrà la forma $ax^2+bx+c=0$.

Osservazione. Si osservi che a, b, c sono numeri razionali od irrazionali qualsiasi; che b, c possono essere (uno solo od entrambi) eguali a zero. Però supporremo sempre che a sia diverso da zero; perchè, se fosse $a=0$, l'equazione avrebbe la forma $0x^2+bx+c=0$, ossia $bx+c=0$, e cesserebbe di essere un'equazione di 2° grado.

Quando a, b, c sono tutti diversi da zero, l'equazione ha la forma $ax^2+bx+c=0$, e si dice *completa*.

In caso contrario si dice *incompleta;* ed in particolare:

1°. Se è $b=0$, l'equazione ha la forma $ax^2+0x+c=0$, ossia $ax^2+c=0$, e si chiama *pura;*

2°. Se è $c=0$, l'equazione ha la forma $ax^2+bx+0=0$, ossia $ax^2+bx=0$, e si chiama *impura;*

3°. Se è $b=0$, $c=0$, l'equazione ha la forma $ax^2+0x+0=0$, ossia $ax^2=0$.

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE PURA $ax^2+c=0$.

202. Se nell'equazione $ax^2+c=0$ si trasporta il termine noto nel 2° membro, si ha $ax^2=-c$; e dividendone ambi i membri per a (che è diverso da zero), si ottiene l'equazione equivalente (coroll. 2° § 102 e teor. 2° § 103) $x^2=-c/a$.

Quest'equazione ci fa conoscere che il valore cercato di x è un numero il cui quadrato è $-c/a$; e quindi esso sarà la radice quadrata di $-c/a$.

Se a, c hanno segno contrario, $-c/a$ sarà positivo; e la radice quadrata di $-c/a$ (pel teor. 1° § 160) avrà i due valori $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$,

i quali (pel teor. del § 156) saranno due numeri razionali od irrazionali. Indicando con x' ed x'' questi due valori, avremo $x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. *

Essi si sogliono raccogliere in una sola espressione scrivendo: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Ma se a, c hanno egual segno, $-c/a$ sarà negativo, e (teorema 2° § 160) non esiste alcun numero razionale od irrazionale il cui quadrato sia $-\frac{c}{a}$. Diremo allora che $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ sono due numeri *immaginari*.

È poi evidente che ogni valore di x diverso da $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ non potrà verificare l'equazione data.

Osservazione. 1ª. Si suol dire che la radice quadrata di un numero negativo è un numero *immaginario;* e, per opposizione, si dà il nome di *numeri reali* ai numeri razionali ed agli irrazionali. Noi supporremo sempre che i coefficienti delle incognite, ed i termini noti delle equazioni, siano numeri reali. **

Osservazione 2ª. L'espressione $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ si chiama *la formola*

---

* Le due radici d'un'equazione di 2° grado ad un'incognita si sogliono designare con x' ed x''; è però affatto indifferente il designare con x' o con x'' una qualsiasi delle due radici.

** La prima traccia degli immaginari si trova nella *Stereometria* di Erone di Alessandria (scritta circa 100 anni prima dell'Era Volgare), ove, dovendo trovare il valore di $\sqrt{81-144}$, si pone erroneamente $\sqrt{81-144} = \sqrt{63}$. Pare che Erone credesse che fosse $\sqrt{-1} = 1$; e quindi abbia fatto il seguente calcolo erroneo: $\sqrt{81-144} = \sqrt{-63} = \sqrt{-1.63} = \sqrt{-1}.\sqrt{63} = 1.\sqrt{63} = \sqrt{63}$.

Il calcolo dei numeri immaginari pare sia dovuto a Girolamo Cardano (nato a Pavia nel 1501, e morto a Roma nel 1576) il quale pel primo osservò che le radici immaginarie d'un'equazione sono sempre accoppiate a due a due.

Le denominazioni *numero reale*, *numero immaginario*, furono introdotte da Descartes (1596-1650) nella sua *Geometria* pubblicata nel 1637. Ecco le parole con cui dà la ragione di queste denominazioni:

« Sciendum itaque, quod incognita quantitas in qualibet aequatione tot diversas » radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones *(dimensione » dell'equazione = grado dell'equazione)*..... Verum saepe accidit, quod quaedam ha» rum radicum sint falsae *(le radici negative)* seu minores quam nihil..... Caeterum » radices tam verae *(le positive)* quam falsae *(le negative)* non semper sunt reales, » sed aliquando tantum imaginariae: hoc est, semper quidem in qualibet aequatione » tot radices quot dixi imaginari licet; verum nulla interdum est quantitas, quae il» lis, quas imaginamur, respondet. »

Essendosi poi data un'interpretazione geometrica ai numeri immaginari, non è più vero che *nulla est quantitas quae illis respondet.*

di risoluzione dell'equazione $ax^2+c=0$, perchè indica quali operazioni bisogna fare sul coefficiente dell' incognita e sul termine noto per ottenere il valore dell'incognita.

Riassumeremo quanto precede col seguente teorema:

TEOREMA. L'equazione $ax^2+c=0$ ha due radici contrarie, le quali sono i due valori della radice quadrata del contrario del quoto del termine noto pel coefficiente di x^2. Esse sono reali, se il termine noto ed il coefficiente di x^2 hanno segno contrario; sono immaginarie, se hanno egual segno.

Esempio 1º. *Si risolva l'equazione* $9x^2-4=0$.

Si ha $a=+9$, $c=-4$; e quindi $-\frac{c}{a}=-\frac{-4}{9}=+\frac{4}{9}$. Avremo allora $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$.

Risposta. Le radici cercate sono $x=+{}^2/_3$, $x''=-{}^2/_3$.

Esempio 2º. *Si risolva l'equazione* $3x^2-15=0$.

Dividendo tutti i membri per 3, si ottiene l'equazione equivalente $x^2-5=0$. In quest' equazione si ha $a=+1$, $c=-5$; per cui $-{}^c/_a=-(-{}^5/_1)=+5$: e quindi $x=\pm\sqrt{-{}^c/_a}=\pm\sqrt{5}$.

Risposta. Le radici dell'equazione sono $x'=+\sqrt{5}$, $x''=-\sqrt{5}$.

Osservazione. E facile verificare che i valori trovati soddisfano veramente le equazioni proposte.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE IMPURA $ax^2+bx=0$.

203. Se nel 1º membro di $ax^2+bx=0$ si mette in evidenza x, l'equazione prende la forma $x(ax+b)=0$; e la risoluzione dell'equazione consiste nel trovare un valore di x che annulli il prodotto $x(ax+b)$.

Se si pone $x=0$, si annulla il 1º fattore, e quindi sarà $x(ax+b)=0$, ossia $ax^2+bx=0$. Dunque $x=0$ è una radice dell'equazione.

Se si pone $ax+b=0$, ossia $ax=-b$, ossia $x=-{}^b/_a$, si annulla il 2º fattore, e quindi sarà $x(ax+b)=0$, ossia $ax^2+bx=0$. Dunque anche $x=-{}^b/_a$ è una radice dell'equazione.

Poichè non vi sono altri valori di x che possano annullare o l'uno o l'altro dei due fattori del prodotto $x(ax+b)$, ne segue (coroll. 2º § 41) che non vi sono altri valori di x che possano rendere $x(ax+b)=0$, ossia che possano risolvere l'equazione. Dunque: *l'equazione impura* $ax^2+bx=0$ *ammette due, e due sole, radici.*

Osservazione. Essendo a, b numeri reali, tale sarà pure $-{}^b/_a$.

Ciò che si disse si può riassumere col seguente teorema:

TEOREMA. L'equazione impura $ax^2+bx=0$ ha due radici reali. Una di esse è zero, e l'altra è il quoto del contrario del coefficiente di x pel coefficiente di x^2.

Esempio. *Si risolva l'equazione* $3x^2+5x=0$.

In questo caso è $a=+3$, $b=+5$; e quindi $-b/a=-5/3$.

Risposta. Le radici cercate sono $x'=0$, $x''=-5/3$.

Osservazione. È facile constatare che i valori trovati verificano l'equazione.

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $ax^2=0$.

204. L'equazione $ax^2=0$ si può anche scrivere $a.x.x=0$.

Poichè per ipotesi è $a\gtrless 0$, il prodotto $a.x.x$ si annullerà eguagliando a zero il 2° od il 3° fattore. Si ha così $x'=0$ ed $x''=0$. Poichè due sono i fattori che col loro annullarsi annullano il prodotto, invece di dire che $ax^2=0$ ha la sola radice $x=0$, si suole dire:

TEOREMA. L'equazione $ax^2=0$ ha due radici eguali a zero.

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE COMPLETA $ax^2+bx+c=0$.

205. Risolviamo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ....(1)

Trasportando il termine noto nel 2° membro, si ha l'equazione equivalente:

$$ax^2+bx=-c \qquad (2)$$

Poichè è $a\gtrless 0$, moltiplicando tutti i termini della (2) per $4a$ otterremo (teor. 2° § 103) l'equazione equivalente

$$4a^2x^2+4abx=-4ac \qquad (3)$$

Aggiungiamo * b^2 ai due membri della (3), ed otterremo:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac, \text{ ossia}$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac \qquad (4)$$

che è un'equazione equivalente alla (3), e quindi anche alla (1).

Essa ci dice che $2ax+b$ è un numero il cui quadrato è b^2-4ac; dunque $2ax+b$ è la radice quadrata di b^2-4ac. Ora la radice quadrata di b^2-4ac ha i due valori $+\sqrt{b^2-4ac}$ e $-\sqrt{b^2-4ac}$ ** e quindi:

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac}\,; \quad \text{e} \quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac} \qquad (5)$$

Poichè la (1) è equivalente alla (4), e la (4) è equivalente all'insieme delle due equazioni (5), ne segue che i valori di x che risolvono la (1) sono *tutti e soli* quelli che risolvono le due equazioni (5), le quali sono di 1° grado ad una incognita. Se x' è la radice della 1ª, ed x'' la radice della 2ª, si avrà immediatamente

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,; \quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

---

* Si desidera che il 1° membro dell'equazione sia un quadrato. Osservando che è $4abx=2(2ax)b$, si vede che $4a^2x^2+4abx$ è la somma dei due primi termini del quadrato $(2ax+b)^2$; si ha infatti $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$. E quindi per avere il quadrato di $2ax+b$ basta aggiungere b^2 ai due membri della (3).

** Si può osservare che essendo a, b, c numeri noti, tale è pure $\sqrt{b^2-4ac}$.

e queste saranno le radici dell'equazione data. I due valori si sogliono riunire in una sola espressione scrivendo $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.........(6).

Abbiamo fatto dipendere la risoluzione dell'equazione data dalla risoluzione delle (5) che sono di 1° grado ad una incognita. E poichè un'equazione di 1° grado ad una incognita col coefficiente dell'incognita diverso da zero (come è, per ipotesi, nel caso nostro) ha sempre una ed una sola radice, ne segue che ciascuna delle (5) avrà sempre una ed una sola radice. Dunque: *l'equazione completa* $ax^2+bx+c=0$ *avrà sempre due, e due sole, radici.*

Riassumeremo ciò che si è detto col seguente teorema:

TEOREMA. L'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha sempre due radici, le quali si ottengono scrivendo una frazione che abbia per denominatore il doppio del coefficiente di x^2, e per numeratore il contrario del coefficiente di x, più o meno la radice quadrata aritmetica della differenza fra il quadrato di questo coefficiente ed il quadruplo del prodotto del coefficiente di x^2 pel termine noto. *

Esempio. *Si risolva l'equazione* $2x^2-15x+18=0$.

In questo caso si ha $a=+2$, $b=-15$, $c=+18$. Sostituendo questi valori ad a, b, c nella (6), si ottiene:

$$x=\frac{+15\pm\sqrt{(-15)^2-4(+2)(+18)}}{2.2}=\frac{+15\pm\sqrt{225-144}}{4}=$$

$$=\frac{+15\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{+15\pm9}{4}.$$

Da cui $x'=\frac{+15+9}{4}=\frac{24}{4}=6$; $x''=\frac{+15-9}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

Risposta. *Le due radici sono* $x'=6$, $x''=1^1/_2$.

Osservazione 1^a^. La (6) si chiama *la formola di risoluzione* dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, perchè indica quali operazioni bisogna fare sui coefficienti dell'incognita e sul termine noto per avere i valori delle radici. **

---

* È probabile che Euclide, vissuto circa 300 anni prima dell' Era Volgare, conoscesse la risoluzione delle equazioni di 2° grado ad una incognita, e che la rivestisse di forma geometrica per renderla più conforme al genio greco. La prima formola di risoluzione che abbiamo si trova nella *Geometria* di Erone di Alessandria, il quale fiorì circa 100 anni prima dell'Era Volgare. La via che noi abbiamo seguito per ricavare la formola è, in sostanza, quella seguita da Erone di Alessandria.

** Quando il coefficiente di x è un numero pari, p.e. $2b'$, la formola (6) si semplifica alquanto. Infatti se nella (6) si pone $2b'$ al posto di b, si ha:

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-ac})}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

Osservazione 2ª. Quando il coefficiente di x^2 è l'unità, l'equazione completa prende la forma $x^2+bx+c=0$; e, rappresentando (come è d'uso) con p il coefficiente di x, e con q il termine noto, si ha:

$$x^2+px+q=0 \qquad (7).$$

Per avere le radici dell'equazione completa ridotta alla forma (7), basta sostituire nella (6) ad a, b, c i loro valori; cioè $+1$ al posto di a, poi p al posto di b, e q al posto di c. Si ottiene allora

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}, \text{ ossia } x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Scrivendo $\sqrt{4}$ al posto di 2, e ricordando il teor. del § 164, si avrà:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{\sqrt{4}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-\frac{4q}{4}}=$$

$$=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Si avrà quindi * $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ ....(8).

---

* Poichè $\frac{p^2}{4}=\left(\frac{p}{2}\right)^2$, si può esprimere il contenuto della (8) così:

Le radici dell'equazione $x^2+px+q=0$ sono eguali alla metà del contrario del coefficiente di x, più o meno la radice quadrata aritmetica della differenza fra il quadrato della metà di questo coefficiente ed il termine noto.

Volendo ricavare direttamente la (8) dalla $x^2+px+q=0$, si può procedere come al § 205: cioè da $x^2+px+q=0$ si ha $x^2+px=-q$; e scrivendo $2.\frac{p}{2}.x$ al posto di px, si ha ancora $x^2+2\frac{p}{2}x=-q$ ....(α).

Ora $x^2+2\frac{p}{2}x$ è la somma dei due primi termini del quadrato di $x+\frac{p}{2}$. [Infatti si ha $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}$]. Aggiungendo $\frac{p^2}{4}$ ad ambi i membri di (α), si ottiene $x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$; ossia $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$. E ragionando come nel § 205, si ottengono le equazioni $x+\frac{p}{2}=+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ed $x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, da cui

$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, ed $x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Ossia $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

La (8) è un caso particolare della (6); giova però ricordarla, perchè spesso semplifica assai i calcoli da farsi per trovare le radici.

È facile riconoscere che la (6) comprende, come casi particolari, le formole di risoluzione dell'equazione pura, dell'equazione impura e dell'equazione $ax^2=0$. Infatti:

1°. Se in $ax^2+bx+c=0$ si pone $b=0$, si ha l'equazione pura $ax^2+c=0$. Se nella 6) poniamo $b=0$, otteniamo $x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4ac}}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}$. Scrivendo $\sqrt{4a^2}$ al po-

DISCUSSIONE DELLA FORMOLA DI RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE $ax^2+bx+c=0$.

Ricerca del valore delle radici.

206. La formola di risoluzione dell' equazione $ax^2+bx+c=0$ è

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\dots\dots\dots\dots(1)$$

Poichè, per ipotesi, è $a \gtrless 0$, le radici non avranno mai la forma impossibile $m/0$, nè la forma indeterminata $0/0$; esse poi saranno reali od immaginarie secondochè tale è $\sqrt{b^2-4ac}$. E poichè il valore di $\sqrt{b^2-4ac}$ dipende dal valore di b^2-4ac, esamineremo i tre casi particolari $b^2-4ac>0$, $b^2-4ac=0$, $b^2-4ac<0$.

1° CASO. $b^2-4ac>0$. Poichè b^2-4ac è positivo, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ saranno numeri reali. Inoltre $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ e $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ saranno disuguali, e quindi saranno disuguali anche $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Dunque: *le due radici sono reali e disuguali.* *

2° CASO. $b^2-4ac=0$. Si avrà $x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-b\pm 0}{2a}$, ossia $x=-\frac{b}{2a}$; e l'equazione ha una sola radice. Essa è un numero reale

---

sto di $2a$, avremo ancora $x=\frac{\pm\sqrt{-4ac}}{\sqrt{4a^2}}=\pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ che è la formola di risoluzione dell' equazione pura.

2°. Se in $ax^2+bx+c=0$ si pone $c=0$, si ha l'equazione impura $ax^2+bx=0$. Se nella (6) poniamo $c=0$, otteniamo $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a.0}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-0}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=$ $=\frac{-b\pm b}{2a}$. Da cui si ha $x'=\frac{-b+b}{2a}=\frac{0}{2a}=0$, $x''=\frac{-b-b}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$, le quali sono le radici dell'equazione impura.

3°. Se in $ax^2+bx+c=0$ si pone $b=0$, $c=0$, si ha l'equazione $ax^2=0$. Se nella (6) poniamo $b=0$, $c=0$, otteniamo $x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4.0.0}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-0\pm 0}{2a}$. Da cui $x'=0$, $x''=0$, le quali sono le radici dell'equazione $ax^2=0$.

* Si può osservare che quando a, c sono di segno contrario, si ha $b^2-4ac>0$. Infatti in tal caso il prodotto ac, e quindi $4ac$ è negativo, epperciò $-4ac$ è positivo. Allora b^2-4ac è la somma di b^2 che è positivo (perchè è un quadrato) e di $-4ac$ che è pure positivo; epperciò b^2-4ac è positivo, ossia è $b^2-4ac>0$.

perchè a, b sono numeri reali. Si suol dire che l'equazione ha *due radici reali ed eguali.* *

3º CASO. $b^2-4ac<0$. Poichè b^2-4ac è negativo, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ sono numeri immaginari, e quindi *le due radici sono immaginarie.*

Osservazione. Il binomio b^2-4ac che col suo valore positivo, nullo o negativo, classifica i valori delle radici, si chiama *il discriminante dell'equazione.* **

Ricerca del segno delle radici reali.

207. *Diremo che due termini consecutivi di un polinomio formano* ***una permanenza*** *se sono dello stesso segno, e diremo che formano* ***una variazione*** *se sono di segno contrario.*

Esempio. In $5x^3-4x^2+7x+2y-7z-3$ il 1º ed il 2º termine formano *una variazione;* il 2º ed il 3º *una variazione;* il 3º ed il 4º *una permanenza;* il 4º ed il 5º *una variazione*, il 5º ed il 6º *una permanenza.* Nel polinomio dato vi sono quindi *due permanenze e tre variazioni.*

Noi supponiamo che il primo termine dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ sia positivo *** e che le radici siano reali: e quindi la successione dei segni dei termini del primo membro sarà $+++$, oppure $+-+$, oppure $++-$, oppure $+--$; e sarà $b^2-4ac\geqq 0$. Esamineremo separatamente questi diversi casi.

$+++$ { L'equazione ha la forma $ax^2+bx+c=0$, le cui radici sono $x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ed $x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Poichè a e c sono positivi, $4ac$ è positivo, e b^2-4ac è la differenza di due numeri positivi; sarà perciò evidentemente $b^2>b^2-4ac$, e quindi (pel coroll. § 192) sarà aritmeticamente $\sqrt{b^2}>\sqrt{b^2-4ac}$; ossia $b>\sqrt{b^2-4ac}$.

Per la regola del § 25, i due numeratori hanno entrambi il segno del loro 1º termine, cioè sono entrambi negativi, e quindi le due frazioni sono entrambe negative. Dunque: *le due radici sono entrambe negative.*

---

* Essendo $b^2-4ac=0$, l'equazione (4), che è equivalente alla $ax^2+bx+c=0$, prende la forma $(2ax+b)^2=0$, ossia $(2ax+b)(2ax+b)=0$. Ogni valore di x che annulli un fattore è radice dell'equazione. E poichè $x=-\dfrac{b}{2a}$ annulla il 1º ed il 2º fattore, invece di dire che si ha una sola radice, si dice che si hanno *due radici eguali.*

** La parola *discriminante* fu introdotta nella scienza da Giac. Gius. Sylvester, nato a Londra nel 1814, e morto, prof. dell'Università di Oxford, il 16 marzo 1897.

*** Ciò è sempre possibile: perchè, se a è negativo, basta cambiare il segno a tutti i termini dell'equazione.

+ — + L'equazione ha la forma $ax^2-bx+c=0$, le cui radici sono $x'=\frac{+b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ed $x''=\frac{+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Poichè anche quì a e c sono positivi, ragionando come nel caso precedente, si ricava che i due numeratori sono entrambi positivi, e quindi le due frazioni sono ambedue positive. Dunque: *le due radici sono entrambe positive.*

+ + — L'equazione ha la forma $ax^2+bx-c=0$, le cui radici sono

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(-c)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-(-4ac)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

ossia $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, ed $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

Poichè è $b^2+4ac>b^2$, sarà aritmeticamente $\sqrt{b^2+4ac}>\sqrt{b^2}$, ossia $\sqrt{b^2+4ac}>b$. Per la regola del § 25, i due numeratori hanno entrambi il segno del loro 2° termine, epperciò sono uno positivo e l'altro negativo.

Per la regola del § 25, il valore numerico del numeratore negativo è maggiore del valore numerico del numeratore positivo.

Ne segue che le due frazioni sono una positiva e l'altra negativa, ed il valore numerico della negativa è maggiore del valore numerico della positiva. Dunque: *le due radici sono di segno contrario, e la maggiore in valore assoluto è la negativa.*

+ — — L'equazione ha la forma $x^2-bx-c=0$, le cui radici sono

$$x=\frac{+b\pm\sqrt{b^2-4a(-c)}}{2a}=\frac{+b\pm\sqrt{b^2-(-4ac)}}{2a}=\frac{+b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$$

ossia $x'=\frac{+b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$, ed $x''=\frac{+b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

Ragionando come nel caso precedente, si conchiude che i numeratori sono uno positivo e l'altro negativo, e che il valore numerico del numeratore positivo è maggiore del valore numerico del numeratore negativo.

Ne segue che le due frazioni sono una positiva e l'altra negativa, ed il valore numerico della positiva è maggiore del valore numerico della negativa. Dunque: *le due radici sono di segno contrario, e la maggiore in valore assoluto è la positiva.*

208. Riassumendo, possiamo osservare che nel caso + + + si hanno due permanenze, e le radici sono ambedue negative; nel caso + — + si hanno due variazioni, e le radici sono tutte e due positive; nel caso + + — si ha prima una permanenza e poi una variazione, e

le radici sono una negativa, e l'altra positiva, e la maggiore in valore assoluto è la negativa; nel caso $+--$ si ha prima una variazione e poi una permanenza, e le radici sono una positiva e l'altra negativa, e la maggiore in valore assoluto è la positiva. Ne viene la seguente regola dovuta a Descartes:

REGOLA DEI SEGNI.* *Se le radici dell' equazione* $ax^2+bx+c=0$ *sono reali, allora:

1°. Si hanno tante radici positive quanto sono le variazioni, e tante radici negative quante sono le permanenze;

***2°. La maggiore in valore assoluto è la positiva o la negativa secondochè, nel leggere l'equazione, si incontra prima una variazione od una permanenza.* ***

Riassunto della discussione.

Equazione $ax^2+bx+c=0$.

Radici $x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; $x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$b^2-4ac>0$ *Due radici reali e disuguali.*
$b^2-4ac=0$ *Due radici reali ed eguali.*
$b^2-4ac<0$ *Due radici immaginarie.*

$b^2-4ac \geqq 0$:
- $+++$ *Due radici reali negative.*
- $+-+$ *Due radici reali positive.*
- $++-$ *Due radici reali di segno contrario, e la maggiore in valore assoluto è la negativa.*
- $+--$ *Due radici reali di segno contrario, e la maggiore in valore assoluto è la positiva.*

---

* Anche prima di risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$, possiamo sapere se le sue radici saranno reali od immaginarie; e posto che siano reali, se sono eguali o disuguali, qual è il loro segno, qual è il segno di quella che ha valore numerico maggiore. Basta a tal fine applicare le cose precedentemente dette. In pratica conviene tenere l'ordine seguente:

1°. *Se a, c sono di segno contrario, il discriminante è positivo, e le radici sono certamente reali.*

2°. *Se a, c hanno lo stesso segno, si considerano i valori numerici di a, b, c.*

α) Se il quadrato di quel di mezzo è inferiore al quadruplo del prodotto dei due estremi, le radici sono immaginarie. (Infatti: dire che è $b^2<4ac$, è lo stesso che dire che è $b^2-4ac<0$).

β) Se il quadrato di quel di mezzo è eguale al quadruplo del prodotto dei due estremi, le due radici sono reali ed eguali. (Infatti: dire che è $b^2=4ac$, è lo stesso che dire che e $b^2-4ac=0$).

γ) Se il quadrato di quel di mezzo è superiore al quadruplo del prodotto dei due estremi, le radici sono reali e disuguali. (Infatti: dire che è $b^2>4ac$, è lo stesso che dire che è $b^2-4ac>0$).

3°. *Se le radici sono reali, le variazioni e le permanenze dei termini del* 1°

PROPRIETÀ DELLE RADICI DELL'EQUAZIONE

$$ax^2+bx+c=0. \ *$$

209. TEOREMA 1°. La somma delle due radici dell' equazione $ax^2+bx+c=0$ è eguale al contrario del coefficiente di x diviso pel coefficiente di x^2.

Siano x' ed x'' le radici: dico che si avrà $x'+x''=-{}^b/_a$.

DIMOSTRAZIONE. Per la (6) del § 205 si ha: $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ed $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; e sommando membro a membro, si ha:

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

210. TEOREMA 2°. Il prodotto delle due radici dell' equazione $ax^2+bx+c=0$ è eguale al termine noto diviso pel coefficiente di x^2.

Siano x' ed x'' le due radici: dico che si avrà $x'x''={}^c/_a$.

DIMOSTRAZIONE. Eseguendo il prodotto si ha:

$$x'x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}= \ **$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Osservazione. Se il coefficiente di x^2 è l'unità, possiamo dire che la somma delle radici è eguale al contrario del coefficiente di x, ed il prodotto delle radici è eguale al termine noto. ***

---

membro dell'equazione ci faranno conoscere il segno delle radici, e quale è la maggiore in valore assoluto.

OSSERVAZIONE. In questa ricerca la prima cosa da farsi è osservare se le radici sono reali od immaginarie.

* Queste proprietà furono enunciate e dimostrate per la prima volta da Francesco Viète (1540-1603).

** Si osservi che $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ e $-b-\sqrt{b^2-4ac}$ sono il primo la somma, e l'altro la differenza di $-b$ e di $\sqrt{b^2-4ac}$; e quindi pel teor. 1° § 58 si ha:
$(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})=(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2$.

*** Questi due teoremi ci danno un mezzo assai comodo per verificare le radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Basta infatti osservare se la loro somma è $-{}^b/_a$, e se il loro prodotto è ${}^c/_a$. Se ciò si verifica, le due radici trovate sono le radici dell'equazione data; in caso contrario, si è commesso qualche errore nella risoluzione dell'equazione.

COROLLARIO 1°. Il primo membro dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ è eguale ad un prodotto di tre fattori, il 1° dei quali è il coefficiente di x^2, e gli altri due sono i due binomi che si ottengono sottraendo da x ciascuna delle due radici dell'equazione.

Se x', x'' sono le radici dell'equazione, dico che avremo:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha evidentemente $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Poichè è $x'+x''=-\frac{b}{a}$, sarà $-(x'+x'')=\frac{b}{a}$; eponendo $-(x'+x'')$ al posto di $\frac{b}{a}$, ed $x'x''$ al posto di $\frac{c}{a}$, si ha:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a[x^2-(x'+x'')x+x'x'']=$$
$$=a[x^2-x'x-x''x+x'x'']=a[(x^2-x'x)-(x''x-x'x'')]= *$$
$$=a[(x-x')x-(x-x')x'']=a(x-x')(x-x''). **$$

Osservazione. Se $a=1$, il 1° membro dell'equazione è eguale ad $(x-x')(x-x'')$.

COROLLARIO 2°. Un trinomio di 2° grado in x si può sempre mettere sotto la forma di un prodotto di tre fattori, il 1° dei quali è il coefficiente di x^2, e gli altri due sono i binomi che risultano sottraendo da x ciascuna delle radici di quell'equazione che si ottiene eguagliando a zero il trinomio dato.

Ciò risulta immediatamente dal corollario precedente. ***

Osservazione. Quando è $a=1$, il prodotto è $(x-x')(x-x'')$.

APPLICAZIONI.

211. COSTRUZIONE DELL'EQUAZIONE DI 2° GRADO AD UNA INCOGNITA DI CUI SONO NOTE LE RADICI.

Problema. *Si costruisca l'equazione di 2° grado in x le cui radici sono $^3/_4$ e $^5/_6$.*

Risoluzione. *1° Metodo.* Dividendo per a tutti i termini dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, si ottiene l'equazione equivalente $x^2+{}^b/_a x+{}^c/_a=0$.

---

* Mettendo in evidenza in $x^2-x'x$ il fattore x, ed in $x''x-x'x''$ il fattore x''.

** Mettendo in evidenza il fattore $x-x'$.

*** I due teoremi precedenti ci danno un altro mezzo per riconoscere *a priori* il segno delle radici reali dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Infatti:

Se a, c hanno egual segno, (pel teor. 2°) le due radici hanno pure egual segno; e (pel teor. 1°) questo segno sarà contrario al segno di b.

Se a, c hanno segno contrario, (pel teor. 2°) le due radici hanno pure segno contrario; e (pel teor. 1°) la maggiore in valore assoluto è quella il cui segno è contrario al segno di b.

Di questa equazione pei teoremi 1° e 2° dei §§ 209, 210, si ha: $-\frac{b}{a}=\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$. Da cui:

$$\frac{b}{a}=-\frac{19}{12};\quad \frac{c}{a}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

Risposta. *L'equazione cercata è* $x^2-\frac{19}{12}x+\frac{5}{8}=0$.

2° Metodo. Poichè $x'={}^3/_4$ ed $x''={}^5/_6$, sarà $x-x'=x-{}^3/_4$ ed $x-x''=x-{}^5/_6$; e ponendo eguale ad 1 il coefficiente x^2, avremo (per la osserv. al coroll. 2° § 210) che il 1° membro dell'equazione cercata è $(x-{}^3/_4)(x-{}^5/_6)$.

Risposta. *L'equazione cercata è* $(x-{}^3/_4)(x-{}^5/_6)=0$.

Osservazione. Per ordinare l'equazione ottenuta col 2° metodo, basta eseguire il prodotto e fare la riduzione dei termini simili. Si ottiene allora $x^2-{}^3/_4x-{}^5/_6x+{}^3/_4.{}^5/_6=0$, ossia $x^2-{}^{19}/_{12}x+{}^5/_8=0$. *

212. DATA UN'EQUAZIONE DI 2° GRADO IN x, DI CUI SI CONOSCE GIÀ UNA RADICE, SI TROVI L'ALTRA RADICE SENZA RISOLVERE L'EQUAZIONE COL METODO ORDINARIO.

Problema. *Dell'equazione* $2x^2+3x+1=0$, *una radice è* -1; *si trovi l'altra radice.*

Risoluzione. Dividendo tutti i termini dell'equazione per 2, si ha l'equazione equivalente $x^2+{}^3/_2x+{}^1/_2=0$.

1° Metodo. Poichè la somma delle due radici è $-{}^3/_2$, ed una di esse è -1, l'altra sarà $-{}^3/_2-(-1)=-{}^3/_2+1=-{}^1/_2$.

2° Metodo. Poichè il prodotto delle due radici è ${}^1/_2$, ed una di esse è -1, l'altra sarà ${}^1/_2:(-1)=-{}^1/_2$.

Risposta. *Le due radici sono* $x'=-1$; $x''=-{}^1/_2$.

213. SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI 2° GRADO IN x, IN UN PRODOTTO DI FATTORI DI 1° GRADO IN x.

Problema. *Si scomponga il trinomio* $16x^2+16x+3$ *in un prodotto di fattori di 1° grado in x.*

Risoluzione. Si eguaglia a zero il trinomio dato, e si ottiene l'equazione $16x^2+16x+3=0$, della quale si trovano le radici che sono $x'=-{}^1/_4$ ed $x''=-{}^3/_4$. Pel corollario 2° § 210, il trinomio dato è eguale a $16(x-x')(x-x'')$. Ora $x-x'=x-(-{}^1/_4)=x+{}^1/_4$, $x-x''=x-(-{}^3/_4)=x+{}^3/_4$. Avremo quindi:

Risposta. *Il trinomio dato è eguale a* $16(x+{}^1/_4)(x+{}^3/_4)$. **

---

* Volendo far scomparire i denominatori, basterà moltiplicare tutti i termini per un multiplo di 12 e di 8; p.e. per 24, ed allora si otterrà l'equazione equivalente $24x^2-{}^{19}/_{12}.24x+{}^5/_8.24=0.24$, ossia $24x^2-38x+15=0$.

** Portando il fattore 16 entro la prima parentesi, si ha $16(x+{}^1/_4)(x+{}^3/_4)=(16x+16.{}^1/_4)(x+{}^3/_4)$, ossia $(16x+4)(x+{}^3/_4)$. Portando invece il fattore 16 entro

Osservazione. I fattori di 1° grado in x saranno razionali, irrazionali od immaginari, secondochè tali sono le radici dell'equazione ottenuta. Perciò se le radici sono irrazionali, il trinomio non si può scomporre in un prodotto di fattori razionali di 1° grado in x; e se sono immaginarie, il trinomio non si può scomporre in un prodotto di fattori reali di 1° grado in x.

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 2° GRADO.

214. Un problema algebrico ad una incognita si dice di 2° grado se tale è l'equazione che lo rappresenta.

Alla risoluzione algebrica dei problemi di 2° grado è applicabile tutto ciò che si disse sulla risoluzione algebrica dei problemi di 1° grado. Bisogna però osservare che, siccome un' equazione di 2° grado ha sempre due radici, converrà verificare in ogni caso se le radici trovate soddisfano tutte alle condizioni imposte dal problema, e rigettare come estranee quelle che non vi soddisfano. Le radici immaginarie, salvo casi rarissimi, indicano impossibilità nel problema.

Per la discussione (salvo casi eccezionalissimi) si comincia ad eliminare quei valori delle lettere pei quali il discriminante dell' equazione (o di qualcuna delle equazioni) di 2° grado è negativo. Pel resto si procede come nella discussione dei problemi di 1° grado.

215. ***Problema.*** *Si trovino due numeri la cui somma sia b, ed il cui prodotto sia c.*

Risoluzione. Se x è il 1° numero, il 2° sarà $b-x$. Poichè il loro prodotto deve essere c, avremo $x(b-x)=c$, ossia $bx-x^2=c$, ossia $x^2-bx+c=0$, le cui radici sono $x'=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$, ed $x''=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

I due numeri x', x'' sono tali che è $x'+x''=b$, ed $x'x''=c$. Se si prende per 1° numero x', il 2° sarà x''; e, se si prende per 1° numero x'', il 2° sarà x'. * Ne segue:

Risposta. *I numeri cercati sono le due radici di* $x^2-bx+c=0$.

---

la 2ª parentesi, si ha: $16(x+{}^1/_4)(x+{}^3/_4)=(x+{}^1/_4)(16x+16.{}^3/_4)=(x+{}^1/_4)(16x+12)$. Potremo quindi scrivere:

$16x^2+16x+3=16(x+{}^1/_4)(x+{}^3/_4)=(16x+4)(x+{}^3/_4)=(x+{}^1/_4)(16x+12)$.

* Ciò si può vedere anche direttamente così:

Se poniamo il primo eguale a $\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$, il secondo sarà $b-\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}=\dfrac{2b-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\dfrac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Se poniamo il primo eguale a $\dfrac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$, il secondo sarà $b-\dfrac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\dfrac{2b-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}=\dfrac{b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

Esempio. Si trovino due numeri la cui somma sia $-\frac{8}{3}$, *ed il prodotto sia* -1.

Nel caso nostro è $b=-\frac{8}{3}$, $c=-1$. I numeri cercati saranno perciò le radici dell' equazione $x^2-(-\frac{8}{3})x+(-1)=0$, ossia dell'equazione $x^2+\frac{8}{3}x-1=0$. Queste radici sono $x'=\frac{1}{3}$, $x''=-3$; e quindi:

Risposta. I due numeri cercati sono $\frac{1}{3}$, e -3.

CAPO SESTO.

Equazioni esponenziali e Logaritmi.

EQUAZIONI ESPONENZIALI.

216. DEFINIZIONE. Un' equazione intera, su cui siano state fatte tutte le riduzioni, si dice *esponenziale* se contiene qualche incognita negli esponenti.

Esempio. Sono esponenziali le equazioni $3^x=5$, e $7^{2x+3}=4x-2$.

La più semplice equazione esponenziale è $a^x=b$, ove a, b sono numeri noti. Noi ci occuperemo solo di questa equazione, ed escluderemo dalla nostra considerazione i valori immaginari di a, b, x, ed i valori $a=0$, $b=0$.

217. TEOREMA 1°. L'equazione $a^x=1$, per a positivo e diverso da uno, ha la sola soluzione $x=0$.

DIMOSTRAZIONE. 1°. *Ha la soluzione* $x=0$, perchè $a^0=1$.

2°. *Non ha altra soluzione fuorchè* $x=0$. Infatti: se avesse un' altra soluzione, p.e. $x=m$, sarebbe $a^m=1$. Ma poichè si ha pure $a^0=1$, sarebbe $a^m=a^0$, il che (teor. 5° § 194) non può essere se non è $m=0$.

218. TEOREMA 2°. L'equazione $a^x=b$, per a positivo e b negativo, non ha soluzione.

DIMOSTRAZIONE. Se in queste ipotesi $a^x=b$ avesse una soluzione, questa sarebbe un numero positivo od un numero negativo. Ora nessuno di questi numeri può essere radice della nostra equazione. Infatti per defin. (osserv. 2ª § 197) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\left(\frac{1}{a}\right)^x$. Ora se a è positivo, $\frac{1}{a}$ sarà pure positivo, ed allora, qualunque sia il valore numerico di x, razionale od irrazionale, (pel teor. 4° § 193 ed osserv. 3ª § 197) le potenze a^x ed $(\frac{1}{a})^x$, ossia a^x ed a^{-x} saranno positive, e quindi non potranno mai essere eguali al numero negativo b. Dunque.....

219. TEOREMA 3°. L'equazione $a^x=b$, per a, b positivi ed a diverso da uno, ha sempre una soluzione.

Il caso di $b=1$ *fu già considerato nel teor.* 1° § 217; *ci riman-*

gono a considerare i quattro casi: *1°.* $a>1$ e $b>1$; *2°.* $a<1$ e $b<1$; *3°.* $a>1$ e $b<1$; *4°.* $a<1$ e $b>1$.

DIMOSTRAZIONE. ***1° Caso.*** $a>1$, $b>1$. Elevando a alle successive potenze intere e positive, cominciando dalla potenza a^0, avremo:

a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, ...

Se fra queste potenze ve n'è una, p.e. a^μ, eguale a b, il teorema è dimostrato; e μ sarà la radice cercata. In caso contrario, sarà sempre possibile trovare due potenze consecutive, p.e. a^m ed a^{m+1}, tali che sia $a^m<b$, ed $a^{m+1}>b$, ossia $a^m<b<a^{m+1}$. *

Per fissare le idee, poniamo p.e. $m=4$, ed avremo $a^4<b<a^5$.

Consideriamo ora le potenze a^4, $a^{4,1}$, $a^{4,2}$, $a^{4,3}$, $a^{4,4}$, $a^{4,5}$, $a^{4,6}$, $a^{4,7}$, $a^{4,8}$, $a^{4,9}$, a^5. Se ve n'è una, p.e $a^{4,6}$ eguale a b, sarà 4,6 il valore cercato di x, ed il teorema è dimostrato. In caso contrario, poichè b è compreso fra a^4 ed a^5, esisteranno due potenze consecutive, p.e. $a^{4,5}$ ed $a^{4,6}$, tali che sia $a^{4,5}<b$, ed $a^{4,6}>b$; ossia $a^{4,5}<b<a^{4,6}$.

Consideriamo ora le potenze $a^{4,50}$, $a^{4,51}$, $a^{4,52}$, $a^{4,53}$, $a^{4,54}$, $a^{4,55}$, $a^{4,56}$, $a^{4,57}$, $a^{4,58}$, $a^{4,59}$, $a^{4,60}$. Se ve n'è una, p.e. 4,52, eguale a b, sarà 4,52 il valore cercato di x, ed il teorema è dimostrato. In caso contrario, poichè b è compreso fra 4,5 e 4,6, esisteranno due potenze consecutive, p.e. $a^{4,52}$ ed $a^{4,53}$, tali che sia $a^{4,52}<b$, ed $a^{4,53}>b$; ossia $a^{4,52}<b<a^{4,53}$.

Si considerino poi le potenze $a^{4,520}$, $a^{4,521}$, $a^{4,522}$, $a^{4,523}$, $a^{4,524}$, $a^{4,525}$, $a^{4,526}$, $a^{4,527}$, $a^{4,528}$, $a^{4,529}$, $a^{4,530}$: e continuando per questa via, o si finirà per trovare un numero razionale μ tale che sia $a^\mu=b$, ed allora il teorema è dimostrato; oppure si potrà continuare così all'indefinito senza mai trovare un numero razionale μ tale che sia $a^\mu=b$.

In questo 2° caso, si avranno due classi di esponenti che rappresento con M ed M'; e due classi di potenze che rappresento con a^M ed $a^{M'}$.

M'		M	$a^{M'}$		a^M
4		5	a^4	$<b<$	a^5
4,5		4,6	$a^{4,5}$	$<b<$	$a^{4,6}$
4,52		4,53	$a^{4,52}$	$<b<$	$a^{4,53}$
....		....	....		....
....		....	....		....
....		....	....		....
....		....	....		....
....	μ	....	....	a^μ	....

Le classi M, M' sono contigue, ** epperciò individueranno un numero positivo $\mu=(M, M')$.

* Ciò è sempre possibile, perchè fra le potenze intere positive di $a>1$ ve ne sono alcune minori di b, ed altre maggiori di b. Infatti $a^0=1$, e quindi $a^0<b$; e (pel teor. 1° § 190) qualunque sia b, esistono potenze di a che sono maggiori di b.

** Le classi M, M' sono contigue. Infatti: 1°. *Sono illimitate*, perchè, per ipotesi, si può continuare indefinitamente senza mai trovare un numero razionale μ tale che sia $a^\mu=b$. 2°. *Ogni numero di M è per ipotesi maggiore di ogni numero di M'*. 3°. *La*

Se $\mu=(M, M')$, le classi a^M, $a^{M'}$ (pel teor. § 196) sono contigue, epperciò individuano un numero che (per la definiz. del § 197) è a^μ; e si avrà $a^\mu=(a^M, a^{M'})$. Ma, per ipotesi, ogni numero di a^M è maggiore di b, ed ogni numero di $a^{M'}$ è minore di b; dunque b è il limite delle classi a^M ed $a^{M'}$: si ha cioè $b=(a^M, a^{M'})$.

Da $a^\mu=(a^M, a^{M'})$ e $b=(a^M, a^{M'})$ si avrà (pel teor. 1° § 138) $a^\mu=b$. Dunque: *L'equazione $a^x=b$ per $a>1$ e $b>1$, ha sempre una soluzione positiva.*

2° Caso. $a<1$, $b<1$. Sarà $1/a>1$ ed $1/b>1$; ed allora, (pel 1° Caso), esisterà un numero positivo μ per cui è $\left(\frac{1}{a}\right)^\mu=\frac{1}{b}$, ossia $\frac{1^\mu}{a^\mu}=\frac{1}{b}$, ossia $\frac{1}{a^\mu}=\frac{1}{b}$; da cui si ha $a^\mu=b$. * Dunque: *L'equazione $a^x=b$ per a, b positivi ed $a<1$, $b<1$, ha sempre una soluzione positiva.*

3° Caso. $a>1$, $b<1$. Sarà $1/a<1$; ed allora essendo $1/a<1$, e $b<1$, (pel 2° Caso) esisterà un numero positivo μ tale che sia $\left(\frac{1}{a}\right)^\mu=b$, ossia $\frac{1^\mu}{a^\mu}=b$, ossia $\frac{1}{a^\mu}=b$, ossia (osservazione 2ª § 197) $a^{-\mu}=b$. Dunque: *L'equazione $a^x=b$ per a, b positivi ed $a>1$ e $b<1$, ha sempre una soluzione negativa.*

4° Caso. $a<1$, $b>1$. Sarà $1/a>1$; ed essendo $1/a>1$ e $b>1$, (pel 1° Caso) esisterà un numero positivo μ tale che sia $\left(\frac{1}{a}\right)^\mu=b$, ossia $\frac{1}{a^\mu}=b$, ossia $a^{-\mu}=b$. Dunque: *L'equazione $a^x=b$ per a, b positivi ed $a<1$ e $b>1$, ha sempre una soluzione negativa.*

220. TEOREMA 4°. L'equazione $a^x=b$ per a, b positivi ed a diverso da uno, ha una sola soluzione.

Nel teor. preced. si è dimostrato che, in queste ipotesi, la $a^x=b$ ha sempre una soluzione; si vuole ora dimostrare che ne ha una sola.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esistano due numeri x ed x' tali che sia contemporaneamente $a^x=b$ ed $a^{x'}=b$.

Dividendo membro a membro le due eguaglianze, si avrà $\frac{a^x}{a^{x'}}=\frac{b}{b}$, ossia $a^{x-x'}=1$. Ma essendo $a^0=1$, (pel teor. 5° § 194) non può essere che sia $a^{x-x'}=1$, se non è $x-x'=0$, ossia $x=x'$.

---

differenza fra un numero di M ed un numero di M' può divenire inferiore a qualsiasi numero positivo e arbitrariamente piccolo. Infatti: La differenza fra due termini corrispondenti, che da prima è 1, poi è $1/10$, poi $1/100$; e continuando così, la si può rendere arbitrariamente piccola. Dunque M, M' sono contigue. Si può osservare ancora che μ è positivo, perchè sono positivi i numeri delle classi M ed M' che lo individuano.

* Perchè se due frazioni eguali hanno eguali i numeratori, hanno eguali anche i denominatori.

CONCLUSIONE. L'equazione $a^x = b$ per a, b positivi, ed a diverso da uno, ammette sempre una, ed una sola, soluzione. Questa soluzione è *zero* se $b = 1$; è *positiva* se a, b sono entrambi maggiori di 1, od entrambi minori di 1; è *negativa* se a, b sono uno maggiore di 1, e l'altro minore di 1.

221. Cerchiamo ora a quali condizioni devono soddisfare i due numeri a, b, affinchè l'equazione $a^x = b$ abbia per radice un numero razionale, limitando la nostra ricerca al caso di *a intero, positivo, diverso da* 1, *e b razionale.*

Affinchè x sia razionale, è necessario e sufficiente che si possa scrivere $x = \pm {}^m/_n$, ove m ed n sono due numeri interi, positivi, primi fra loro. Quindi l'equazione $a^x = b$ deve poter assumere la forma $a^{\pm\frac{m}{n}} = b$. *

Le condizioni cui a, b debbono soddisfare ci sono date dai due seguenti teoremi.

222. TEOREMA 5°. Affinchè l'equazione $a^x = b$, per a intero positivo diverso da 1, e b razionale, abbia per radice un numero razionale positivo, è necessario e sufficiente che b sia intero positivo; che a, b contengano i medesimi fattori primi; e che gli esponenti dei fattori primi di a siano rispettivamente proporzionali agli esponenti dei fattori primi di b.

DIMOSTRAZIONE. ***Parte 1ª. Queste condizioni sono necessarie.*** **

Se x deve essere razionale positivo, si deve avere $a^{+\frac{m}{n}} = b$. Elevando ambi i membri di $a^{\frac{m}{n}} = b$ alla potenza n^a si ottiene $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = b^n$, ossia $a^{\frac{m}{n}.n} = b^n$, ossia $a^m = b^n$. Poichè, per ipotesi, a è intero positivo, tale sarà pure a^m ed il suo eguale b^n; e se b^n è intero, anche *b sarà intero.****

Inoltre *b è positivo*, perchè se fosse negativo, (pel teor. 2° § 218) la $a^x = b$ non avrebbe soluzione.

Essendo $a^m = b^n$, qualunque numero primo che divida a, dividerà

---

* Infatti: se x è razionale, deve essere un intero od una frazione, la quale si può sempre supporre irreducibile. Se x è intero, p.e. $x = 3$, sarebbe $x = {}^3/_1$ e quindi $m = 3$, $n = 1$.

** Si dimostra che sono necessarie dimostrando che se $a^x = b$ ha per radice un numero razionale positivo, si devono necessariamente verificare queste condizioni.

*** Infatti: essendo b razionale, se non fosse intero, sarebbe una frazione (che possiamo supporre irreducibile) p.e. $b = \frac{p}{q}$, essendo q diverso da 1; ed allora sarebbe $b^n = \frac{p^n}{q^n}$. Per un noto teor. d'aritm. se $\frac{p}{q}$ è irreducibile, con q diverso da 1, tale sarà pure $\frac{p^n}{q^n}$, ossia b^n; il che non può essere perchè b^n è intero. Dunque anche b è intero.

a^m, e quindi il suo eguale b^n, e quindi b. * Viceversa, qualunque numero primo che divida b, dividerà b^n, e quindi il suo eguale a^m, e quindi a. Dunque ogni numero primo che divida a divide anche b, ed ogni numero primo che divida b divide anche a; ossia *a, b devono contenere i medesimi fattori primi.*

Supponiamo p.e. che α, β siano i fattori primi di a, essi saranno pure i fattori primi di b; e supponiamo che, scomponendo a, b in fattori primi, si abbia p.e. $a=\alpha^r.\beta^s$; $b=\alpha^{r'}.\beta^{s'}$. Si avrà allora $a^m=(\alpha^r.\beta^s)^m=\alpha^{rm}.\beta^{sm}$, e $b^n=(\alpha^{r'}.\beta^{s'})^n=\alpha^{r'n}.\beta^{s'n}$. Dovendo essere $a^m=b^n$, dovrà essere $\alpha^{rm}.\beta^{sm}=\alpha^{r'n}.\beta^{s'n}$, ossia ** $\alpha^{rm}=\alpha^{r'n}$ e $\beta^{sm}=\beta^{s'n}$, ossia *** $rm=r'n$ ed $sm=s'n$. Dividendo membro a membro le due eguaglianze, si ha: $\frac{rm}{sm}=\frac{r'n}{s'n}$, ossia $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$. Dunque: *Gli esponenti dei fattori primi di a devono essere rispettivamente proporzionali agli esponenti dei medesimi fattori primi di b.*

Parte 2ª. Queste condizioni sono sufficienti. ****

Siano per ipotesi a, b interi positivi, ed $a=\alpha^r.\beta^s$ e $b=\alpha^{r'}.\beta^{s'}$, ove α, β, r, s, r', s' sono numeri primi, ed $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$. Dico che, in queste ipotesi, x è razionale e positivo.

Infatti: Se nella proporzione $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$ cambiamo fra loro i due estremi, avremo $\frac{s'}{s}=\frac{r'}{r}$; e se chiamiamo k il valore comune dei rapporti $\frac{s'}{s}=\frac{r'}{r}$, avremo $\frac{s'}{s}=\frac{r'}{r}=k$. Da $\frac{r'}{r}=k$ si ha (pel coroll. § 66) $r'=kr$, e da $\frac{s'}{s}=k$ si ha $s'=ks$. Ma abbiamo, per ipotesi, $b=\alpha^{r'}.\beta^{s'}$. Sostituendo adunque in $\alpha^{r'}.\beta^{s'}$ ad r', s', i loro valori kr, ks, si avrà $b=\alpha^{r'}.\beta^{s'}=\alpha^{kr}.\beta^{ks}=(\alpha^r.\beta^s)^k=a^k$.

Ecco quindi che si ha $b=a^k$, ossia $a^k=b$, in cui k è un numero razionale positivo, perchè quoto di due numeri interi positivi. *****

---

* Infatti: sappiamo dall'Aritmetica che se un numero primo divide una base (intera e positiva), dividerà qualunque potenza (intera e positiva) di quella base; e viceversa, se un numero primo divide una potenza (intera e positiva) di una base (intera e positiva), dividerà la base.

** Perchè si sa dall'Aritmetica che, affinchè due prodotti di fattori primi siano eguali, è necessario e sufficiente che contengano i medesimi fattori primi elevati rispettivamente alla medesima potenza.

*** Perchè (pel teor. 5º § 194) se due potenze d'egual base sono eguali, sono pure eguali gli esponenti.

**** Si dimostra che sono sufficienti dimostrando che, se sono soddisfatte, l'equazione $a^x=b$ dà per x un numero razionale positivo.

***** Si è messa la condizione che b sia razionale; perchè se si ammettono valori irrazionali di b, può essere che sia x razionale, e b non intero. Infatti: sia p.e.

223. TEOREMA 6°. Affinchè l'equazione $a^x=b$, per a intero positivo diverso da 1, e b razionale, abbia per radice un numero razionale negativo, è necessario e sufficiente che b abbia la forma $\frac{1}{q}$ (essendo q intero positivo diverso da 1); che a, q contengano i medesimi fattori primi; e che gli esponenti dei fattori primi di a siano rispettivamente proporzionali agli esponenti dei fattori primi di q.

DIMOSTRAZIONE. ***Parte 1ª. Queste condizioni sono necessarie.***

Se x deve essere razionale negativo, si deve avere $a^{-\frac{m}{n}}=b$, ossia $a^{\frac{-m}{n}}=b$. Elevando ambi i membri di $a^{\frac{-m}{n}}=b$ alla potenza n^a, si ottiene $\left(a^{\frac{-m}{n}}\right)^n=b^n$, ossia $a^{\frac{-m}{n}\cdot n}=b^n$, ossia $a^{-m}=b^n$, ossia $\frac{1}{a^m}=b^n$, ove m, n (per ipotesi) sono positivi.

Essendo a, m numeri interi positivi, tale sarà pure a^m; e quindi $\frac{1}{a^m}$ sarà una frazione irreducibile. Ma $\frac{1}{a^m}=b^n$; dunque b^n non può essere un numero intero; epperciò neppure b sarà intero. *

Dunque b sarà una frazione che possiamo supporre irreducibile; e potremo scrivere $b=\frac{p}{q}$, ove p, q sono numeri interi primi fra loro, e q diverso da 1. Sarà allora $\frac{1}{a^m}=b^n=\left(\frac{p}{q}\right)^n=\frac{p^n}{q^n}$, ossia $\frac{1}{a^m}=\frac{p^n}{q^n}$, da cui segue $1=p^n$ ed $a^m=q^n$. **

Se è $p^n=1$, sarà $p=1$ ***; dunque $b=\frac{1}{q}$, *ove q è un numero intero positivo.*

$b=\sqrt[3]{a}$, ove $\sqrt[3]{a}$ è un radicale aritmetico. Se a è un numero intero positivo, non cubo esatto, (pel teor. § 159) $\sqrt[3]{a}$, ossia b, non sarà razionale; epperciò (pel teor. § 156) è un numero irrazionale. Avremo quindi $\sqrt[3]{a}=b$; ossia $a^{\frac{1}{3}}=b$; ove si vede che a è intero positivo, x razionale, e b non intero.

Inoltre se si ammettono per b valori irrazionali, non ha più senso ciò che si disse sulla scomposizione in fattori primi; perchè i teoremi d'Aritmetica che trattano della scomposizione in fattori primi suppongono che i numeri siano interi.

* Infatti se b fosse intero, tale sarebbe b^n, il che è falso.

** Infatti essendo $\frac{p}{q}$ irreducibile con q diverso da 1, tale sarà $\frac{p^n}{q^n}$; e se due frazioni irreducibili sono eguali, devono avere eguali i numeratori ed eguali i denominatori.

*** Perchè essendo p, n interi positivi, se fosse $p>1$ (pel teor. 1° § 190) sarebbe $p^n>1$, il che è falso.

Se è $a^m = q^n$, ragionando su $a^m = q^n$ come nel teor. preced. si è ragionato su $a^m = b^n$, si conchiude che a, q *sono composti dei medesimi fattori primi; e che gli esponenti dei fattori primi di a sono rispettivamente proporzionali agli esponenti dei fattori primi di q.*

Parte 2ª. Queste condizioni sono sufficienti.

Infatti: Sia $a = \alpha^r.\beta^s$ e $b = \frac{1}{q}$. Sia $q = \alpha^{r'}.\beta^{s'}$, e quindi sia $b = \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha^{r'}.\beta^{s'}}$; e sia ancora $\frac{r'}{r} = \frac{s'}{s}$, ove α, β, r, s, r', s' sono numeri interi positivi, ed α, β numeri primi. Dico che in $a^x = b$ il valore di x sarà razionale negativo.

Infatti: ragionando come nel teor. preced. si ha $\frac{r'}{r} = \frac{s'}{s} = k$, ossia $r' = kr$ ed $s' = ks$, ove k è un numero razionale positivo. Sostituendo kr ad r' e ks ad s', si avrà $b = \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha^{kr}.\beta^{ks}} = \frac{1}{(\alpha^r.\beta^s)^k} = \frac{1}{a^k} = a^{-k}$. Ossia $a^{-k} = b$, ove $-k$ è un numero razionale negativo.

COROLLARIO. Affinchè l'equazione $10^x = b$, ove b è un numero razionale positivo, abbia per radice un numero razionale, è necessario e sufficiente che b sia una potenza intera (positiva o negativa) di 10.

DIMOSTRAZ. Poichè $a = 10 = 2^1.5^1$, è $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $r = s = 1$; dovrà essere $r' = s'$, e quindi $b = \alpha^{r'}.\beta^{s'} = 2^{r'}.5^{r'} = (2.5)^{r'} = 10^{r'}$. Oppure $b = \frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha^{r'}.\beta^{s'}} = \frac{1}{2^{r'}.5^{r'}} = \frac{1}{(2.5)^{s'}} = \frac{1}{10^{r'}} = 10^{-r'}$, ove (per ipotesi) r' è un numero intero positivo.

Osservazione. Questo corollario si può anche esprimere così:

Nell'equazione $10^x = b$, con b razionale positivo, x è razionale solamente quando è intero.

DEFINIZIONE E PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LOGARITMI. *

224. DEFINIZIONE. Dicesi *logaritmo di un numero b nella base a* (essendo a un numero diverso da zero e da uno) l'esponente della potenza a cui bisogna elevare a per ottenere b.

Se x è il logaritmo di b nella base a, sarà per definizione $a^x = b$.**

---

* Il primo germe della teoria dei logaritmi si trova già nel libro intitolato *Arenaria* di Archimede, celebre matematico siciliano, nato a Siracusa nel 287 av. Cr., e morto ivi nel 212. Però la vera scoperta dei logaritmi, e la loro denominazione, sono dovute allo scozzese Giovanni Napier (leggasi Neper) Barone di Merchiston nato a Merchiston presso Edimburgo nel 1550, e morto nel 1617. Daremo più tardi l'etimologia di *logaritmo*.

** Si escludono $a = 0$ ed $a = 1$, perchè, siccome per ogni valore di x è $0^x = 0$ ed $1^x = 1$, se b è diverso da zero e da 1, non potrà essere $0^x = b$ nè $1^x = b$.

Per indicare che x è il logaritmo di b nella base a, si suole anche scrivere $\log_a b = x$, che si legge *logaritmo b nella base a eguale x.* *

Esempio 1º. Poichè $3^2 = 9$, si scriverà $\log_3 9 = 2$; e si dirà che il logaritmo di 9 nella base 3 è 2.

Esempio 2º. Poichè è $5^4 = 625$, si scriverà $\log_5 625 = 4$; e si dirà che il logaritmo di 625 nella base 5 è 4.

Osservazione 1ª. La base a dei logaritmi è un numero arbitrario, purchè diverso da zero e da uno. Noi supporremo inoltre che sia sempre reale positivo; epperciò in tutto quello che diremo sui logaritmi sarà sempre sottinteso che *la base è un numero reale, positivo, diverso da zero e da uno.*

Osservazione 2ª. Dalla definizione segue immediatamente che il logaritmo di un numero b nella base a è la radice dell'equazione esponenziale $a^x = b$.

Ponendo *base dei logaritmi* invece di a, e *logaritmo* invece di x, i teoremi sull'equazione esponenziale $a^x = b$ si potranno enunciare così:

225. TEOREMA 1º. Qualunque sia la base dei logaritmi, il logaritmo di 1 è *zero*. (Teor. 1º § 217).

TEOREMA 2º. I numeri negativi non hanno logaritmo. (Teorema 2º § 218). **

TEOREMA 3º. Qualunque sia la base, il logaritmo della base è 1. (Infatti per definizione si ha $a^1 = a$).

TEOREMA 4º. Ogni numero positivo ha sempre un logaritmo ed uno solo. (Teoremi 3º e 4º §§ 219, 220).

TEOREMA 5º. Il logaritmo di ogni numero positivo che non sia eguale ad 1 nè eguale alla base è positivo e maggiore di 1 se la base ed il numero sono entrambi maggiori di 1, od entrambi minori di 1; è negativo se la base ed il numero sono uno maggiore di 1 e l'altro minore di 1. (Conclusione § 220).

Potremo pure, nei teoremi sulle potenze, sostituire *logaritmo* ad *esponente;* ed in particolare, trattando di logaritmi riferiti tutti alla medesima base, avremo:

TEOREMA 6º. Se due numeri sono eguali, i loro logaritmi sono pure eguali; e viceversa. *** (Teorema 5º § 194).

---

* Si osservi che per definiz. $a^x = b$ e $\log_a b = x$ sono la stessa cosa.

** Per questo motivo non prenderemo mai il logaritmo di un numero negativo; e se prenderemo il logaritmo di qualche espressione algebrica, sottintenderemo sempre esclusi quei valori delle lettere che la rendono negativa.

*** La 1ª parte del teorema si può anche enunciare così: *Prendendo il logaritmo di ciascuno dei due membri d'una eguaglianza, si ottiene ancora un'eguaglianza.*

TEOREMA 7°. Di due numeri disuguali il maggiore ha un logaritmo maggiore se la base è maggiore di 1; il maggiore ha un logaritmo minore se la base è minore di 1. (Teor. 5° § 194).

Hanno grande importanza pratica le proprietà dei logaritmi espresse dai quattro teoremi seguenti, nei quali è sottinteso che i logaritmi sono tutti riferiti ad una medesima base. Per semplicità di scrittura, ometteremo l'indicazione della base, e scriveremo p.e. $\log b = x$ invece di $\log_a b = x$. Si suole fare così quando si suppone nota la base dei logaritmi.

226. TEOREMA 8°. Il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

Dico che si avrà p.e. $\log(bb'b'') = \log b + \log b' + \log b''$.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. $a^x = b$, $a^{x'} = b'$, $a^{x''} = b''$.

Moltiplicando membro a membro queste eguaglianze, si ottiene: $a^x . a^{x'} . a^{x''} = b . b' . b''$, ossia $a^{x+x'+x''} = bb'b''$; e quest'eguaglianza si può leggere $\log(bb'b'') = x + x' + x''$.

Poichè per ipotesi è $a^x = b$, sarà $x = \log b$; similmente è $x' = \log b'$, ed $x'' = \log b''$.

Sostituendo in $\log(bb'b'') = x + x' + x''$ ad x, x', x'' i loro valori $\log b$, $\log b'$, $\log b''$, si ha: $\log(bb'b'') = \log b + \log b' + \log b''$. *

227. TEOREMA 9°. Il logaritmo di un quoto è eguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo ed il logaritmo del divisore.

Dico che si avrà p.e. $\log \frac{b}{b'} = \log b - \log b'$.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. $a^x = b$, $a^{x'} = b'$.

Dividendo membro a membro queste due eguaglianze, si ottiene: $a^x : a^{x'} = b : b'$, ossia $a^{x-x'} = \frac{b}{b'}$, che si può leggere $\log \frac{b}{b'} = x - x'$.

Sostituendo in $\log \frac{b}{b'} = x - x'$ ad x, x' i loro valori $\log b$ e $\log b'$, si ha $\log \frac{b}{b'} = \log b - \log b'$. **

228. TEOREMA 10°. Il logaritmo d'una potenza è eguale al prodotto dell'esponente pel logaritmo della base.

Qualunque sia il numero m, dico che si avrà p.e. $\log b^m = m . \log b$.

---

* Quando il numero di cui si prende il logaritmo ha la forma di polinomio o di prodotto, lo si chiude in parentesi. ESEMPIO. Volendo indicare che si prende il logaritmo di $m^4 - 3mn + p$, o di bcd, si scrive $\log(m^4 - 3mn + p)$ e non $\log m^4 - 3mn + p$; si scrive $\log(bcd)$ e non $\log bcd$.

** Il teorema si può anche enunciare così: *Il logaritmo d'una frazione è eguale alla differenza fra il logaritmo del numeratore ed il logaritmo del denominatore.*

Dimostrazione. Sia p.e. $a^x = b$. Elevando ambi i membri alla potenza m^a, si ha $(a^x)^m = b^m$, ossia $a^{mx} = b^m$ che si può leggere $\log b^m = mx$.

Sostituendo ad x il suo valore $\log b$, si ha: $\log b^m = m.\log b$. *

229. TEOREMA 11°. Il logaritmo d'un radicale aritmetico è eguale al quoto del logaritmo del radicando per l'indice della radice.

Qualunque sia il numero m, dico che si avrà $\log \sqrt[m]{b} = \frac{\log b}{m}$.

Dimostrazione. Si ha per definiz. (§ 186) $\sqrt[m]{b} = b^{\frac{1}{m}}$. E quindi (pel teor. preced.) $\log b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m} \log b = \frac{\log b}{m}$. Dunque $\log \sqrt[m]{b} = \frac{\log b}{m}$. **

Osservazione. Si osservi che i quattro ultimi teoremi ci danno un modo di trovare il logaritmo di un prodotto, di un quoto, di una potenza, e di un radicale aritmetico, senza conoscere il valore del prodotto, del quoto, della potenza, o del radicale. Non abbiamo però alcun teorema analogo riguardo alla somma ed alla differenza. Perciò quando si avesse da trovare il logaritmo di una somma o di una differenza, si cerca prima il valore della somma o della differenza, e poi si trova il logaritmo del risultato ottenuto. Si stia quindi attenti a non scrivere p.e. $\log(b+b') = \log b + \log b'$, oppure $\log(b-b') = \log b - \log b'$; poichè (pei teor. 8°, 9° §§ 226, 227) $\log b + \log b' = \log(bb')$, e $\log b - \log b' = \log \frac{b}{b'}$.

CARATTERISTICA E MANTISSA DEI LOGARITMI.

230. Quando il logaritmo di un numero è irrazionale, se ne trova un valore approssimato sotto forma di numero decimale avente un certo numero di cifre decimali, generalmente cinque o sette. La parte intera del logaritmo si chiama *caratteristica;* la parte decimale, *mantissa*.

---

* Se fosse scritto $\log x.m$, sarebbe incerto se si voleva scrivere $(\log x)m$, oppure $\log(mx)$. L'incertezza sarebbe tolta se si convenisse che $\log x.m$ rappresenta o l'una o l'altra delle scritture $(\log x)m$, $\log(mx)$. Si è convenuto di scrivere $\log(mx)$ quando si prende il logaritmo del prodotto mx, e di scrivere $m.\log x$ quando si moltiplica per m il logaritmo di x. Ed in generale, quando si moltiplica un logaritmo per un'espressione qualsiasi, si suole mettere il logaritmo come ultimo fattore del prodotto. Così p.e. si suole scrivere $(b^2+3c)\log x$ e non $(\log x)(b^2+3c)$.

** Non si confonda $\log\frac{b}{m}$ con $\frac{\log b}{m}$, perchè (pel teor. 9° § 227) $\log\frac{b}{m} = \log b - \log m$, mentre $\frac{\log b}{m} = (\log b):m$. In pratica volendo scrivere che $\log b$ si divide per m, si scriva $(\log b):m$, oppure $\frac{1}{m}\log b$, oppure $\frac{\log b}{m}$ segnando (in quest'ultimo caso) il tratto orizzontale sufficientemente lungo da togliere ogni ambiguità.

Il logaritmo di ogni numero avrà perciò due parti, cioè la caratteristica e la mantissa.

Esempio 1º. Se 3,45789 è un logaritmo, la sua caratteristica è 3, e la sua mantissa è 45789.

Esempio 2º. Se $-2{,}56314$ è un logaritmo, la sua caratteristica e la sua mantissa sono entrambe negative, ed i loro valori numerici sono rispettivamente 2 e 56314. *

LOGARITMI NEGATIVI E LOGARITMI MISTI.

231. Sovente è scomodo far uso di logaritmi negativi con caratteristica e mantissa negative, come sarebbe p.e. il logaritmo $-2{,}56314$. A questi logaritmi si dà un'altra forma; ed ecco in che modo.

Si abbia p.e. il logaritmo negativo $-2{,}46892$. Si ha evidentemente $-2{,}46892=-3+3-2{,}46892=-3+(3-2{,}46892)=-3+0{,}53108$.

Il binomio $-3+0{,}53108$ è la somma algebrica di due parti, di cui la prima -3 è negativa, e la seconda $0{,}53108$ è positiva. Per comodità di scrittura si suole scriverlo così: $\overline{3}{,}53108$, ponendo il segno — al disopra del 3 per indicare che non si riferisce a tutto il numero 3,53108, ma solamente alla parte intera 3. Avremo quindi $-2{,}46892=\overline{3}{,}53108$.

Analogamente si avrebbe $-1{,}25671=-2+2-1{,}25671=$ $=-2+(2-1{,}25671)=-2+0{,}74329=\overline{2}{,}74329$, ossia: $-1{,}25671=\overline{2}{,}74329$.

Similmente $-0{,}21345=-1+1-0{,}21345=-1+(1-0{,}21345)=$ $=-1+0{,}78655=\overline{1}{,}78655$. Ossia: $-0{,}21345=\overline{1}{,}78655$.

I logaritmi della forma $\overline{3}{,}53108$ rappresentano, per definizione, un binomio della forma $-3+0{,}53108$, ed hanno caratteristica negativa e mantissa positiva. Li chiameremo *logaritmi misti*. Ne segue che un logaritmo negativo si può scrivere sotto due forme; cioè sotto la forma di logaritmo a mantissa negativa (ed allora è della forma $-2{,}46892$), o sotto la forma di logaritmo a mantissa positiva, ossia di logaritmo misto. (ed allora è della forma $\overline{3}{,}53108$). **

REGOLA. Per passare dall'una all'altra delle due forme di scrittura di un medesimo logaritmo negativo, si osservi che:

1º. Quando si alza il segno — si aumenta la caratteristica d'una unità; e quando si abbassa il segno — si diminuisce la caratteristica d'una unità.

---

* Non è escluso il caso in cui la caratteristica o la mantissa sono zero. P.e. nel logaritmo 0,48561 la caratteristica è zero e la mantissa è 48561. Nel logaritmo 5 la caratteristica è 5, e la mantissa è zero.

** È di grande utilità pratica saper passare rapidamente da un logaritmo negativo scritto sotto una delle due forme, al medesimo logaritmo scritto sotto l'altra forma.

2°. La mantissa cercata si ottiene scrivendo, per ordine, quanto manca a ciascuna cifra della mantissa data per arrivare a 9; e, per l'ultima cifra a destra, quanto manca per arrivare a 10.

La 1ª parte della regola è sufficientemente spiegata dagli esempi recati. Quanto alla 2ª si osservi che:

1°. Per passare da un logaritmo a mantissa negativa al logaritmo misto, p.e. dal logaritmo $-2,46892$ al logaritmo $\overline{3},53108$, si scrive $-2,46892 = -3+(3-2,46892)$. La caratteristica di $\overline{3},53108$ è il numero che sta fuori parentesi, e la mantissa si ottiene dalla sottrazione $3-2,46892$, ossia dalla sottrazione $3,00000-2,46892$, la quale, eseguita col metodo solito, dà la ragione della 2ª parte della regola.

2°. Per passare da un logaritmo misto al logaritmo a mantissa negativa, p.e. da $\overline{3},53108$ a $-2,46892$, si scrive $\overline{3},53108$ sotto forma binomiale $-3+0,53108$. Eseguendo l' operazione indicata, si trova la ragione della 2ª parte della regola.

SISTEMA DI LOGARITMI.

232. DEFINIZIONE. Dicesi *sistema di logaritmi* l'insieme dei logaritmi di tutti i numeri presi rispetto alla medesima base.

Esempio. L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri nella base 7 forma *il sistema dei logaritmi di base 7*. L'insieme dei logaritmi di tutti i numeri nella base 10 forma *il sistema dei logaritmi di base 10*.

Si suole far uso di due soli sistemi di logaritmi, e sono quello che ha per base 10, e quello che ha per base il numero irrazionale 2,718281828459045......., numero che si suole rappresentare, per codità, con *e*.

Logaritmi naturali. I logaritmi di base *e* si chiamano *logaritmi naturali*, od *iperbolici*, o *neperiani* (da Napier che si legge *Neper*).

Logaritmi decimali. I logaritmi di base 10 si chiamano *logaritmi decimali* o *volgari*.

I logaritmi naturali godono di importantissime proprietà che ne fanno preferire l'uso nelle considerazioni d'indole teorica. Poichè il nostro sistema di numerazione ha per base il 10, i logaritmi decimali presentano, dal lato pratico, tali vantaggi da farne preferire l'uso in quasi tutti i calcoli numerici.

Osservazione. In ciò che segue ci occuperemo solamente dei logaritmi decimali. Scriveremo quindi semplicemente log. invece di $\log_{10}$.

LOGARITMI DECIMALI.

233. DEFINIZIONE. Dicesi *logaritmo decimale* di un numero l'esponente da dare al 10 per ottenere il numero dato.

Esempio 1°. Il logaritmo decimale di 100 è 2, perchè $10^2=100$.

Esempio 2°. Il logaritmo decimale di $\frac{1}{1000}$ è -3, perchè si ha $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$.

I due enunciati del coroll. del § 223 si possono ora esprimere così:

1°. Fra i numeri razionali, tutte, e sole, le potenze intere (positive o negative) di 10 * hanno per logaritmo decimale un numero razionale.

2°. Il logaritmo decimale di un numero razionale è razionale solamente quando è intero.

Dai teoremi 1°, 2°, 3°, 4°, 5° del § 225 risulta che:

I logaritmi decimali dei numeri maggiori di 1 sono positivi, e quelli dei numeri minori di 1 sono negativi. **

Il logaritmo decimale di 1 è zero, ed il logaritmo decimale di 10 è 1.

234. TEOREMA 1°. La mantissa del logaritmo decimale di un numero decimale non cambia se questo si moltiplica, o si divide, per una potenza intera e positiva di 10; ma la caratteristica viene aumentata, o diminuita, di tante unità quante sono le unità dell'esponente della potenza del 10 per cui si è moltiplicato, o diviso il numero. ***

DIMOSTRAZIONE. Si abbia p.e. il numero A, e sia n un numero intero positivo. Pei teor. dei §§ 226, 227, 228, e perchè $\log 10=1$ si ha:

$$\log(A.10^n)=\log A+\log 10^n=\log A+n\log 10=\log A+n.$$
$$\log(A:10^n)=\log A-\log 10^n=\log A-n\log 10=\log A-n.$$

Ora se $\log A$ è un numero intero, $\log A+n$ sarà pure un numero intero, perchè somma di due numeri interi. Quindi il logaritmo di $A.10^n$ (ossia $\log A+n$) avrà la stessa mantissa (zero) del logaritmo di A; ed avrà per caratteristica quella del logaritmo di A aumentata di n.

Se $\log A$ non è un numero intero, (contentandoci di averne il valore esatto p.e. fino alla 7ª cifra decimale) sarà un numero decimale; e quindi il logaritmo di $A.10^n$ (ossia $\log A+n$) sarà la somma di un numero decimale e di un numero intero. Ora eseguendo una tal somma, la parte decimale (cioè la mantissa) non muta, e la parte intera (cioè la caratteristica) resta aumentata di n. Analogamente si ragiona sopra $\log A-n$.

Esempio 1°. Se il logaritmo di 537 è 2,72997, il logaritmo di 537.10^3, ossia di 537000 sarà $2,72997+3=5,72997$.

---

* Ossia tutti e soli i numeri della forma ..... $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000...

** Se nell' equazione $10^x=b$ il numero positivo b cresce oltre ogni limite, anche x cresce oltre ogni limite. Si esprime questo dicendo che *il logaritmo decimale di infinito è infinito*, e si scrive $log+\infty=+\infty$. Similmente, quando il numero positivo b, conservandosi positivo, decresce oltre ogni limite, x è negativo e, in valore assoluto, cresce oltre ogni limite. Si esprime questo dicendo che *il logaritmo decimale di zero è meno infinito*, e si scrive $log\ 0=-\infty$.

*** È sottinteso che i logaritmi si suppongono scritti con mantissa positiva.

Esempio 2º. Se il logaritmo di 0,00537 è $\overline{3},72997$, il logaritmo di $0,00537 . 10^4$, ossia di 53,7, sarà $\overline{3},72997+4=1,72997$. *

Esempio 3º. Se il logaritmo di 6543 è 3,81578, il logaritmo di $6543 : 10^2$, ossia di 65,43, sarà $3,81578-2=1,81578$.

Esempio 4º. Se il logaritmo di 0,06543 è $\overline{2},81578$, il logaritmo di $0,06543 : 10^3$, ossia di 0,00006543, sarà $\overline{2},81578-3=\overline{5},81578$. **

Esempio 5º. Se il logaritmo di 65,43 è 1,81578, il logaritmo di $65,43 : 10^3$, ossia di 0,06543, sarà $1,81578-3=\overline{2},81578$. ***

COROLLARIO. I logaritmi decimali di due numeri che differiscono solamente pel numero di zeri finali, o pel posto occupato dalla virgola decimale, hanno egual mantissa positiva.

Infatti uno dei due numeri si può ottenere dall'altro moltiplicandolo, o dividendolo, per una conveniente potenza intera e positiva di 10.

235. TEOREMA 2º. La caratteristica del logaritmo decimale di un numero positivo maggiore di 1 è positiva, ed ha tante unità quante sono le cifre della parte intera del numero dato meno una.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. 348. Dico che la caratteristica del suo logaritmo decimale ha $3-1=2$ unità. Infatti: essendo 348 compreso fra $100=10^2$ e $1000=10^3$, il suo logaritmo decimale è compreso fra il logaritmo di 10^2 ed il logaritmo di 10^3, ossia fra 2 e 3; avrà perciò per caratteristica 2.

Sia p.e. 7842,81. Dico che la caratteristica del suo logaritmo decimale avrà $4-1=3$ unità. Infatti: essendo 7842,81 compreso fra $1000=10^3$ e $10000=10^4$, il suo logaritmo decimale sarà compreso fra il logaritmo di 10^3 ed il logaritmo di 10^4, ossia fra 3 e 4; avrà perciò per caratteristica 3.

236. TEOREMA 3º. La caratteristica del logaritmo decimale di un numero positivo minore di 1 è negativa; e se il logaritmo ha la mantissa positiva, la caratteristica avrà tante unità quanti sono gli zeri, più uno, compresi fra la virgola decimale e la prima cifra significativa del numero dato. ****

DIMOSTRAZIONE. Dico p.e. che se il logaritmo di 0,0041 è scritto con mantissa positiva, avrà per caratteristica —3.

---

* Infatti: $\overline{3},72997+4=-3+0,72997+4=1+0,72997=1,72997$.

** Perchè si ha: $\overline{2},81578-3=-2+0,81578-3=-5+0,81578=\overline{5},81578$.

*** Infatti: $1,81578-3=1+0,81578-3=-2+0,81578=\overline{2}.81578$.

**** Il teorema 2º ed il teorema 3º si possono riunire in uno solo dicendo:

TEOREMA. *Nel logaritmo decimale a mantissa positiva, la caratteristica ha tante unità quante sono le cifre intere del numero dato meno una; oppure quanti sono gli zeri compresi fra la virgola decimale e la prima cifra significativa più uno, secondochè il numero dato è maggiore o minore dell'unità. La caratteristica poi è positiva o negativa secondochè il numero dato è maggiore o minore dell'unità.*

Infatti: 0,0041 si può ottenere da 4,1 dividendo 4,1 per 10^3. Pel teorema precedente, il logaritmo di 4,1 ha per caratteristica *zero*; dunque (pel teor. 1° § 234) il logaritmo di 0,0041 avrà per caratteristica $0-3$, ossia -3.

Osservazione. *Se il logaritmo ha la mantissa negativa, il valore numerico della caratteristica ha un'unità di meno.* Ciò risulta immediatamente dalla regola del § 231.

TAVOLE DI LOGARITMI.

237. Facendo uso di vari metodi forniti dall'Algebra Superiore, si può trovare il valore esatto del logaritmo di un numero quando questo logaritmo è razionale; e quando il logaritmo è irrazionale, se ne può trovare il valore sotto forma di numero decimale con una approssimazione grande quanto si desidera. Poichè la ricerca del logaritmo di un numero è, in generale, un'operazione lunga e laboriosa, i matematici, per facilitarla, costrussero apposite tavole.

Una tavola di logaritmi consta essenzialmente di due colonne: nella 1ª si trovano, per ordine, i numeri interi da 1 fino ad un certo numero; e nella 2ª (accanto a ciascun numero della 1ª) vi è il logaritmo corrispondente.

Poichè la caratteristica di ogni numero intero o decimale è data dai teoremi 2° e 3° dei §§ 235, 236, le tavole danno solamente le mantisse; queste poi sono tutte positive. *

La prima tavola di logaritmi fu costrutta da Napier, ha per base il numero e, e fu pubblicata nel 1614. Napier vide dipoi che, pei calcoli numerici, sono assai più adatti i logaritmi di base 10, e concepì l'idea di costruirne una tavola. Mancandogli però il tempo, ne suggerì l'idea a Briggs, il quale costruì e pubblicò nel 1618 la 1ª tavola di logaritmi decimali. ** Dopo se ne costrussero varie altre.

Le tavole pubblicate dai diversi autori differiscono fra loro:

1°. *Per l'estensione della tavola*, la quale estensione è indicata dal maggior numero intero di cui si dà il logaritmo.

2°. *Pel numero di cifre decimali con cui è dato il logaritmo.*

3°. *Per la disposizione* data ai numeri della tavola.

* Per avere i logaritmi dei numeri interi, è sufficiente calcolare direttamente i logaritmi dei numeri primi, perchè, per mezzo di questi, (pei teor. 8°, 10° §§ 226, 228) si trovano gli altri con grande facilità.

Esempio. Conoscendo il logaritmo di 2, 3, 5, si trovano facilmente i logaritmi di 9, 10, 12. Infatti:

Essendo $9=3^2$, sarà $\log 9=\log 3^2=2.\log 3$.

Essendo $10=2.5$, sarà $\log 10=\log(2.5)=\log 2+\log 5$.

Essendo $12=2^2.3$, sarà $\log 12=\log(2^2.3)=\log 2^2+\log 3=2.\log 2+\log 3$.

** Enrico Briggs nacque nel Yorkshire verso il 1556, e morì, professore d'Astronomia all'Università di Oxford, nel 1630.

4°. *Per alcune aggiunte* destinate a rendere più spedito l'uso della tavola.

Osservazione. In ogni tavola si è aumentato d'una unità l'ultima cifra del logaritmo ogni volta che la 1ª cifra trascurata era maggiore di 4.

Ordinariamente, ogni tavola di logaritmi è preceduta da una prefazione destinata a spiegare la disposizione della tavola ed il modo di servirsene.

DISPOSIZIONE DELLE TAVOLE DI LOGARITMI. *

238. Nella prima colonna a sinistra intitolata N si trovano, per ordine, tutti i numeri interi di cui si dà il logaritmo. Nella colonna intitolata O sono segnate le mantisse dei logaritmi di questi numeri. Però, siccome varie mantisse successive hanno eguali le due prime ** cifre, queste sono segnate una volta sola (la 1ª volta).

Esempio. La mantissa del logaritmo di 871 è 94002; quella di 872 è 94052; quella di 873 è 94101; quella di 874 è 94151. Le prime due cifre, cioè 94, furono scritte solo pel logaritmo di 871, ed ommesse pei successivi.

Le colonne intitolate 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, danno le mantisse dei logaritmi di quei numeri che hanno per decine i numeri della colonna N. Il seguente esempio ne chiarirà meglio la disposizione e l'uso.

Esempio. Si trovi la mantissa del logaritmo di 8935. Il numero di incontro della orizzontale intitolata 893, e della verticale intitolata 5, dà le ultime cifre della mantissa cercata; nel caso nostro è 109. Le prime due si cercano nella colonna O, e si trova 95; e quindi la mantissa cercata è 95109. ***

La differenza fra due mantisse consecutive si chiama *differenza tavolare*, e varia da un punto all'altro della tavola. P.e. la differenza tavolare di due mantisse consecutive contenute nella tavola della pag. 163, è 4, o 5, o 6.

Nell' ultima colonna a destra, intitolata *P. P.* (prodotti parziali), sono segnate le differenze tavolari, e le due colonnine collocate sotto ciascuna differenza contengono, quella di sinistra i numeri interi da 1 a 9, e quella di destra i rispettivi prodotti della differenza tavolare per 1 decimo, 2 decimi, 3 decimi, ecc. 9 decimi, ossia per 0,1, 0,2, 0,3... 0,9. Vedremo in seguito l'uso di questi prodotti.

---

* Le tavole più in uso hanno la disposizione di quella della pag. 163, che è la XX delle tavole di logaritmi annesse al trattato di Trigonometria Piana del prof. Faifofer. Ciò che diremo di queste tavole servirà, con poche modificazioni, anche per le altre.

** Per prima cifra d'una mantissa intenderemo la prima cifra a sinistra.

*** I numeri che sono preceduti da asterisco prendono (nella colonna O) per prime due cifre non le due precedenti, ma le due seguenti. Esempio. La mantissa del logaritmo di 8916 ha per ultime cifre 017, e per prime due non 94, ma 95; epperciò è 95017.

Alcuni autori, invece d'un asterisco, pongono una lineetta sopra o sotto le ultime cifre della mantissa.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
860	93 450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419

N. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 P. P.

P. P.

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

USO DELLE TAVOLE DI LOGARITMI.

239. L'uso delle tavole si impara risolvendo i due seguenti problemi:

PROBLEMA 1º. Dato un numero se ne trovi il logaritmo.

Poichè la caratteristica è data dai teoremi 2°, 3° dei §§ 235, 236, basterà cercare la mantissa.

1º Caso. *Il numero è intero e non è superiore al maggior numero intero della tavola.*

Esempio 1º. *Si cerchi il logaritmo di* 868.

La caratteristica è 2; cerchiamo la mantissa.

Nella colonna N si cerca 868. Nella colonna 0, accanto ad 868 si trova 852, ma mancano le due prime cifre; e quelle che si trovano risalendo sono 93. Dunque la mantissa cercata è 93852. Si avrà quindi $\log 868 = 2{,}93852$.

Esempio 2º. *Si cerchi il logaritmo di* 8680.

La caratteristica è 3, e la mantissa è quella del logaritmo di 868.

Dunque: $\log 8680 = 3{,}93852$.

Esempio 3º. *Si cerchi il logaritmo di* 8698.

La caratteristica è 3; cerchiamone la mantissa.

Nella colonna N si cerca 869. Nella colonna 0, accanto ad 869 mancano le due prime cifre; e quelle che si trovano risalendo sono 93. Dunque 93 sono le due prime cifre della mantissa. All'incontro della orizzontale 869 e della verticale 8, trovo 942; dunque 942 sono le tre ultime cifre della mantissa, la quale sarà 93942. Perciò avremo: $\log 8698 = 3{,}93942$.

2º Caso. *Il numero è decimale e non è superiore al maggior numero intero della tavola.*

Pel teor. 1° § 234, si comincia a trasportare la virgola decimale in modo da avere nella parte intera il maggior numero possibile contenuto nella tavola; e la mantissa di questo numero sarà la mantissa cercata. Per trovarla, si osservi che il numero ottenuto collo spostamento della virgola sarà compreso fra due numeri consecutivi della tavola; e, supponendo che ad aumenti minori di 1 nel numero corrispondano aumenti proporzionali nella mantissa *, si troverà facilmente la mantissa cercata.**

Esempio 1º. *Si trovi il logaritmo di* 89,6458.

La caratteristica è 1. Il massimo numero non superiore al maggior numero della tavola che si può ottenere da 89,6458 collo spostamento della virgola decimale, è 8964,58. Cercheremo perciò la mantissa del logaritmo di 8964,58.

* Questa proporzionalità veramente non esiste. Però, trattandosi di numeri superiori a 1000, e di mantisse con 5 cifre decimali, si può ammettere che esista, poichè l'errore che così si commette non può influire sul valore delle prime cinque cifre della mantissa.

** Si ricordi che le mantisse date dalle tavole sono tutte positive.

I due numeri interi consecutivi fra cui è compreso 8964,58 sono 8964 ed 8965. Dunque la mantissa cercata sarà compresa fra le mantisse dei logaritmi di 8964 e di 8965.

Numero	*Mantissa*	*Diff. tavol.*
8964	95250	5
8965	95255	

Dallo specchietto si vede che, quando il numero aumenta d'un'unità, (cioè si passa da 8964 ad 8965) la mantissa aumenta di 5 (si passa cioè da 95250 a 95255). Aumentando il numero di 0,58 (passando cioè da 8964 ad 8964,58), di quanto si dovrà aumentare la mantissa?

Quest'aumento è evidentemente il quarto termine della proporzione: (Aum. di 1 nel num):(diff. tavol) = (Aum. fraz. nel num):(Aum. nella mant)

E, nel caso nostro, se x è l'aumento della mantissa, avremo:

$$1:5=0{,}58:x, \qquad \text{da cui} \qquad x=\frac{5\times 0{,}58}{1}=2{,}90.$$

La mantissa deve quindi essere aumentata di 2,90, e noi la aumenteremo di 3. * Dunque: $\log 89{,}6458=1{,}95253$. **

Esempio 2°. Si trovi il logaritmo di 0,0008792467.

La caratteristica è $\overline{4}$. Il massimo numero non superiore al maggior numero della tavola che si possa ottenere da 0,0008792467 collo spostamento della virgola decimale, è 8792,467. Cercheremo perciò la mantissa del logaritmo di 8792,467.

Operando come nell'esempio precedente, si trova che la mantissa del logaritmo di 8792 è 94409. La differenza fra questa mantissa e la mantissa

---

* Nell'aumento della mantissa si trascura sempre la parte decimale; e se la prima cifra trascurata è superiore a 4, si aumenta di 1 l'ultima cifra non trascurata.

** Poichè la proporzione ha in ogni caso la forma della precedente, l'aumento da darsi alla mantissa è sempre il prodotto della differenza tavolare per l'aumento frazionario del numero.

Poichè $0{,}58=5\,dec.+8\,cent.$, sarà:

$$5\times 0{,}58=5(5\,dec.+8\,cent.)=5\times 5\,dec.+5\times 8\,cent.$$

Nella colonnina posta sotto il 5 della colonna P. P. sono già eseguiti i prodotti $5\times 5\,dec.$ e $5\times 8\,dec.$ Per avere il prodotto $5\times 8\,cent.$, basta dividere per 10 il prodotto $5\times 8\,dec.$ La tavoletta dà $5\times 8\,dec.=4{,}0$; perciò $5\times 8\,cent.=4{,}0:10=0{,}40$.

La tavoletta dà pure $5\times 5\,dec.=2{,}5$. Avremo quindi:

$$5\times 0{,}58=5.(5\,dec.+8\,cent.)=5\times 5\,dec.+5\times 8\,cent.=2{,}5+0{,}40=2{,}90.$$

Questo è il risultato ottenuto con la moltiplicazione diretta di 5 per 0,58. Mediante le tavolette delle colonne P. P. si risparmia così la moltiplicazione della differenza tavolare per l'aumento frazionario del numero. Si vede che, in pratica, l'operazione si riduce a fare la somma $\begin{array}{r}2{,}5\\+0{,}40\\\hline 2{,}90\end{array}$, ossia più comodamente $\begin{array}{r}2{,}5\\40\\\hline 2{,}90\end{array}$.

successiva è 5. L'aumento da dare alla mantissa sarà $5 \times 0,467 = 2,335$, cioè 2. Dunque: $\log 0,0008792467 = \overline{4},94411$. *

3º Caso. Il numero è intero o decimale, ed è superiore al maggior numero intero della tavola.

Il numero di cifre intere ci fa conoscere la caratteristica; poi si colloca la virgola decimale in modo da ottenere nella parte intera il maggior numero possibile non superiore al maggior numero della tavola. La mantissa del logaritmo di questo numero sarà la mantissa cercata.

Esempio. Si trovi il logaritmo di 897583.

La caratteristica è 5. La mantissa è quella del logaritmo di 8975,83. Operando come nel 2º Caso, si trova che la mantissa del logaritmo di 8975,83 è 95307. Dunque: $\log 897583 = 5,95307$.

4º Caso. Il numero è una frazione ordinaria.

Si potrebbe trasformare la frazione ordinaria in decimale, e poi trovare il logaritmo come nel 2º Caso, o come nel 3º Caso. Però è generalmente più comodo far uso del teorema 9º § 227.

Esempio 1º. Si trovi il logaritmo della frazione impropria $\frac{878}{875}$.

Si avrà: $\log \frac{878}{875} = \log 878 - \log 875 = 2,94349 - 2,94201 = 0,00148$.

Dunque: $\log \frac{878}{875} = 0,00148$. **

Esempio 2º. Si trovi il logaritmo della frazione propria $\frac{875}{878}$.

$\log \frac{875}{878} = \log 875 - \log 878 = 2,94201 - 2,94349 = -0,00148 =$

$= \overline{1},99852$.

Dunque $\log \frac{875}{878} = \overline{1},99852$.

PROBLEMA 2º. Dato il logaritmo si trovi il numero.

La mantissa dà il numero cercato, indipendentemente dagli zeri finali e dalla posizione della virgola decimale; e la caratteristica dà il numero delle cifre intere e la posizione della virgola decimale.

1º Caso. La mantissa è contenuta nella tavola.

---

* Volendo far uso delle tavolette della colonna P. P. bisognerebbe fare l'operazione $5 \times 0,467 = 5(4\ dec. + 6\ cent. + 7\ mill.) = 5 \times 4\ dec. + (5 \times 6\ dec.):10 + (5 \times 7\ dec.):100 =$
$= 2,0 + 3,0:10 + 3,5:100 = 2,0 + 0,30 + 0,035$.

Basta quindi fare la somma $\begin{array}{r}2,0\\0,30\\0,035\\\hline 2,335\end{array}$, o più semplicemente $\begin{array}{r}2,0\\30\\35\\\hline 2,335\end{array}$.

** Si osservi che se la frazione è propria, cioè minore di 1, il suo logaritmo è negativo; e che il logaritmo che si ottiene dalla sottrazione è tutto negativo, cioè con caratteristica negativa e con mantissa negativa.

Se la frazione è impropria, cioè maggiore di 1, il suo logaritmo è positivo.

Accanto alla mantissa si troverà il numero corrispondente.

Esempio 1°. *Si cerchi il numero corrispondente al logaritmo* 1,95289.

Alla mantissa 95289 corrisponde il numero 8972. La caratteristica ci dice che le cifre intere sono *due;* e quindi il numero cercato è 89,72.

Esempio 2°. *Si cerchi il numero corrispondente al logaritmo* $\bar{3}$,94694.

Alla mantissa 94694 corrisponde il numero 885. La caratteristica $\bar{3}$ ci dice che il numero cercato è minore di 1, e che fra la virgola decimale e la prima cifra significativa vi sono 2 zeri. Dunque il numero cercato è 0,00885.

2° Caso. *La mantissa non è contenuta nella tavola.*

Esempio 1°. *Si cerchi il numero corrispondente al logaritmo* 2,93478.

Poichè la mantissa 93478 non è nella tavola, cerchiamone le due mantisse più prossime, che sono 93475 e 93480, la cui differenza è 5.

Diff. tavol.	***Mantissa***		***Numero***
5	93475	93478	8605
	93480		8606

Poichè la nostra mantissa è compresa fra le mantisse 93475 e 93480, il numero cercato sarà compreso fra 8605 ed 8606. Dunque 8605 sarà la 1ª parte (a sinistra) del numero cercato.

La differenza fra le mantisse 93480 e 93475 è 5. Ciò significa che (in questo punto della tavola) all'aumento di 5 unità della mantissa corrisponde l'aumento d'una unità nel numero. Per passare dalla mantissa 93475 alla nostra mantissa, che è 93478, dobbiamo fare l'aumento di $93478 - 93475 = 3$.

L'aumento da dare al numero sarà perciò il quarto termine della proporzione:

(Diff. tavol.) : 1 = (aumento nella mantissa) : (aumento nel numero).

Ossia, nel caso nostro, chiamando x l'aumento del numero, avremo:

$$5:1 = 3:x, \quad \text{da cui} \quad x = \frac{3.1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Dunque alla mantissa data corrisponde il numero 8605,6.

La caratteristica 2 ci dice che esso ha 3 cifre intere; e quindi il numero cercato è 860,56. *

* Poichè la proporzione ha in ogni caso la forma della precedente, l'aumento frazionario da darsi al numero è sempre il quoto dell'aumento da darsi alla mantissa per la differenza tavolare corrispondente.

Di questo quoto si scrivono solo i decimi ed i centesimi, trascurando le cifre che vengono dopo (se ve ne sono), perchè non sarebbero esatte, e farebbero credere che si sia ottenuta un'approssimazione superiore alla vera. La ragione del fatto sta in ciò

Esempio 2°. Si trovi il numero corrispondente al logaritmo 8,93680.

Alla mantissa 93680 corrisponde il numero 864566. Poichè la caratteristica è 8, il numero cercato ha 9 cifre intere; e noi ne abbiamo trovato 6 sole. Scriveremo quindi 3 zeri alla destra di 864566, ed avremo 864566$\underline{000}$; che è il numero cercato. *

OPERAZIONI CON LOGARITMI.

240. Le addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni con logaritmi positivi, si fanno come quelle dei numeri decimali. Se vi sono logaritmi negativi, si può scriverli con mantissa negativa, e poi fare le operazioni secondo le ordinarie regole dell'Algebra. In ogni caso, se il risultato finale è negativo, si potrà scriverlo con mantissa positiva.

Volendo invece, in tutto il corso dei calcoli, maneggiare solamente logaritmi con mantissa positiva, basta ricordare che un logaritmo misto è un binomio, di cui il termine a sinistra della virgola è negativo, ed il termine a destra della virgola è positivo. Si potrà quindi, nei singoli casi, operare come è indicato nei seguenti esempi.

241. ***ADDIZIONE.*** *Esempio. Si sommino i logaritmi* $\overline{3}$,41678, 2,30245, $\overline{4}$,82216, 1,75340.

Si fa la somma aritmetica delle mantisse; e poichè la somma dei decimi è 22, si scrive 2, e si riportano 2 unità (positive) le quali, sommate con $+1$, -4, $+2$, -3, danno -2. Dunque la caratteristica è $\overline{2}$, e la mantissa (positiva) è 29479.

$$\begin{array}{r} \overline{3},41678 \\ 2,30245 \\ \overline{4},82216 \\ 1,75340 \\ \hline \overline{2},29479 \end{array}$$

Risposta. La somma cercata è $\overline{2}$,29479.

242. ***SOTTRAZIONE.*** *Esempio 1°. Dal logaritmo* $\overline{2}$,54682 *si sottragga il logaritmo* 3,27035.

Si fa la sottrazione aritmetica delle mantisse, e si ha 27647; e poi la sottrazione algebrica delle caratteristiche, e si ha $-2-(+3)=-2-3=-5$.

$$\begin{array}{r} \overline{2},54682 \\ 3,27035 \\ \hline \overline{5},27647 \end{array}$$

Risposta. Il resto cercato è $\overline{5}$,27647.

---

che gli aumenti minori di 1 nel numero non sono rigorosamente proporzionali ai corrispondenti aumenti nelle mantisse. È però utile protrarre la divisione fino ai millesimi per vedere se la prima cifra trascurata è superiore a 4; in tal caso vi è probabilità di accostarsi di più al valor vero aumentando d'una unità la cifra dei centesimi.

Con tavole che diano le mantisse con 5, o 6, o 7 cifre decimali, si possono avere esatte rispettivamente le prime 6, o 7, od 8 cifre (a sinistra) del numero cercato.

* Si sono sottolineati i tre zeri finali per indicare che non si conoscono le tre ultime cifre (a destra) del numero cercato.

Esempio 2°. *Dal logaritmo* 4,21865 *si sottragga il logaritmo* $\overline{3}$,74591.

Si fa la sottrazione aritmetica delle mantisse. Nel caso nostro, per poter fare la sottrazione dei decimi, si aumenta di 10 decimi la mantissa del minuendo; e, per compenso, si diminuisce d'una unità la caratteristica del minuendo stesso. La caratteristica che era 4, diventa 3; e quindi da 3 si sottrarrà la caratteristica —3, e si avrà per caratteristica 3—(—3) = 3+3 = 6. *

$$\begin{array}{r} 4{,}21865 \\ \overline{3}{,}74591 \\ \hline 6{,}47274 \end{array}$$

Risposta. Il resto è 6,47274.

Esempio 3°. *Dal logaritmo* $\overline{3}$,41257 *si sottragga il logaritmo* $\overline{1}$,82145.

Si fa la sottrazione aritmetica delle mantisse; ed affinchè essa sia possibile, si aumenta di 10 decimi la mantissa del minuendo, diminuendone, per compenso, la caratteristica d'una unità. Questa caratteristica da $\overline{3}$ diventa $\overline{4}$ (perchè —3—1=—4). Dalla caratteristica —4 si sottrae la caratteristica —1, e si ha —4—(—1)= —4+1= —3.

$$\begin{array}{r} \overline{3}{,}41257 \\ \overline{1}{,}82145 \\ \hline \overline{3}{,}59112 \end{array}$$

Risposta. Il resto cercato è $\overline{3}$,59112.

243. *MOLTIPLICAZIONE. Esempio.* *Si moltiplichi il logaritmo* $\overline{2}$,54689 *per* 5.

Si moltiplica la mantissa per 5; e poi si osserva che il prodotto dei decimi dà 2 unità (positive) di riporto. Il prodotto delle unità per 5 dà 10 unità negative, le quali, sommate colle due unità positive di riporto, danno per caratteristica —10+2 = —8.

$$\begin{array}{r} \overline{2}{,}54689 \\ 5 \\ \hline \overline{8}{,}73445 \end{array}$$

Risposta. Il prodotto cercato è $\overline{8}$,73445.

244. *DIVISIONE. Esempio.* *Si divida il logaritmo* $\overline{3}$,45689 *per* 5.

Aggiungo mentalmente alla caratteristica tante unità negative quante occorrono per ottenere un numero divisibile pel divisore; e poi altrettante unità positive (sotto forma di decimi) alla mantissa. Nel caso nostro, aggiungo $\overline{2}$ alla caratteristica, e 20 decimi (positivi) alla mantissa. Così ottengo per caratteristica $\overline{5}$, ed allora $\overline{5}$:5 = $\overline{1}$; e questa è la caratteristica del quoto. Nella mantissa del dividendo ottengo 24 decimi che divisi per 5 danno 4 dec. di quoto, e 4 dec. di resto. Poi si continua come nelle divisioni ordinarie. Si ottiene così: $\overline{3}$,45689:5 = $\overline{1}$,49137.

Risposta. Il quoto cercato è $\overline{1}$,49137.

Osservazione 1ª. Continuando la divisione, si otterrebbe al quoto 8; e, poichè la prima cifra trascurata è maggiore di 4, si ha maggior ap-

* Si opera così quando la mantissa del minuendo è minore di quella del sottraendo.

prossimazione aumentando d'una unità l'ultima cifra scritta. Quindi invece di $\overline{1},49137$ si scriverà $\overline{1},49138$.

Osservazione 2ª. Quando il moltiplicatore od il divisore non sono interi, positivi e d'una sola cifra, è più comodo scrivere il logaritmo colla mantissa negativa, eseguire la moltiplicazione o la divisione secondo le regole ordinarie, e poi, se il risultato è negativo, scriverlo con la mantissa positiva.

PASSAGGIO DA UN SISTEMA DI LOGARITMI AD UN ALTRO.

245. ***PROBLEMA.*** *Si hanno solamente le tavole dei logaritmi nella base a, e di un certo numero m si vuole il logaritmo nella base b.*

Risoluzione. Se x è il logaritmo cercato, cioè il logaritmo di m nella base b, per la definizione del § 224, si ha $b^x = m$.

Facendo uso delle tavole che abbiamo, prendiamo il logaritmo d'ambi i membri di questa eguaglianza, ed otterremo (teorema 6° § 225), $\log_a b^x = \log_a m$; ossia $x.\log_a b = \log_a m$.

E, dividendo ambi i membri per $\log_a b$, si ha: $x = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$.

Ma per ipotesi x è il logaritmo di m nella base b, ossia è $x = \log_b m$;

dunque $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$.

Enuncieremo la risposta sotto forma di regola, così:

REGOLA. Il logaritmo di un numero m nella base b è il quoto del logaritmo di m nella base a pel logaritmo di b nella base a.

Osservazione. Invece di scrivere $\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$, si suole scrivere

$\log_b m = \dfrac{1}{\log_a b}.\log_a m$, ed il numero $\dfrac{1}{\log_a b}$ si chiama il *modulo* per passare dai logaritmi di base a ai logaritmi di base b. *

---

* La parola *Modulo* (dei logaritmi) si trova per la prima volta in una lettera che Ruggero Cotes scrisse a Newton il 25 maggio 1712. (Cotes nacque a Burbach presso Leicester nel 1682, e morì a Cambridge nel 1716). L'idea però di far uso del modulo per passare dai logaritmi di un sistema a quelli di un altro sistema, non è di Cotes; chè anzi già nel 1695 Edmondo Halley (nato ad Haggerston presso Londra nel 1656, e morto, Direttore dell' Osservatorio di Greenwich, nel 1724) aveva pubblicato, con 60 cifre decimali, il valore del modulo per passare dai logaritmi neperiani ai logaritmi decimali.

Il modulo per passare dai logaritmi decimali ai logaritmi naturali è

$$\frac{1}{\log_{10} e} = \frac{1}{0,4342944819.....} = 2,30258509299.....$$

Il modulo per passare dai logaritmi naturali ai logaritmi decimali è

$$\frac{1}{\log_e 10} = \frac{1}{2,30258509299.....} = 0,4342944819.....$$

APPLICAZIONI DEI LOGARITMI

AL CALCOLO DI ESPRESSIONI NUMERICHE.

246. Il calcolo di molte espressioni numeriche riesce assai comodo e spedito facendo uso dei teoremi 8°, 9°, 10°, 11° dei §§ 226, 227, 228, 229; poichè così le moltiplicazioni, le divisioni, le elevazioni a potenza e le estrazioni di radici dei numeri si riducono rispettivamente ad addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, e divisioni sui rispettivi logaritmi. Ne daremo alcuni facili esempi.

Esempio 1º. *Si trovi il valore di* $\frac{68,48 \times 512,34 \times 0,70891}{56,28 \times 0,215}$.

Se x è il valore cercato, avremo: $x = \frac{68,48 \times 512,34 \times 0,70891}{56,28 \times 0,215}$.

Prendendo i logaritmi d'ambi i membri (teorema 6° § 225) si ha:

$$\log x = \log \frac{68,48 \times 512,34 \times 0,70891}{56,28 \times 0,215} =$$
$$= \log(68,48 \times 512,34 \times 0,70891) - \log(56,28 \times 0,215) =$$
$$= \log 68,48 + \log 512,34 + \log 0,70891 - \log 56,28 - \log 0,215.$$

L'operazione si può disporre nel modo seguente:

$$\begin{array}{lcll}
\log 68,48 & = & 1,83556 = 1,83556 & \\
+\log 512,34 & = & 2,70956 = 2,70956 & \\
+\log 0,70891 & = & \bar{1},85059 = \bar{1},85059 & \\
-\log 56,28 & = & -1,75035 = \bar{2},24965 & * \\
-\log 0,215 & = & -\bar{1},33244 = 0,66756 & ** \\
\hline
 & & \log x = 3,31292. &
\end{array}$$

Il numero x corrispondente al logaritmo 3,31292 è 2055,52; e quindi il valore dell'espressione è 2055,52.

---

* Si doveva sottrarre il logaritmo positivo 1,75035. Poichè sottrarre 1,75035 è lo stesso che aggiungere —1,75035 (ossia aggiungere $\bar{2}$,24965), invece di sottrarre il logaritmo positivo 1,75035 si è aggiunto il logaritmo misto $\bar{2}$,24965.

** Si doveva sottrarre $\bar{1}$,33244, ossia —0,66756. Per ciò fare bastò aggiungere il contrario del sottraendo, cioè aggiungere 0,66756.

Si opera analogamente in casi analoghi.

Esempio 2°. *Si trovi il valore di* $0,00516^5$.

Se x è il valore cercato, si ha $x = 0,00516^5$.

Prendendo i logaritmi d'ambi i membri si ha:

$$\log x = \log 0,00516^5 = 5 \log 0,00516 = 5 . \overline{3},71265 = \overline{12},56325.$$

Il numero x corrispondente al logaritmo $\overline{12},56325$ è il numero 0,0000000000036581; e quindi $0,00516^5 = 0,0000000000036581$.

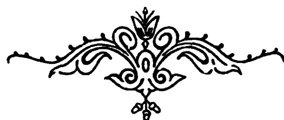
Esempio 3°. *Si trovi il valore aritmetico di* $\sqrt[11]{6874}$.

Se x è il valore cercato, si ha $x = \sqrt[11]{6874}$.

Prendendo i logaritmi d'ambi i membri si ha:

$$\log x = \log \sqrt[11]{6874} = \frac{\log 6874}{11} = \frac{3,83721}{11} = 0,34884.$$

Il numero x corrispondente al logaritmo 0,34884 è 2,23275; e quindi $\sqrt[11]{6874} = 2,23275$.



§ 246

LIBRO TERZO

Proporzioni e progressioni

CAPO PRIMO.

Proporzioni.

DEFINIZIONI - TEOREMI.

247. DEFINIZIONI. 1ª. Quattro numeri presi in un certo ordine formano una *proporzione*, se il quoto del primo pel secondo è eguale al quoto del terzo pel quarto. *

Esempio. Se i numeri a, b, c, d, presi in quest'ordine, formano una proporzione, sarà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La proporzione si suole scrivere anche così: $a:b = c:d$, oppure $a:b::c:d$; e, sotto qualunque forma sia scritta, si legge *a* ***sta a*** *b* ***come*** *c* ***sta a*** *d*. **

---

* Perciò scrivere che quattro numeri, presi in un certo ordine, formano una proporzione (ossia che sono in proporzione) significa scrivere che il quoto del 1° pel 2° è eguale al quoto del 3° pel 4°.

** L'uso delle proporzioni si trova già nei più antichi scritti di matematica che si conoscano. Il segno :: si trova adoperato per la prima volta nella *Clavis mathematica* di Guglielmo Oughtred, pubblicata nel 1631; quivi la proporzione fra i numeri a, b, c, d è scritta $a \cdot b :: c \cdot d$. Quando poi, per opera specialmente di Christian Barone di Wolf (nato in Breslavia nel 1679, e morto ad Halle nel 1754) divenne universale l'uso del punto come segno di moltiplicazione, si introdusse la notazione $a:b::c:d$. Fu poi Alessio Claudio Clairaut (nato a Parigi nel 1713, e morto nel 1765) che cominciò a scrivere $a:b = c:d$.

I quattro numeri si dicono i *termini* della proporzione. Il 1° ed il 3° si chiamano anche *antecedenti;* il 2° ed il 4°, *conseguenti.* Il 1° ed il 4° prendono pure il nome di *estremi;* il 2° ed il 3° di *medi.* *

2ª. Dicesi *rapporto di due numeri* presi in un certo ordine, il quoto del primo pel secondo.

Esempio. Il rapporto di A a B è il quoto $\frac{A}{B}$.

Osservazione. Per questo motivo una proporzione si suole anche definire *l'eguaglianza di due rapporti.* **

248. TEOREMA 1°. Se tutti i termini d'una proporzione, o solamente i due primi, o solamente i due ultimi, si moltiplicano o si dividono per un medesimo numero diverso da zero, si ottiene una nuova proporzione.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, e se m è un numero diverso da zero, si avrà pure:

$$(\alpha)\begin{cases} am:bm=cm:dm \\ am:bm=\ \ c:d \\ a:b\ \ =cm:dm \end{cases} \qquad (\beta)\begin{cases} \frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{c}{m}:\frac{d}{m} \\ \frac{a}{m}:\frac{b}{m}=c:d \\ a:b=\frac{c}{m}:\frac{d}{m} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Da $a:b=c:d$, ossia da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, (pel § 84, 5°) si avrà $\frac{am}{bm}=\frac{cm}{dm}$, $\frac{am}{bm}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{cm}{dm}$, le quali sono le proporzioni (α); ed inoltre $\frac{a:m}{b:m}=\frac{c:m}{d:m}$, $\frac{a:m}{b:m}=\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{c:m}{d:m}$, le quali sono le proporzioni (β).

249. TEOREMA 2°. Se si moltiplicano o si dividono i due primi termini d'una proporzione per un medesimo numero diverso da zero, e poi si moltiplicano o si dividono i due ultimi termini per un altro numero diverso da zero, si ottiene una nuova proporzione.

---

* I termini d'una proporzione devono essere tutti di valore definito, (Osserv. 5ª § 68) ed il 3° ed il 4° (essendo divisori) devono anche essere diversi da zero. Per maggior comodità, se non diremo espressamente il contrario, sarà sempre sottinteso che i termini delle proporzioni di cui faremo uso saranno tutti di valore definito e diverso da zero.

** È importante osservare che una proporzione fra quattro numeri, è, in sostanza, l'eguaglianza di due frazioni; i numeratori si dicono *antecedenti*, i denominatori *conseguenti.* I teoremi sulle proporzioni non sono quindi altro che teoremi sulle frazioni, esposti con diversa terminologia.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, e se m, n sono numeri diversi da zero, si avrà pure:

$$(\gamma)\begin{cases} am:bm=cn:dn\,; \\ \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}=cn:dn\,; \end{cases} \qquad (\gamma')\begin{cases} am:bm=\dfrac{c}{n}:\dfrac{d}{n}\,; \\ \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}=\dfrac{c}{n}:\dfrac{d}{n}\,. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Pel § 84, 5°, da $a:b=c:d$, ossia da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si ha $\frac{am}{bm}=\frac{cn}{dn}$, $\frac{a:m}{b:m}=\frac{cn}{dn}$, $\frac{am}{bm}=\frac{c:n}{d:n}$, $\frac{a:m}{b:m}=\frac{c:n}{d:n}$, le quali sono le proporzioni (γ) e (γ').

250. TEOREMA 3°. Se si moltiplicano o si dividono i due antecedenti, oppure i due conseguenti, d'una proporzione per un medesimo numero diverso da zero, si ottiene una nuova proporzione.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, e se m è diverso da zero, si avrà pure:

$$(\delta)\begin{cases} am:b\;=cm:d\,; \\ a:bm=\;c:dm\,; \end{cases} \qquad (\delta')\begin{cases} \dfrac{a}{m}:b=\dfrac{c}{m}:d\,; \\ a:\dfrac{b}{m}=c:\dfrac{d}{m}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Da $a:b=c:d$, ossia da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si avrà $\frac{am}{b}=\frac{cm}{d}$, $\frac{a}{bm}=\frac{c}{dm}$, $\frac{a:m}{b}=\frac{c:m}{d}$, $\frac{a}{b:m}=\frac{c}{d:m}$, le quali sono le proporzioni (δ) e (δ'). *

251. TEOREMA 4°. Se si moltiplicano o si dividono i due antecedenti d'una proporzione per un medesimo numero diverso da zero, e poi si moltiplicano o si dividono i due conseguenti per un altro numero diverso da zero, si ottiene una nuova proporzione.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, e se m, n sono due numeri diversi da zero, si avrà pure:

$$(\varepsilon)\begin{cases} am:bn=cm:dn\,; \\ \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{m}:\dfrac{d}{n}; \end{cases} \qquad (\varepsilon')\begin{cases} \dfrac{a}{m}:bn=\dfrac{c}{m}:dn\,; \\ am:\dfrac{b}{n}=cm:\dfrac{d}{n}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZ. Da $a:b=c:d$, ossia da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si ha $\frac{am}{bn}=\frac{cm}{dn}$, $\frac{a:m}{b:n}=\frac{c:m}{d:n}$, $\frac{a:m}{bn}=\frac{c:m}{dn}$, $\frac{am}{b:n}=\frac{cm}{d:n}$, che sono le proporzioni (ε), (ε').*

* Perchè due numeri eguali, moltiplicati o divisi pel medesimo numero diverso da zero, danno risultati eguali; e perchè se si moltiplica o si divide il solo numeratore per m, la frazione resta moltiplicata o divisa per m; e se si moltiplica o si divide il solo denominatore per m, la frazione resta divisa o moltiplicata per m.

252. TEOREMA 5°. In ogni proporzione il prodotto degli estre è eguale al prodotto dei medi.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, *si avrà pure* $ad=bc$.

DIMOSTRAZIONE. Moltiplicando ambi i membri di $a:b=c:d$, ossia di $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, per bd che è il prodotto dei denominatori, otterremo $\frac{a}{b}bd=\frac{c}{d}bd$, ossia $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$, ossia * $ad=bc$.

253. TEOREMA 6°. Se quattro numeri, presi in un certo ordine, sono tali che il prodotto degli estremi è eguale al prodotto dei medi, i quattro numeri, presi in quest'ordine, formano una proporzione.

Siano i quattro numeri a, b, c, d, *presi in quest'ordine: dico che, se si ha* $ad=bc$, *si avrà pure* $a:b=c:d$.

DIMOSTRAZIONE. Se è $ad=bc$ (essendo bd diverso da zero, perchè tali sono per ipotesi b e d) sarà $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, ossia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ossia $a:b=c:d$. **

Osservazione. In pratica, avendo l'eguaglianza di due prodotti composti ciascuno di due fattori, si potrà sempre scrivere una proporzione che abbia per termini i fattori dei prodotti presi nell'ordine in cui si trovano, con questa differenza che il 2° fattore del 1° prodotto si toglie dal posto che occupa e si colloca nel 4° posto.

254. TEOREMA 7°. Se quattro numeri a, b, c, d, **diversi fra loro, presi in un certo ordine, formano una proporzione, i medesimi quattro numeri si possono disporre in otto ed in otto sole maniere diverse, in modo che formino proporzione.**

DIMOSTRAZIONE. ***Parte 1ª.*** *Si possono disporre in otto modi diversi.* Infatti: se si ha $a:b=c:d$, il prodotto ad degli estremi è eguale al prodotto bc dei medi.

Dunque, se cambiamo di posto i quattro termini in modo però che a e d occupino sempre entrambi i due posti di mezzo, od i due posti estremi, rimarrà sempre vero che il prodotto degli estremi è eguale al prodotto dei medi, e quindi avremo sempre una proporzione. Così facendo

* Sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore.

** Il teor. 5° ci dice che in ogni proporzione il prodotto degli estremi *deve essere* (è necessario che sia) eguale al prodotto dei medi.

Il teorema 6° ci dice che *è sufficiente* che il prodotto degli estremi sia eguale prodotto dei medi, affinchè i quattro termini, presi in quell'ordine, formino una pr porzione. Perciò i due teoremi si sogliono anche riunire in uno solo dicendo:

TEOREMA. La condizione *necessaria* **e** *sufficiente* **affinchè quatt numeri, presi in un certo ordine, formino una proporzione, è cl il prodotto degli estremi sia eguale al prodotto dei medi.**

si hanno le otto seguenti proporzioni, le quali si ottengono a questo modo:

(1) $a:b=c:d$ da questa permutando i medi si ha: *
(2) $a:c=b:d$ » invertendo si ha:
(3) $c:a=d:b$ » permutando i medi si ha:
(4) $c:d=a:b$ » invertendo si ha:
(5) $d:c=b:a$ » permutando i medi si ha:
(6) $d:b=c:a$ » invertendo si ha:
(7) $b:d=a:c$ » permutando i medi si ha:
(8) $b:a=d:c$.

Parte seconda. *Non si possono più disporre in altri modi.* Infatti, se si continua la via intrapresa, e nella (8) *si inverte*, si ottiene la (1). Dunque seguendo questa via non si ottengono più nuove disposizioni.

Ma neppur seguendo altra via. Infatti, osservando le otto proporzioni sopra scritte, si vede che non è più possibile disporre i numeri a, b, c, d in ordine diverso dai precedenti, in modo che a, d occupino contemporaneamente o i due posti estremi, o i due posti di mezzo.

Volendo scriverli in ordine diverso, bisognerà che, dei due numeri a, d, uno occupi un posto estremo, e l'altro un posto di mezzo; ma allora i quattro termini non formano più una proporzione. Infatti: disponiamoli p.e. nell'ordine a, b, d, c. Se deve essere $a:b=d:c$, deve pure essere $ac=bd$. Ma si ha già $ad=bc$.

Dividendo membro a membro queste due eguaglianze, si avrebbe $\frac{ad}{ac}=\frac{bc}{bd}$, ossia ** $\frac{d}{c}=\frac{c}{d}$, il che è assurdo se non è $c=d$; caso che abbiamo escluso nell'ipotesi del teorema. Dunque....... ***

255. TEOREMA 8°. Se due proporzioni hanno un rapporto comune, gli altri due rapporti sono eguali.

Dico cioè che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\begin{cases}a:b=m:n\\c:d=m:n\end{cases}\qquad\qquad(\beta)\ \{\ a:b=c:d$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo i quoti $a:b$, e $c:d$ ambedue eguali al quoto $m:n$, saranno eguali fra loro, ed avremo $a:b=c:d$.

---

* Quando da una proporzione se ne ricava un'altra scambiando fra loro di posto solamente i due termini medi (o solamente i due estremi) si dice che la 2ª si ottiene dalla 1ª *permutando i medi* (oppure *permutando gli estremi*). Così la (2) si ottiene dalla (1) permutando i medi; la (6) si ottiene dalla (1) permutando gli estremi.

Quando da una proporzione se ne ottiene un'altra scambiando fra loro di posto solamente ciascun antecedente col proprio conseguente, si dice che la 2ª si ottiene dalla 1ª *invertendo*. Così la (3) si ricava dalla (2) invertendo.

** Sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore.

*** Si può osservare che di proporzioni distinte ve ne sono solamente quattro. Infatti sono la stessa proporzione la (1) e la (4); poi la (2) e la (7); poi la (3) e la (6); poi la (5) e la (8).

256. TEOREMA 9°. Se due proporzioni hanno gli antecedenti rispettivamente eguali, i conseguenti sono direttamente proporzionali. *

Dico cioè che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\begin{cases} m : a = n : b \\ m : c = n : d \end{cases} \qquad (\gamma)\begin{cases} m : n = a : b \\ m : n = c : d \end{cases} \qquad (\beta)\ \{\ a : c = b : d$$

DIMOSTRAZIONE. Permutando i medi nelle (α), si ottengono le due proporzioni (γ) le quali hanno eguale il 1° rapporto. Quindi pel teor. preced. sarà $a : b = c : d$; e, permutando i medi, $a : c = b : d$, che è la (β).

257. TEOREMA 10°. Se due proporzioni hanno i conseguenti rispettivamente eguali, gli antecedenti sono direttamente proporzionali. **

Dico cioè che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\begin{cases} a : m = b : n \\ c : m = d : n \end{cases} \qquad (\beta)\ \{\ a : c = b : d$$

DIMOSTRAZIONE. Come la precedente.

258. TEOREMA 11°. Se due proporzioni hanno i medi rispettiva mente eguali, gli estremi sono inversamente proporzionali. ***

Dico cioè che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\begin{cases} a : m = n : b \\ c : m = n : d \end{cases} \qquad (\beta)\ \{\ a : c = d : b$$

DIMOSTRAZIONE. Pel teor. 5° § 252, dalle (α) si ha $ab = mn$, $cd = mn$; da cui $ab = cd$; e quindi (§ 253 osserv.) $a : c = d : b$.

259. TEOREMA 12°. Se due proporzioni hanno gli estremi rispettivamente eguali, i medi sono inversamente proporzionali. ****

Dico cioè che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β)

$$(\alpha)\begin{cases} m : a = b : n \\ m : c = d : n \end{cases} \qquad (\beta)\ \{\ a : c = d : b$$

DIMOSTRAZIONE. Come la precedente.

---

* Si intende dire che *il 1° conseguente della prima proporzione sta al 1° conseguente della seconda proporzione, come il 2° conseguente della prima sta al 2° conseguente della seconda.*

** Si intende dire che *il 1° antecedente della prima proporzione sta al 1° antecedente della seconda proporzione, come il 2° antecedente della prima sta al 2° antecedente della seconda.*

*** Si intende dire che *il 1° estremo della prima proporzione sta al 1° estren della seconda proporzione, come il 2° estremo della seconda sta al 2° estrei della prima.*

**** Si intende dire che *il 1° medio della prima proporzione sta al 1° med della seconda proporzione, come il 2° medio della seconda sta al 2° medio del prima.*

260. TEOREMA 13°. La somma o la differenza dei due primi termini d'una proporzione sta al primo (od al secondo) termine, come la somma o la differenza dei due ultimi sta al terzo (od al quarto) termine.

Dico cioè che, se si ha la proporzione (α), *si avranno pure le* (β).

$$(\alpha)\ \{\ a:b=c:d \qquad\qquad (\beta)\ \begin{cases}(a\pm b):a=(c\pm d):c\\(a\pm b):b=(c\pm d):d\end{cases}$$

Dimostrazione. Aggiungendo o togliendo 1 ai due membri di $a:b=c:d$, ossia di $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si avrà $\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$, ossia ancora * $\frac{a}{b}\pm\frac{b}{b}=\frac{c}{d}\pm\frac{d}{d}$, ossia $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, ossia $(a\pm b):b=(c\pm d):d$, che è la 2ª delle proporzioni (β).

Poichè $(a\pm b):b=(c\pm d):d$ ed $a:b=c:d$ hanno i conseguenti rispettivamente eguali, (pel teor. 10° § 257) si avrà $(a\pm b):a=(c\pm d):c$, che è la 1ª delle proporzioni (β).

261. TEOREMA 14°. La somma dei due primi termini d'una proporzione sta alla loro differenza, come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.

Dico cioè che, se si ha la proporzione (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\ \{a:b=c:d \qquad\qquad (\beta)\ (a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

Dimostrazione. Pel teorema precedente, da $a:b=c:d$ si ha:

$$(a\pm b):a=(c\pm d):c, \qquad \text{ossia } ^{**} \begin{cases}(a+b):a=(c+d):c\\(a-b):a=(c-d):c.\end{cases}$$

Queste proporzioni avendo i conseguenti rispettivamente eguali, (pel teor. 10° § 257) danno $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

262. TEOREMA 15°. La somma o la differenza dei due antecedenti d'una proporzione, sta alla somma od alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente.

Dico cioè che, se si ha la proporzione (α), *si avranno pure le* (β).

$$(\alpha)\ \{\ a:b=c:d \qquad\qquad (\beta)\ \begin{cases}(a\pm c):(b\pm d)=a:b\\(a\pm c):(b\pm d)=c:d\end{cases}$$

Dimostrazione. Permutando i medi nella (α), si ottiene $a:c=b:d$, ossia $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; e quindi $\frac{a}{c}\pm1=\frac{b}{d}\pm1$, ossia $\frac{a}{c}\pm\frac{c}{c}=\frac{b}{d}\pm\frac{d}{d}$, ossia

---

* Poichè $1=\frac{b}{b}=\frac{d}{d}$.

** Separando le due proporzioni contenute in $(a\pm b):a=(c\pm d):c$.

$\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$, ossia $(a \pm c) : c = (b \pm d) : d$, ossia (permutando i medi) $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$, che è la 2ª delle proporzioni (β).

Poichè $(a \pm c) : (b \pm d) = c : d$ ed $a : b = c : d$ hanno in comune il 2° rapporto, (pel teor. 8° § 255) si avrà $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$, che è la 1ª delle proporzioni (β).

263. TEOREMA 16°. La somma dei due antecedenti d'una proporzione sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.

Ossia se si ha $a:b = c:d$, *si avrà pure* $(a+c):(a-c) = (b+d):(b-d)$.

DIMOSTRAZIONE. Nel teorema preced. da $a : b = c : d$ si è ottenuto

$$(a \pm c) : c = (b \pm d) : d, \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (a+c) : c = (b+d) : d \\ (a-c) : c = (b-d) : d \end{cases}$$

Queste proporzioni, avendo i conseguenti rispettivamente eguali, (pel teor. 10° § 257) danno $(a+c) : (a-c) = (b+d) : (b-d)$.

264. TEOREMA 17°. Se varie proporzioni si moltiplicano termine a termine, si ottengono quattro prodotti che, presi nel medesimo ordine, formano una proporzione.

Dico cioè che, se si hanno le proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha) \begin{cases} a : b = c : d \\ a' : b' = c' : d' \\ a'' : b'' = c'' : d'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad\qquad (\gamma) \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} \\ \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(\beta) \quad (aa'a''\ldots\ldots) : (bb'b''\ldots\ldots) = (cc'c''\ldots\ldots) : (dd'd''\ldots\ldots)$$

DIMOSTRAZIONE. Scrivendo le proporzioni (α) sotto la forma (γ), e moltiplicando membro a membro le (γ), si ottiene:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} \ldots\ldots = \frac{c}{d} \cdot \frac{c'}{d'} \cdot \frac{c''}{d''} \ldots\ldots ; \quad \text{ossia} \quad \frac{aa'a''\ldots\ldots}{bb'b''\ldots\ldots} = \frac{cc'c''\ldots\ldots}{dd'd''\ldots\ldots}, \quad \text{ossia}$$

$$(aa'a''\ldots\ldots) : (bb'b''\ldots\ldots) = (cc'c''\ldots\ldots) : (dd'd''\ldots\ldots).$$

COROLLARIO 1°. Se quattro numeri presi in un certo ordine formano una proporzione, le loro potenze n^e (per n intero e positivo), prese nel medesimo ordine, formeranno ancora una proporzione.

Dico cioè che, se si ha $a : b = c : d$, *si avrà pure* $a^n : b^n = c^n : d^n$.

DIMOSTRAZIONE. Immaginando di avere n proporzioni tutte eguali alla $a : b = c : d$, e di moltiplicarle termine a termine, (pel teor. preced.) si avrà $(aaa\ldots) : (bbb\ldots) = (ccc\ldots\ldots) : (ddd\ldots)$, ossia $a^n : b^n = c^n : d^n$.

COROLLARIO 2°. Se quattro numeri presi in un certo ordine formano una proporzione, le loro radici aritmetiche n^e (per n intero e positivo), prese nel medesimo ordine, formano ancora una proporzione.

Dico che, se si ha $a:b=c:d$, si avrà pure $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema 5° § 194, da $a:b=c:d$, ossia da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si avrà $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}}$, ossia $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, ossia (pel teorema 3° § 164) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$, ossia $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$.

265. TEOREMA 18°. Se due proporzioni si dividono termine a termine, si ottengono quattro quoti, i quali, presi nel medesimo ordine, formano una proporzione.

Dico che, se si hanno le due proporzioni (α), *si avrà pure la* (β).

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} a\ :b\ =c:d \\ a':b'=c':d' \end{array}\right. \qquad (\beta)\left\{\frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}:\frac{d}{d'}.\right.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalle (α) (pel teor. 5° § 252) si ha $ad=bc$ ed $a'd'=b'c'$. Dividendo queste due eguaglianze membro a membro, si ha $\frac{ad}{a'd'}=\frac{bc}{b'c'}$, ossia $\frac{a}{a'}\cdot\frac{d}{d'}=\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}$; da cui (§ 253 osservaz.) si ha la proporzione (β).

266. TEOREMA 19°. Se più rapporti sono eguali, la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente qualunque sta al proprio conseguente.

Dico che, se si ha $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}=\ldots..$, si avrà pure p.e. $(a+a'+a''+a'''\ldots..):(b+b'+b''+b'''\ldots..)=a:b$.

DIMOSTRAZIONE. Se q è il valore di ciascuno di questi rapporti eguali, si avrà $\frac{a}{b}=q$; $\frac{a'}{b'}=q$; $\frac{a''}{b''}=q$; $\frac{a'''}{b'''}=q\ldots\ldots.$, ossia $a=bq$; $a'=b'q$; $a''=b''q$; $a'''=b'''q;\ldots.$ *

Sommando membro a membro tutte queste eguaglianze, si ottiene: $a+a'+a''+a'''+\ldots..=bq+b'q+b''q+b'''q+\ldots..$, ossia $a+a'+a''+a'''+\ldots..=(b+b'+b''+b'''+\ldots..)q$, da cui si ha:

$$\frac{a+a'+a''+a'''+\ldots..}{b+b'+b''+b'''+\ldots..}=q. \;**$$

* Perchè il dividendo è eguale al prodotto del divisore pel quoto.

** Perchè se si divide il prodotto $a+a'+a''+a'''+\ldots$; pel fattore $b+b'+b''+b'''+\ldots$ si ottiene per quoto l'altro fattore q.

Ma si è posto $\frac{a}{b}=q$; si avrà quindi $\frac{a+a'+a''+a'''+\dots\dots}{b+b'+b''+b'''+\dots\dots}=\frac{a}{b}$, ossia $(a+a'+a''+a'''+\dots\dots):(b+b'+b''+b'''+\dots\dots)=a:b$.

Osservazione. Prima di fare quest'operazione, possiamo moltiplicare i due termini d'una frazione per un numero qualsiasi diverso da zero. Se m, n, r sono numeri diversi da zero, moltiplicando p.e. i due termini di $\frac{a}{b}$ per m, i due termini di $\frac{a''}{b''}$ per $-n$, ed i due termini di $\frac{a'''}{b'''}$ per r, si ha $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; $\frac{a''}{b''}=\frac{-a''n}{-b''n}$; $\frac{a'''}{b'''}=\frac{a'''r}{b'''r}$. E, se invece di $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''},\dots\dots\dots$ si considerano i rapporti eguali $\frac{am}{bm}=\frac{a'}{b'}=\frac{-a''n}{-b''n}=\frac{a'''r}{b'''r}\dots\dots\dots\dots$ (pel teorema precedente) si ottiene $\frac{am+a'-a''n+a'''r+\dots\dots\dots}{bm+b'-b''n+b'''r+\dots\dots\dots}=\frac{a}{b}$, ossia:

$$(am+a'-a''n+a'''r\dots\dots):(bm+b'-b''n+b'''r\dots\dots)=a:b.$$

APPLICAZIONI.

267. DEFINIZIONI. 1ª. Il quarto termine d'una proporzione i cui tre primi termini siano diversi fra loro, si chiama *quarto proporzionale* dopo i tre termini dati.

Esempio. In $5:7=15:21$ il 4º proporzionale dopo 5, 7, 15 è 21.

2ª. Dicesi *proporzione continua* quella che ha i due medi eguali.

Esempio. $12:6=6:3$ è una proporzione continua.

3ª. In una proporzione continua l'ultimo termine dicesi *terzo proporzionale* dopo i due primi.

4ª. In una proporzione continua, ciascuno dei medi eguali si chiama *medio proporzionale* fra i due estremi.

Esempio. In $12:6=6:3$ il terzo proporzionale dopo 12 e 6 è 3; il medio proporzionale fra 12 e 3 è 6.

268. TEOREMA 1º. Un estremo è eguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo; ed un medio è eguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio.

DIMOSTRAZIONE. Da $a:b=c:d$ (pel teor. 5º § 252) si ha $ad=bc$.

Dividendo ambi i membri di $ad=bc$ per d, si ha: $\frac{ad}{d}=\frac{bc}{d}$, ossia $a=\frac{bc}{d}$.

Dividendo ambi i membri di $ad=bc$ per a, si ha: $\frac{ad}{a}=\frac{bc}{a}$, ossia $d=\frac{bc}{a}$.

Dividendo ambi i membri di $bc=ad$ per c, si ha: $\frac{bc}{c}=\frac{ad}{c}$, ossia $b=\frac{ad}{c}$.

Dividendo ambi i membri di $bc=ad$ per b, si ha: $\frac{bc}{b}=\frac{ad}{b}$, ossia $c=\frac{ad}{b}$.

269. TEOREMA 2°. Il medio proporzionale d'una proporzione continua è eguale alla radice quadrata del prodotto dei due estremi.

DIMOSTRAZIONE. Da $a:b=b:c$ (pel teor. 5° § 252) si ricava $bb=ac$, ossia $b^2=ac$; da cui $b=\pm\sqrt{ac}$. *

270. ***Problema 1°.*** *Si trovi il valore di x nella proporzione $12:4=6:x$.*

Risoluzione. Pel teor. 1° § 268, si ha: $x=\frac{4.6}{12}=\frac{24}{12}=2$.

Problema 2°. *Si trovi il valore di x nella proporzione $^2/_3:4=x:{}^3/_5$.*

Risoluzione. Pel teor. 1° § 268, si ha:

$$x=\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{5}\right):4=\frac{2}{5}:4=\frac{2}{5.4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}.$$

Problema 3°. *Si trovi il quarto proporzionale dopo tre numeri dati a, b, c.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato; il problema dato è il seguente: Si trovi il quarto termine della proporzione $a:b=c:x$.

Problema 4°. *Si trovi il terzo proporzionale dopo i due numeri a, b.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato; il problema dato è il seguente: Si trovi il quarto termine della proporzione $a:b=b:x$.

Problema 5°. *Si trovi il medio proporzionale fra i numeri a, b.*

Risoluzione. Sia x il numero cercato; il problema dato è il seguente: Si trovi il termine medio della proporzione $a:x=x:b$. Se i numeri dati sono p.e. 16 e 4, si ha $16:x=x:4$; da cui $x=\pm\sqrt{16.4}=\pm\sqrt{64}=\pm 8$.**

Problema 6°. *Si divida il numero m in parti proporzionali ai numeri a, b, c.* ***

Risoluzione. Se x, y, z sono le tre parti cercate, deve essere

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad \ldots\ldots (1)$$

Per ipotesi deve essere $x+y+z=m \ldots\ldots$ (2)

Pel teor. 19° § 266, dalla (1) si hanno le (α).

$$(\alpha)\begin{cases}(x+y+z):(a+b+c)=x:a\\(x+y+z):(a+b+c)=y:b\\(x+y+z):(a+b+c)=z:c\end{cases}\qquad(\beta)\begin{cases}m:(a+b+c)=x:a\\m:(a+b+c)=y:b\\m:(a+b+c)=z:c\end{cases}$$

---

* Se i due estremi sono di segno contrario, ac è negativo, ed il medio proporzionale è un numero immaginario. In ogni altro caso è un numero reale.

** Il medio proporzionale fra due numeri si suole anche chiamare *medio geometrico dei due numeri;* e quindi potremo dire:

Regola. **Il medio geometrico di due numeri è eguale alla radice quadrata del loro prodotto.**

*** Significa che bisogna dividere il numero m in tre parti tali che il quoto della 1ª per a, il quoto della 2ª per b, ed il quoto della 3ª per c siano eguali.

Sostituendo nelle (α) ad $x+y+z$ il suo valore m, si ottengono le (β); dalle quali (pel teor. 1° § 268) si ha rispettivamente:

$$x=\frac{m}{a+b+c}.a; \quad y=\frac{m}{a+b+c}.b; \quad z=\frac{m}{a+b+c}.c.$$

Esempio. Si divida 240 *in parti proporzionali ai numeri* 5, 3, 8. Chiamando x, y, z le tre parti, si ha:

$$x=\frac{240}{5+3+8}.5=\frac{240}{16}.5=15.5=75.$$
$$y=\frac{240}{5+3+8}.3=\frac{240}{16}.3=15.3=45.$$
$$z=\frac{240}{5+3+8}.8=\frac{240}{16}.8=15.8=120.$$

Osservazione 1ª. È evidente che il procedimento è il medesimo qualunque sia il numero di parti in cui si deve dividere il numero dato.

Osservazione 2ª. In questi problemi bisogna sempre indicare in quale ordine si devono prendere i numeri dati; perchè, cambiando l'ordine, varia generalmente il risultato finale. Quando non si dice in quale ordine si devono prendere, è sottinteso che si prendono nell' ordine in cui sono dati.

CAPO SECONDO.

Progressioni aritmetiche

DEFINIZIONI.

271. DEFINIZIONI. 1ª. *Progressione aritmetica* (o *per differenza*) è una successione di numeri tali che la differenza fra uno qualsiasi ed il precedente abbia sempre il medesimo valore.

Si suol dire allora che la differenza è *costante*. Essa prende il nome di *ragione* della progressione aritmetica; ed ogni numero della progressione dicesi *un termine* della progressione stessa.

Per indicare che i numeri a_1, a_2, a_3, a_4,..... scritti in quest'ordine, formano una progressione aritmetica, si scrive $\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5 . a_6 ....$ che si legge a_1 *sta ad* a_2 *sta ad* a_3 *ecc.....* *

* Alberto Girard (1590-1633) usava, per la sottrazione, ora il segno — già usato da Widmann, ed ora il segno $\div$ di sua invenzione. Più tardi, l'uso conservò il — per la sottrazione, ed adoperò il $\div$ per le progressioni per differenza.

Esempio 1°. $\div$ 15 . 20 . 25 . 30 . 35..... è una progressione aritmetica la cui ragione è $+5$; perchè $20-15=+5$, $25-20=+5$, ecc.

Esempio 2°. $\div$ 22 . 20 . 18 . 16 . 14..... è una progressione aritmetica la cui ragione è -2; perchè $20-22=-2$, $18-20=-2$; $16-18=-2$, ecc.

Esempio 3°. $\div$ —12 . —16 . —20 . —24 . —28... è una progressione aritmetica la cui ragione è -4; perchè $(-16)-(-12)=-16+12=-4$, $(-20)-(-16)=-20+16=-4$, ecc.

Esempio 4°. $\div$ —57 . —54 . —51 . —48 . —45 . —42..... è una progressione aritmetica la cui ragione è $+3$; perchè si ha: $(-54)-(-57)=-54+57=+3$, $(-51)-(-54)=+3$, ecc.

Esempio 5°. $\div$ 1 . 2 . 3. 4 . 5 . 6... è una progressione aritmetica, la cui ragione è $+1$; perchè $2-1=+1$, $3-2=+1$, $4-3=+1$, ecc.

2ª. Una progressione aritmetica si dice *crescente* (o *decrescente*) se ciascun suo termine è algebricamente maggiore (o minore) del precedente.

Sono crescenti le progressioni degli esempi 1°, 4° e 5°; sono decrescenti quelle degli esempi 2° e 3°.

Osservazione. Da questa definizione risulta immediatamente che: *Nelle progressioni aritmetiche crescenti la ragione è un numero positivo, e nelle decrescenti è un numero negativo.*

3ª. Una progressione aritmetica si dice *limitata* od *illimitata* secondochè contiene un numero limitato od illimitato di termini.

Osservazione. Chiameremo *primo termine* d' una progressione aritmetica il 1° termine a sinistra, ed *ultimo termine* della progressione l'ultimo termine a destra.

Esempio 1°. La progressione $\div$ 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 è limitata, ed ha 6 termini; il primo termine è 4, e l'ultimo è 19.

Esempio 2°. La progressione $\div$ 7 . 16 . 25 . 34 . 43 . 52 . 61 . 70....* è illimitata; il primo termine è 7, e non ha ultimo termine.

Esempio 3°. La progressione $\div$......17 . 21 . 25 . 29 . 33 è illimitata; non ha primo termine, ed ha per ultimo termine 33.

Esempio 4°. La progress. $\div$... —4 . —3 . —2 . —1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4... è illimitata e non ha nè primo nè ultimo termine. **

---

* Quando la progressione è illimitata, si indicano con puntini i termini che non si scrivono.

** Se $d=0$, la progressione ha i termini tutti eguali fra loro, e non presenta alcun interesse.

TEOREMI.

272. TEOREMA 1°. In una progressione aritmetica un termine qualsiasi è eguale al precedente aumentato della ragione, od al seguente diminuito della ragione.

Sia $\div a_1 . a_2 .... a_m . a_{m+1} ....$ ove a_m ed a_{m+1} *sono due termini consecutivi qualunque; e sia* d *la ragione. Dico che si avrà:*

$$a_{m+1} = a_m + d; \qquad a_m = a_{m+1} - d.$$

DIMOSTRAZIONE. Per defin. si ha $a_{m+1} - a_m = d$. Da cui (per defin. § 32) $a_{m+1} = a_m + d$.

Sottraendo d da ambi i membri di questa eguaglianza, si ha: $a_{m+1} - d = a_m$, ossia $a_m = a_{m+1} - d$.

Esempio. In $\div 6 . 8 . 10 . 12 . 14 ....$ la cui ragione è 2, si ha $8 = 6+2 = 10-2$, $10 = 8+2 = 12-2$, $12 = 10+2 = 14-2$, ecc.

COROLLARIO 1°. Una progressione aritmetica limitata si può prolungare indefinitamente da ambe le parti.

Infatti: Considerandone un termine estremo qualsiasi, il primo o l'ultimo, potremo rispettivamente toglierví od aggiungervi la ragione, ottenendo così un nuovo termine della progressione.

COROLLARIO 2°. Data la ragione d'una progressione aritmetica, e dato un termine qualsiasi, se ne possono trovare altri in numero arbitrario.

Basta infatti al numero dato aggiungere o togliere successivamente la ragione tante volte quante si desidera.

COROLLARIO 3°. Dati due termini consecutivi d'una progressione aritmetica, e dato l'ordine in cui essi si trovano nella progressione, se ne possono trovare altri in numero arbitrario.

Infatti: in questa ipotesi, si può facilmente conoscere anche la ragione, ed allora (pel coroll. 2°) si possono trovare altri termini in numero arbitrario.

COROLLARIO 4°. Una progressione aritmetica illimitata da ambe le parti è data quando ne sono dati due termini consecutivi qualsiasi coll'indicazione dell'ordine in cui essi si trovano nella progressione; oppure quando è dato un termine qualsiasi e la ragione.

Ciò deriva immediatamente dai tre corollari precedenti. *

273. TEOREMA 2°. Un termine qualsiasi d'una progressione aritmetica avente un primo termine è eguale al primo termine più la ragione moltiplicata pel numero dei termini che lo precedono. **

* Se si danno solamente due termini consecutivi, p.e. 10 e 12, e non si dice se nella progressione si trovano nell'ordine 10, 12, oppure 12, 10, non si può conoscere se la ragione è $+2$, o se è -2; e quindi non si sa se la progressione è crescente o decrescente.

** L'alunno può trovare, per esercizio, come si modifica il teorema se la progressione non ha primo termine.

Sia la progressione aritmetica $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \ldots\ldots$; *e sia* d *la ragione*, a_1 *il* 1° *termine, ed* a_n *l'*n^o *termine. Il termine* a_n *sarà preceduto da* $n-1$ *termini; e dico che avremo:* $a_n = a_1 + (n-1)d$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema precedente, si ha $a_2 = a_1 + d$.

Poi $a_3 = a_2 + d$; e sostituendo ad a_2 il suo valore $a_1 + d$, si ha: $a_3 = (a_1 + d) + d$, ossia $a_3 = a_1 + 2d$.

Poi $a_4 = a_3 + d$; e sostituendo ad a_3 il suo valore $a_1 + 2d$, si ha: $a_4 = (a_1 + 2d) + d$, ossia $a_4 = a_1 + 3d$.

E così continuando, si vede che il *secondo* termine è eguale al primo più *una volta* la ragione; il *terzo* è eguale al primo più *due volte* la ragione; il *quarto* è eguale al primo più *tre volte* la ragione; ecc. e così l'n^o, ossia a_n, sarà eguale al primo più $(n-1)$ *volte* la ragione; sarà cioè $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Esempio. *Si trovi il* 25° *termine della progressione* $\div 12.24.36\ldots\ldots$

Si ha $a_1 = 12$, $d = 12$, $n = 25$; e quindi sarà:

$$a_{25} = 12 + (25-1)12 = 12 + 24.12 = 300.$$

Risposta. Il 25° *termine è* 300.

274. TEOREMA 3°. In una progressione aritmetica limitata la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi.

Si abbia la progressione $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,.\, a_5 \,.\, a_6 \,.\, a_7 \,.\, a_8 \,.\, a_9 \,.\, a_{10}$ *la cui ragione sia* d. *Essa è una progressione aritmetica limitata in cui i termini equidistanti dagli estremi sono rispettivamente* a_2 *ed* a_9, *poi* a_3 *ed* a_8, *poi* a_4 *ed* a_7, *poi* a_5 *ed* a_6. *Dico adunque che avremo:* $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema 1° § 272, si ha.

$$a_1 = a_2 - d; \quad a_2 = a_3 - d; \quad a_3 = a_4 - d; \quad a_4 = a_5 - d;$$
$$a_{10} = a_9 + d; \quad a_9 = a_8 + d; \quad a_8 = a_7 + d; \quad a_7 = a_6 + d.$$

Sommando queste eguaglianze, per ordine, membro a membro, si ha: $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9$, $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$, $a_3 + a_8 = a_4 + a_7$, $a_4 + a_7 = a_5 + a_6$, ossia $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$.

Esempio. Nella progress. $\div 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, 19 \,.\, 21 \,.\, 23 \,.\, 25$ si ha: $7 + 25 = 9 + 23 = 11 + 21 = 13 + 19 = 15 + 17 = 32$.

COROLLARIO 1°. In una progressione aritmetica limitata, avente un numero dispari di termini, la somma degli estremi è eguale al doppio del termine di mezzo.

Si abbia p.e. la progressione $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \,.\, a_5 \,.\, a_6 \,.\, a_7 \,.\, a_8 \,.\, a_9$, *la cui ragione è* d, *ed il cui termine di mezzo è* a_5. *Dico che si avrà* $a_1 + a_9 = 2a_5$.

DIMOSTRAZIONE. Operando come precedentemente, si ottiene:

$$a_1 = a_2 - d; \quad a_2 = a_3 - d; \quad a_3 = a_4 - d; \quad a_4 = a_5 - d;$$
$$a_9 = a_8 + d; \quad a_8 = a_7 + d; \quad a_7 = a_6 + d; \quad a_6 = a_5 + d;$$

da cui $a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 2a_5$; cioè $a_1 + a_9 = 2a_5$.

Esempio. Nella progressione $\div 10 . 15 . 20 . 25 . 30 . 35 . 40$ si ha:

$$10+40=15+35=20+30=2.25=50.$$

Osservazione. Se la progressione aritmetica ha tre soli termini, quello di mezzo prende il nome di *medio differenziale*, o *medio aritmetico*, o *media aritmetica* fra gli altri due. Così nella progressione $\div a_1 . a_2 . a_3$ il medio aritmetico fra a_1 ed a_3 è a_2.

COROLLARIO 2°. La media aritmetica di due numeri è eguale alla semisomma dei numeri stessi.

Infatti: Se a_2 è la media aritmetica fra a_1 ed a_3, deve essere per definizione $\div a_1 . a_2 . a_3$; ed allora (pel coroll. 1°) si ha $2a_2=a_1+a_3$, ossia $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$.

Esempio. La media aritmetica di 7 e 12 è $\frac{7+12}{2}=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$.

275. TEOREMA 4°. La somma di quanti si voglia termini consecutivi d'una progressione aritmetica è eguale alla semisomma degli estremi fra i termini considerati moltiplicata pel numero dei termini stessi.

Sia la progressione $\div .....a_1 . a_2 . a_3 .....a_n...$ *Dico che se* s_n *è la somma degli* n *termini consecutivi* $a_1, a_2, a_3, ...a_n$, *si ha* $s_n=n\frac{a_1+a_n}{2}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. $n=10$; si avrà:

$\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5 . a_6 . a_7 . a_8 . a_9 . a_{10}$; e quindi:

$s_{10}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$, ossia *

$s_{10}=a_{10}+a_9+a_8+a_7+a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1$; e quindi **

$2s_{10}=(a_1+a_{10})+(a_2+a_9)+(a_3+a_8)+(a_4+a_7)+(a_5+a_6)+(a_6+a_5)+$
$+(a_7+a_4)+(a_8+a_3)+(a_9+a_2)+(a_{10}+a_1)$. E quindi:

$2s_{10}=10(a_1+a_{10})$; *** da cui $s_{10}=10\frac{a_1+a_{10}}{2}$.

Ed in generale, se n sono i termini considerati, a_1 il 1° termine, ed a_n l'n^o, ed s_n la somma degli n termini, si avrà $s_n=n\frac{a_1+a_n}{2}$.

Esempio. La somma s_{11} dei primi 11 termini della progressione $\div 18 . 25 . 32 . 39 . 46 . 53 . 60 . 67 . 74 . 81 . 88.....$ è:

$$s_{11}=11.\frac{18+88}{2}=11.\frac{106}{2}=11.53=583.$$

---

* Invertendo l'ordine dei termini.

** Sommando per verticali.

*** Infatti, ciascuna parentesi contiene la somma di due termini estremi, o di due termini equidistanti dagli estremi, od il doppio del termine di mezzo. Queste somme (pel teor. preced.) sono tutte eguali fra loro, e sono 10, cioè tante quanti sono i termini considerati.

Applicazioni.

PROBLEMI VARI.

276. In una progressione aritmetica limitata, meritano speciale menzione il numero n dei termini, la ragione d, il 1° termine a_1, l'ultimo termine a_n, e la somma s_n degli n termini. Questi cinque numeri sono legati dalle due relazioni:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha) \qquad s_n = n\frac{a_1+a_n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta),$$

la prima delle quali fu dimostrata al § 273, e la seconda al § 275.

Se i cinque numeri n, d, a_1, a_n, s_n sono tutti incogniti, si hanno due equazioni di 1° grado fra cinque incognite, ed il sistema è indeterminato. Ma se dei cinque numeri se ne conoscono tre, si avranno due equazioni di 1° grado fra due sole incognite; ed il sistema sarà determinato, ed ammetterà quindi *una ed una sola soluzione*, purchè n sia, in ogni caso, un numero intero positivo.

Intorno ai cinque numeri n, d, a_1, a_n, s_n, si potranno così avere i 10 seguenti problemi:

Problema	***1°***.	*Si trovino*	n,	d	*essendo noti*	a_1	a_n	s_n
Problema	***2°***.	»	n,	a_1	»	d	a_n	s_n
Problema	***3°***.	»	n,	a_n	»	d	a_1	s_n
Problema	***4°***.	»	n,	s_n	»	d	a_1	a_n
Problema	***5°***.	»	d,	a_1	»	n	a_n	s_n
Problema	***6°***.	»	d,	a_n	»	n	a_1	s_n
Problema	***7°***.	»	d,	s_n	»	n	a_1	a_n
Problema	***8°***.	»	a_1,	a_n	»	n	d	s_n
Problema	***9°***.	»	a_1,	s_n	»	n	d	a_n
Problema	***10°***.	»	a_n,	s_n	»	n	d	a_1.

INSERZIONE DI MEDI DIFFERENZIALI.

277. DEFINIZIONE. Inserire m medi differenziali (od aritmetici) fra i due numeri A, B, significa trovare m numeri $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots. a_m$ tali che si abbia: $\div A . a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \ldots\ldots a_m . B$. *

Problema. *Si inseriscano m medi differenziali fra i numeri A, B.*

Risoluzione. Se a_1, a_2, $a_3, \ldots. a_m$ sono i numeri cercati, si deve avere la progressione $\div A . a_1 . a_2 . a_3 \ldots\ldots a_m . B$.

* E evidente che m deve sempre essere intero e positivo.

Poichè conosco il 1° termine A, troverò facilmente gli altri se vengo a conoscere la ragione d. In questa progressione, l'ultimo termine che è B, è preceduto dagli m termini $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$ e da A; ossia da $m+1$ termini: e perciò (pel teor. 2° § 273) avremo: $B=A+(m+1)d$, da cui $B-A=(m+1)d$.

Dividendo ambi i membri per $m+1$, si ha $d=\frac{B-A}{m+1}$.

Se $A=15$, $B=28$, $m=5$, si avrà:

$d=\frac{B-A}{m+1}=\frac{28-15}{5+1}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$, e la progressione sarà:

$\div 15 \,.\, 17\frac{1}{6} \,.\, 19\frac{2}{6} \,.\, 21\frac{3}{6} \,.\, 23\frac{4}{6} \,.\, 25\frac{5}{6} \,.\, 28.$

Osservazione. Qualunque siano i numeri A, B, m, purchè m sia intero e positivo, $\frac{B-A}{m+1}$ avrà uno, ed un sol valore, e soddisferà al problema, il quale perciò avrà una, ed una sola, soluzione. *

278. TEOREMA 1°. Se, in una progressione aritmetica, fra ciascun termine ed il seguente si inserisce sempre lo stesso numero di medi differenziali, si ottiene una successione di numeri i quali formano una sola progressione aritmetica.

Si abbia la progressione $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \ldots\ldots$ *la cui ragione è* d. *Fra* a_1 *ed* a_2 *si inseriscano* m *medi differenziali* $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots p_m$, *e si avrà* $\div a_1 \,.\, p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \ldots\ldots p_m \,.\, a_2$. *Fra* a_2 *ed* a_3 *si inseriscano* m *medi differenziali* $q_1, q_2, q_3, \ldots q_m$, *e si avrà* $\div a_2 \,.\, q_1 \,.\, q_2 \,.\, q_3 \ldots\ldots q_m \,.\, a_3$.

Fra a_3 *ed* a_4 *si inseriscano* m *medi differenziali,* $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$ *e si otterrà* $\div a_3 \,.\, r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots\ldots r_m \,.\, a_4$. *E similmente si inseriscano* m *medi differenziali fra ciascun termine ed il seguente della progressione* $\div a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4 \ldots\ldots\ldots$ *Dico che si avrà la progressione* $\div a_1 \,.\, p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \ldots\ldots p_m \,.\, a_2 \,.\, q_1 \,.\, q_2 \,.\, q_3 \ldots\ldots q_m \,.\, a_3 \,.\, r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots\ldots r_m \,.\, a_4$

Per dimostrare questo, basterà dimostrare che delle progressioni parziali $\div a_1 \,.\, p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \ldots\ldots p_m \,.\, a_2$, $\div a_2 \,.\, q_1 \,.\, q_2 \,.\, q_3 \ldots\ldots q_m \,.\, a_3$, $\div a_3 \,.\, r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \ldots\ldots r_m \,.\, a_4$ *ecc. 1°. L'ultimo termine di ciascuna è anche il primo termine della successiva; 2°. Che esse hanno tutte la medesima ragione.*

DIMOSTRAZIONE. ***Prima parte.*** È evidente.

Seconda parte. Per il problema precedente si ha:

---

* $\frac{B-A}{m+1}$ ha valore definito (osserv. 5ª § 68) perchè per ipotesi $m+1$ è diverso da zero. Ha poi valore unico, perchè pei teor. dei §§ 23, 34, 69, hanno valore unico $m+1$, $B-A$, e $\frac{B-A}{m+1}$.

§ 278

La ragione della $\div a_1 . p_1 . p_2 . p_3 ... p_m . a_2$ è $\frac{a_2 - a_1}{m+1} = \frac{d}{m+1}$. *

La ragione della $\div a_2 . q_1 . q_2 . q_3 ... q_m . a_3$ è $\frac{a_3 - a_2}{m+1} = \frac{d}{m+1}$.

La ragione della $\div a_3 . r_1 . r_2 . r_3 ... r_m . a_4$ è $\frac{a_4 - a_3}{m+1} = \frac{d}{m+1}$. Ecc.

Le progressioni parziali hanno dunque tutte la medesima ragione.

279. TEOREMA 2°. Tre numeri razionali qualunque, p, q, r, possono sempre essere tre termini d'una progressione aritmetica.

DIMOSTRAZIONE. ***1° CASO.*** *p, q, r sono numeri interi.* La progressione $\div .....-4 . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 .....$ ha certamente per suoi termini anche p, q, r.

2° CASO. *p, q, r sono frazioni.* Si riducano al medesimo denominatore; e sia p.e. $p = \frac{p_1}{m}$, $q = \frac{q_1}{m}$, $r = \frac{r_1}{m}$. La progressione $\div .... -\frac{3}{m} . -\frac{2}{m} . -\frac{1}{m} . 0 . +\frac{1}{m} . +\frac{2}{m} . +\frac{3}{m} ......$ ha certamente per suoi termini anche $\frac{p_1}{m}, \frac{q_1}{m}, \frac{r_1}{m}$, ossia p, q, r. **

CAPO TERZO.

Progressioni gemetriche ***

DEFINIZIONI.

280. DEFINIZIONI. 1ª. ***Progressione geometrica* (o *per quoziente*) è una successione di numeri tali che il quoziente di uno qualsiasi pel precedente abbia sempre il medesimo valore.** ****

Si suol dire allora che il quoziente è *costante*. Esso prende il nome di *ragione* della progressione geometrica; ed ogni numero della progressione dicesi *un termine* della progressione stessa.

* Poichè è d la ragione della progressione $\div a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5 . a_6 . a_7 .....$ sarà $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = d$.

** Se fra due termini consecutivi di ciascuna delle due precedenti progressioni si intercala un medesimo numero arbitrario di termini, si possono ottenere quante si voglia altre progressioni aritmetiche aventi ciascuna per termini anche p, q, r.

*** Le progressioni aritmetiche e geometriche si trovano già nel papiro egiziano di Ahmes, che visse nell'epoca compresa fra il 2000 ed il 1700 av. Cr. Esse furono poi molto studiate da Pitagora e dai Pitagorici.

**** L'enunciato della maggior parte delle proprietà delle progressioni geometriche si può ricavare da quello delle progressioni aritmetiche mutando *somma* in *prodotto*, *prodotto* in *potenza*, *differenza* in *quoto*, e *quoto* in *radice*.

Per indicare che i numeri a_1, a_2, a_3, a_4,..... scritti in quest'ordine, formano una progressione geometrica, si scrive $\div\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 :$...... che si legge *$a_1$ sta ad a_2 sta ad a_3 ecc.*

Esempio 1°. $\div\div\, 3 : 6 : 12 : 24 : 48 :$ ..... è una progressione geometrica, la cui ragione è $+2$; perchè $6 : 3 = +2$, $12 : 6 = +2$, ecc.

Esempio 2°. $\div\div\, 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} :$..... è una progressione geometrica la cui ragione è $+\frac{1}{3}$; perchè $9 : 27 = \frac{1}{3}$, $3 : 9 = \frac{1}{3}$, ecc.

Esempio 3°. $\div\div\, 5 : -30 : 180 : -1080 : 6480 :$........ è una progressione geometrica la cui ragione è -6; perchè $(-30) : 5 = -6$, $180 : (-30) = -6$, ecc.

Esempio 4°. $\div\div\, -\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : -\frac{1}{8} : \frac{1}{16} : -\frac{1}{32}$....... è una progressione geometrica là cui ragione è $-\frac{1}{2}$; perchè $\frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{8}\right) : \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$, ecc.

2ª. Una progressione geometrica si dice *crescente* (o *decrescente*) se ciascun suo termine è, in valore assoluto, maggiore (o minore) del precedente.

Sono crescenti le progressioni degli esempi 1° e 3°; sono decrescenti quelle degli esempi 2° e 4°.

Osservazione. Da questa definizione risulta immediatamente che: *Nelle progressioni geometriche crescenti la ragione è, in valore assoluto, maggiore di* 1; *e nelle decrescenti è, in valore assoluto, minore di* 1.

3ª. Una progressione geometrica si dice *limitata* od *illimitata* secondochè contiene un numero limitato od illimitato di termini.

Osservazione. Chiameremo *primo termine* di una progressione geometrica il primo termine a sinistra, ed *ultimo termine* della progressione l'ultimo termine a destra.

Esempio 1°. La progressione $\div\div\, 7 : 35 : 175 : 875 : 4375 : 21875$ è limitata ed ha 6 termini; il 1° è 7, e l'ultimo è 21875.

Esempio 2°. La progressione $\div\div\, 4 : 12 : 36 : 108 : 324 :$...... è illimitata; il suo 1° termine è 4, e non ha ultimo termine.

Esempio 3°. La progressione $\div\div$.... $: 14 : 7 : \frac{7}{2} : \frac{7}{4} : \frac{7}{8} : \frac{7}{16}$ è illimitata, non ha 1° termine, ed ha per ultimo termine $\frac{7}{16}$.

Esempio 4°. La progressione $\div\div$ .... $: 20 : 80 : 320 : 1280 : 5120 :$.... è illimitata, e non ha nè 1° nè ultimo termine. *

---

* Se $q = 1$, la progressione ha i termini tutti eguali fra loro, e non presenta alcun interesse.

281. TEOREMA 1°. In una progressione geometrica un termine qualsiasi è eguale al precedente moltiplicato per la ragione, oppure al seguente diviso per la ragione. *

Sia $\div\!\div a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ldots : a_m : a_{m+1} : \ldots\ldots$ *ove* a_m *ed* a_{m+1} *sono due termini consecutivi qualsiasi; e sia* q *la ragione. Dico che avremo:*

$$a_{m+1} = a_m . q ; \qquad a_m = \frac{a_{m+1}}{q} .$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, si ha: $\frac{a_{m+1}}{a_m} = q$. Da cui (corollario § 66) si ha: $a_{m+1} = a_m . q$.

Dividendo ambi i membri di questa eguaglianza per q, si ha: $\frac{a_{m+1}}{q} = a_m$, cioè $a_m = \frac{a_{m+1}}{q}$.

Esempio. In $\div\!\div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : \ldots\ldots$ la cui ragione è $+3$, si ha $3 = 1.3 = 9 : 3$, $9 = 3.3 = 27 : 3$, $27 = 9.3 = 81 : 3$, ecc.

COROLLARIO 1°. Una progressione geometrica limitata si può prolungare indefinitamente da ambe le parti.

Infatti: considerandone un termine estremo qualsiasi, il primo o l'ultimo, potremo rispettivamente dividerlo o moltiplicarlo per la ragione, ottenendo così un nuovo termine della progressione.

COROLLARIO 2°. Data la ragione d'una progressione geometrica, e dato un termine qualsiasi, se ne possono trovare altri in numero arbitrario.

Basta infatti moltiplicare o dividere il termine dato successivamente per la ragione tante volte quante si desidera.

COROLLARIO 3°. Dati due termini consecutivi d'una progressione geometrica, e dato l'ordine in cui essi si trovano nella progressione, se ne possono trovare altri in numero arbitrario.

Infatti: in questa ipotesi, si può conoscere facilmente anche la ragione, ed allora (pel coroll. 2°) si possono trovare altri termini in numero arbitrario.

COROLLARIO 4°. Una progressione geometrica illimitata da ambe le parti è data quando sono dati due termini consecutivi qualsiasi coll'indicazione dell'ordine in cui essi si trovano nella progressione; oppure è dato un termine e la ragione.

Ciò deriva immediatamente dai tre corollari precedenti. **

---

* Dal teorema segue immediatamente che: 1°. *Se la ragione è positiva, i termini hanno tutti lo stesso segno.* 2°. *Se la ragione è negativa, i termini sono alternativamente uno positivo e l'altro negativo.*

** Se si danno solamente due termini consecutivi, p.e. 4 ed 8, e non si dice se nella progressione si trovano nell'ordine 4, 8, oppure 8, 4, non si può conoscere se la ragione è $+2$ oppure se è $^1/_2$; e quindi non si sa se la progressione è crescente o decrescente.

282. TEOREMA 2°. Un termine qualsiasi d'una progressione geometrica avente un primo termine è eguale al prodotto del primo termine per quella potenza della ragione che ha per esponente il numero dei termini che lo precedono. *

Sia la progressione geometrica $\div\div a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : .... : a_n : ....$; *e sia* q *la ragione,* a_1 *il 1° termine, ed* a_n *l'n° termine. Il termine* a_n *sarà preceduto da* $n-1$ *termini; e dico che avremo* $a_n = a_1 q^{n-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema precedente, si ha $a_2 = a_1.q$. Poi $a_3 = a_2.q$; e sostituendo in questa eguaglianza ad a_2 il suo valore $a_1.q$, si ottiene $a_3 = a_1.q.q$, ossia $a_3 = a_1.q^2$.

Si ha poi $a_4 = a_3.q$; e sostituendo in questa eguaglianza ad a_3 il suo valore $a_1.q^2$, si ottiene $a_4 = a_1.q^2.q$, ossia $a_4 = a_1.q^3$.

E così continuando, si ottiene $a_5 = a_1.q^4$, $a_6 = a_1.q^5$, ecc.

Si vede così che il *secondo* termine è eguale al prodotto del 1° per la *prima* potenza della ragione; il *terzo* è eguale al prodotto del 1° per la *seconda* potenza della ragione; il *quarto* è eguale al prodotto del 1° per la *terza* potenza della ragione; ecc. Ed in generale, l'*ennesimo* termine sarà eguale al prodotto del 1° per la *(n—1)*^{ma} potenza della ragione; ossia si avrà: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Esempio. *Si trovi il 7° termine della progressione* $\div\div 14 : 28 : 56 : ...$

Si ha $a_1 = 14$, $q = 2$, $n = 7$; e quindi sarà:

$$a_7 = 14.2^{7-1} = 14.2^6 = 14.64 = 896.$$

Risposta. Il 7° termine è 896.

283. TEOREMA 3°. In una progressione geometrica limitata, il prodotto di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed è eguale al prodotto degli estremi.

Si abbia la progressione $\div\div a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : a_8 : a_9 : a_{10}$, *la cui ragione sia* q. *Essa è una progressione geometrica limitata in cui i termini estremi sono* a_1 *ed* a_{10}, *ed i termini equidistanti dagli estremi sono rispettivamente* a_2 *ed* a_9, *poi* a_3 *ed* a_8, *poi* a_4 *ed* a_7, *poi* a_5 *ed* a_6. *Dico adunque che avremo:* $a_1a_{10} = a_2a_9 = a_3a_8 = a_4a_7 = a_5a_6$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema 1° § 281, si ha:

$$a_1 = \frac{a_2}{q}, \quad a_2 = \frac{a_3}{q}, \quad a_3 = \frac{a_4}{q}, \quad a_4 = \frac{a_5}{q};$$

$$a_{10} = a_9q, \quad a_9 = a_8q, \quad a_8 = a_7q, \quad a_7 = a_6q.$$

Moltiplicando queste eguaglianze, per ordine, membro a membro, si ha:

$$a_1a_{10} = \frac{a_2}{q}a_9q, \quad a_2a_9 = \frac{a_3}{q}a_8q, \quad a_3a_8 = \frac{a_4}{q}a_7q, \quad a_4a_7 = \frac{a_5}{q}a_6q;$$

ossia $a_1a_{10} = a_2a_9$, $a_2a_9 = a_3a_8$, $a_3a_8 = a_4a_7$, $a_4a_7 = a_5a_6$; ossia

$$a_1a_{10} = a_2a_9 = a_3a_8 = a_4a_7 = a_5a_6.$$

* L'alunno osservi come si può modificare il teorema se la progressione non ha primo termine.

Esempio. Nella progressione $\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486$ si ha:
$$2.486 = 6.162 = 18.54 = 972.$$

COROLLARIO 1°. In una progressione geometrica limitata avente un numero dispari di termini, il prodotto degli estremi è eguale al quadrato del termine di mezzo.

Dimostrazione analoga a quella del coroll. 1° § 274.

Esempio. Nella progressione $\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162$ si ha:
$$2.162 = 6.54 = 18^2 = 324.$$

Osservazione. Se la progressione geometrica ha tre soli termini, quello di mezzo prende il nome di *medio proporzionale*, o *medio geometrico*, o *media geometrica* fra gli altri due. Così nella progressione $\div\div a_1 : a_2 : a_3$ il medio geometrico fra a_1 ed a_3 è a_2.

COROLLARIO 2°. La media geometrica di due numeri è eguale alla radice quadrata del loro prodotto.

Infatti: Se a_2 è la media geometrica fra a_1 ed a_3, deve essere per definizione $\div\div a_1 : a_2 : a_3$; ed allora (pel coroll. 1°) si avrà $a_2{}^2 = a_1 a_3$; ossia $a_2 = \pm\sqrt{a_1 a_3}$.

Esempio. La media geometrica di 2 e 32 è $\pm\sqrt{2.32} = \pm\sqrt{64} = \pm 8$.

284. TEOREMA 4°. Il valore numerico del prodotto di quanti si voglia termini consecutivi d'una progressione geometrica è eguale alla radice quadrata aritmetica del prodotto del valore numerico degli estremi fra i termini considerati, elevato ad una potenza avente per esponente il numero dei termini stessi.

Si abbia la progressione $\div\div a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n \dots$. *Dico che se* p_n *è il valore numerico del prodotto degli* n *termini consecutivi* a_1, a_2, a_3, a_4,... a_n, *si avrà, aritmeticamente,* $p_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. $n = 10$; si avrà:

$\div\div a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : a_6 : a_7 : a_8 : a_9 : a_{10}$, e quindi

$p_{10} = a_1 . a_2 . a_3 . a_4 . a_5 . a_6 . a_7 . a_8 . a_9 . a_{10}$, ed invertendo l'ordine dei termini,

$p_{10} = a_{10} . a_9 . a_8 . a_7 . a_6 . a_5 . a_4 . a_3 . a_2 . a_1$; e quindi: *

$(p_{10})^2 = (a_1 a_{10})(a_2 a_9)(a_3 a_8)(a_4 a_7)(a_5 a_6)(a_6 a_5)(a_7 a_4)(a_8 a_3)(a_9 a_2)(a_{10} a_1)$,

ossia $(p_{10})^2 = (a_1 a_{10})^{10}$; ed aritmeticamente $p_{10} = \sqrt{(a_1 a_{10})^{10}}$. **

Ed in generale, se n sono i termini considerati, a_1 il 1° termine, a_n l'n^o termine, e p_n il prodotto aritmetico degli n termini, si avrà: $p_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$.

---

* Moltiplicando membro a membro e raggruppando a due a due in modo conveniente i fattori del 2° prodotto.

** Infatti: Ciascuna parentesi contiene il prodotto dei due termini estremi, o di due termini equidistanti dagli estremi, od il quadrato del termine di mezzo. Questi prodotti (pel teor. preced.) sono tutti eguali fra loro, e sono 10; cioè tanti quanti sono i termini considerati.

Esempio. Il prodotto aritmetico dei primi 5 termini della progre[ssione]
$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : \ldots\ldots$ è $p_5 = \sqrt{(3.48)^5} = \sqrt{144^5} = 248832$.

285. TEOREMA 5°. In una progressione geometrica a termini positivi, la somma di quanti si voglia termini consecutivi è eguale al primo di questi termini moltiplicato per una frazione avente per denominatore l'unità diminuita della ragione, e per numeratore l'unità diminuita di quella potenza della ragione che ha per esponente il numero dei termini considerati.

Si abbia la progressione $\div\div \ldots : a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n : \ldots$ *a termini tutti positivi; sia q la ragione, ed s_n la somma degli n termini consecutivi a_1, a_2, a_3,....a_n. Dico che si ha:* $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha evidentemente:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Pel teorema 2° § 282, si ha $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$, $a_5 = a_1 q^4$, ecc. $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Sostituendo nella (1) questi valori di a_1, a_2, a_3,.... a_n, si ottiene: $s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1}$, ossia *

$$s_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Per la (1''') § 59 è $(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1})(1 - q) = (1 - q^n)$; e quindi $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Sostituendo questo valore nella (2), si ottiene $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$. **

Esempio. Si cerchi la somma dei primi 8 *termini della progressione* $\div\div 5 : 15 : 45 : \ldots\ldots$

In questo caso si ha $a_1 = 5$, $n = 8$, $q = 3$, e quindi:

$$s_8 = 5\frac{1-3^8}{1-3} = 5\frac{1-6561}{1-3} = 5\frac{-6560}{-2} = 5.3280 = 16400.$$

Risposta. La somma cercata è 16400.

286. TEOREMA 6°. In una progressione geometrica illimitata, decrescente, a termini positivi, il limite della somma di *n* termini consecutivi, quando *n* diventa arbitrariamente grande, è una frazione che ha per numeratore il primo termine, e per denominatore l'unità diminuita della ragione. ***

---

* Mettendo in evidenza il fattor comune a_1.

** Se $q > 1$, allora $1-q^n$ ed $1-q$ sono negativi, e (pel § 84, 2°) cambiando il segno al numeratore ed al denominatore, si ha $\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n-1}{q-1}$. Ed invece della formola $s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$, sarà più comodo far uso della formola equivalente $s_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

*** Questo è un modo abbreviato per dire che se n cresce diventando arbitrariamente grande, s_n si accosta ad $\frac{a_1}{1-q}$ in modo da differirne per meno di ε, essendo ε un numero positivo arbitrariamente piccolo.

Si abbia la progressione geometrica decrescente, illimitata, a termini positivi $\div\!\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots$ *la cui ragione sia* q*; e sia* s_n *la somma dei primi* n *termini consecutivi. Dico che, se* n *diventa arbitrariamente grande, il limite di* s_n *è* $\frac{a_1}{1-q}$.

DIMOSTRAZIONE. Pel teorema precedente, si ha:

$$s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q} =$$
$$= \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}q^n.$$

Si vede così che s_n è una differenza in cui il minuendo $\frac{a_1}{1-q}$ non varia, mentre il sottraendo $\frac{a_1}{1-q}q^n$ varia col variare di n. Questo sottraendo poi è un prodotto di due fattori, il primo dei quali, cioè $\frac{a_1}{1-q}$, è costante; e l'altro, cioè q^n, varia col variare di n. Poichè la progressione è a termini positivi e decrescente, q sarà positivo e minore di 1; e quindi (teor. 2° § 191) sarà sempre possibile trovare un numero n (di termini) tale che q^n sia minore di un numero positivo arbitrariamente piccolo; ed in particolare sia $q^n < \varepsilon\frac{1-q}{a_1}$.

Moltiplicando ora ambi i membri di questa disuguaglianza pel numero positivo $\frac{a_1}{1-q}$, * si ha $\frac{a_1}{1-q}q^n < \varepsilon\frac{1-q}{a_1}\cdot\frac{a_1}{1-q}$; ossia $\frac{a_1}{1-q}q^n < \varepsilon$.

Dunque s_n, ossia $\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}q^n$, col crescere di n può diventare eguale ad $\frac{a_1}{1-q}$ diminuito d'un numero minore di ε; epperciò il limite di s_n è $\frac{a_1}{1-q}$. **

* Essendo $q<1$, sarà $1-q$ positivo; e quindi sarà positivo $\frac{a_1}{1-q}$.

** È facile vedere che il teorema è ancor vero se la progressione è crescente, illimitata, avente l'ultimo termine. Allora, invece di *primo termine* si dice *ultimo termine*.

Applicazioni.

PROBLEMI VARI.

287. In una progressione geometrica limitata, meritano speciale menzione il numero n dei termini, la ragione q, il 1° termine a_1, l'ultimo termine a_n, e la somma s_n dei termini. Questi cinque numeri sono legati dalle due relazioni:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha') \qquad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta')$$

la prima delle quali fu dimostrata al § 282, e la seconda al § 285.

Se i cinque numeri n, q, a_1, a_n, s_n sono tutti incogniti, si hanno due equazioni fra cinque incognite, ed il sistema è indeterminato. Ma se dei cinque numeri se ne conoscono tre, si avranno due equazioni fra due incognite, ed il sistema sarà determinato. È però da notare che n deve sempre essere un numero intero positivo. Fra i cinque numeri n, q, a_1, a_n, s_n, si potranno così avere i 10 seguenti problemi:

Problema 1°.	Si trovino	n,	q	essendo noti	a_1	a_n	s_n
Problema 2°.	»	n,	a_1	»	q	a_n	s_n
Problema 3°.	»	n,	a_n	»	q	a_1	s_n
Problema 4°.	»	n,	s_n	»	q	a_1	a_n
Problema 5°.	»	q,	a_1	»	n	a_n	s_n
Problema 6°.	»	q,	a_n	»	n	a_1	s_n
Problema 7°.	»	q,	s_n	»	n	a_1	a_n
Problema 8°.	»	a_1,	a_n	»	n	q	s_n
Problema 9°.	»	a_1,	s_n	»	n	q	a_n
Problema 10°.	»	a_n,	s_n	»	n	q	a_1. *

288. ***GENERATRICE D'UNA FRAZIONE PERIODICA.***

1° Caso. Periodica semplice. *Si trovi la generatrice della frazione periodica semplice* 0,458458458.......

Si ha evidentemente:

$$0{,}458458458\ldots\ldots\ldots = 0{,}458 + 0{,}000458 + 0{,}000000458 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Scrivendo ciascun addendo sotto forma di frazione ordinaria, si ha:

$$0{,}458458\ldots = \frac{458}{1000} + \frac{458}{1000000} + \frac{458}{1000000000} + \frac{458}{1000000000000} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{458}{1000} + \frac{458}{1000^2} + \frac{458}{1000^3} + \frac{458}{1000^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

* È facile vedere che la risoluzione di alcuni di questi 10 problemi, p.e. dell'8°, del 9° e del 10°, dipende dalla risoluzione di equazioni di 1° grado. La risoluzione di altri dipende dalla risoluzione di equazioni di grado superiore al 2°; e quella di altri dipende dalla risoluzione di equazioni esponenziali.

È facile vedere che gli addendi di questa somma sono i termini di una progressione geometrica decrescente, illimitata, a termini positivi, il cui 1° termine è $\frac{458}{1000}$ e la ragione è $\frac{1}{1000}$; e che 0,458458...... è il limite della somma dei primi n termini quando n diventa arbitrariamente grande.

Poichè è $a_1 = \frac{458}{1000}$, $q = \frac{1}{1000}$, avremo:

$$0{,}458458\ldots\ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{458}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{458}{1000}}{\frac{1000-1}{1000}} = \frac{\frac{458}{1000}}{\frac{999}{1000}} \overset{*}{=} \frac{\frac{458}{1000}\,.\,1000}{\frac{999}{1000}\,.\,1000} =$$

$= \frac{458}{999}$. Questa è la nota formola dell'Aritmetica.

2° Caso. Periodica mista. Si trovi la generatrice della periodica mista 0,31526262626.......

Si ha evidentemente: 0,315262626..... =

$$= 0{,}315 + 0{,}00026 + 0{,}0000026 + 0{,}000000026 + 0{,}00000000026 + \ldots =$$

$$= \frac{315}{1000} + \frac{26}{100000} + \frac{26}{100000\,.\,100} + \frac{26}{100000\,.\,100^2} + \frac{26}{100000\,.\,100^3} + \ldots\ldots$$

Si vede che i termini che seguono $\frac{315}{1000}$, sono i termini d'una progressione geometrica decrescente, illimitata, a termini positivi, il cui 1° termine è $\frac{26}{100000}$ e la ragione è $\frac{1}{100}$. Perciò 0,315262626..... sarà eguale a $\frac{315}{1000}$, più il limite della somma dei termini della progressione $\div\!\div \frac{26}{100000} : \frac{26}{100000\,.\,100} : \frac{26}{100000\,.\,100^2} : \ldots\ldots\ldots$ Dunque:

$$0{,}3152626\ldots\ldots = \frac{315}{1000} + \frac{a_1}{1-q} = \frac{315}{1000} + \frac{\frac{26}{100000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{315}{1000} + \frac{\frac{26}{100000}}{\frac{100-1}{100}} \overset{**}{=}$$

$$= \frac{315}{1000} + \frac{26.100}{100000(100-1)} = \frac{315}{1000} + \frac{26}{1000(100-1)} =$$

$$= \frac{315\,.\,(100-1)}{1000(100-1)} + \frac{26}{1000(100-1)} = \frac{315.(100-1)+26}{1000(100-1)} =$$

---

* Moltiplicando per 1000 il numeratore ed il denominatore.

** Per la Regola del § 90.

$$=\frac{315.100-315+26}{1000\,.\,99}=\frac{31500-315+26}{99000}=\frac{31500+26-315}{99000}=$$

$$=\frac{31526-315}{99000}.$$ Questa è la nota formola dell'Aritmetica.

INSERZIONE DI MEDI PROPORZIONALI.

289. DEFINIZIONE. Inserire m medi proporzionali (o geometrici) fra i due numeri A, B, significa trovare m numeri a_1, a_2, a_3,...a_m tali che si abbia $\div\!\div A : a_1 : a_2 : a_3 : .....a_m : B$. *

Problema. *Si inseriscano m medi proporzionali fra i due numeri A, B.*

Risoluzione. Se a_1, a_2, a_3,.....a_m sono i numeri cercati, si deve avere la progressione $\div\!\div A : a_1 : a_2 : a_3 : ..... : a_m : B$.

Poichè conosco il 1° termine A, troverò facilmente gli altri se vengo a conoscere la ragione q. In questa progressione, l'ultimo termine, cioè B, è preceduto dagli m termini a_1, a_2, a_3,....a_m e da A; ossia da $m+1$ termini: e quindi (pel teor. 2° § 282) avremo: $B=Aq^{m+1}$, da cui si ricava $q^{m+1}=\frac{B}{A}$. Dunque q è un numero la cui potenza $(m+1)^{ma}$ è $\frac{B}{A}$; epperciò $q=\sqrt[m+1]{\frac{B}{A}}$.

Se p.e. $A=4$, $B=2916$, ed $m=5$, avremo: $q=\sqrt[6]{\frac{2916}{4}}=$ $=\sqrt[6]{729}=\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{27}$. Poichè A, B sono positivi, potremo prendere positiva anche la ragione, e scrivere $q=3$; e la progressione sarà $\div\!\div 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : 2916$. **

---

* È evidente che m deve sempre essere intero positivo.

** Nell'Algebra Complementare si dimostra che, se m è un numero intero, la radice $(m+1)^{ma}$ di ogni numero razionale od irrazionale ha $m+1$ valori distinti. Di questi valori, uno solo è reale quando m è pari; due soli sono reali quando m è dispari, ed il radicando è positivo; sono tutti immaginari quando m è dispari ed il radicando è negativo.

Avremo quindi $m+1$ valori distinti di q; e per conseguenza $m+1$ progressioni diverse, le quali tutte soddisferanno al problema. Volendo limitarci ai soli valori reali di q, si può osservare che, se A, B sono numeri razionali od irrazionali, il quoto $\frac{B}{A}$ ed il radicale aritmetico $\sqrt[m+1]{\frac{B}{A}}$ hanno sempre uno, ed un sol valore. Il valore nu-

290. TEOREMA. Se in una progressione geometrica fra ciascun termine ed il seguente si inserisce sempre lo stesso numero di medi proporzionali, si ottiene una successione di numeri i quali formano una sola progressione geometrica.

Si abbia la progressione $\div\, a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots..$ *la cui ragione è* q.

Fra a_1 *ed* a_2 *si inseriscano* m *medi proporzionali* $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_m$; *e si avrà la progressione* $\div\, a_1 : p_1 : p_2 : p_3 : \ldots. : p_m : a_2$.

Fra a_2 *ed* a_3 *si inseriscano* m *medi proporzionali* $q_1, q_2, q_3, \ldots. q_m$; *e si avrà la progressione* $\div\, a_2 : q_1 : q_2 : q_3 : \ldots.. : q_m : a_3$.

Fra a_3 *ed* a_4 *si inseriscano* m *medi proporzionali* $r_1, r_2, r_3, \ldots. r_m$; *e si avrà la progressione* $\div\, a_3 : r_1 : r_2 : r_3 : \ldots.. : r_m : a_4$.

E così di seguito, avendo cura di dare a tutte le ragioni il medesimo segno. Dico che si avrà la progressione:

$$\div\, a_1 : p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_m : a_2 : q_1 : q_2 : q_3 : \ldots : q_m : a_3 : r_1 : r_2 : r_3 : \ldots : r_m : a_4 : \ldots$$

Per dimostrare questo basterà dimostrare che delle varie progressioni parziali: 1° *L'ultimo termine di una è contemporaneamente il primo termine della successiva;* 2° *Che hanno tutte la medesima ragione.*

Dimostrazione. ***Prima parte.*** È evidente.

Seconda Parte. Per il problema precedente si ha:

La ragione della progress. $\div\, a_1 : p_1 : p_2 : p_3 : \ldots : p_m : a_2$ è $\sqrt[m+1]{\dfrac{a_2}{a_1}} = \sqrt[m+1]{q}$ *

La ragione della progress. $\div\, a_2 : q_1 : q_2 : q_3 : \ldots : q_m : a_3$ è $\sqrt[m+1]{\dfrac{a_3}{a_2}} = \sqrt[m+1]{q}$

La ragione della progress. $\div\, a_3 : r_1 : r_2 : r_3 : \ldots : r_m : a_4$ è $\sqrt[m+1]{\dfrac{a_4}{a_3}} = \sqrt[m+1]{q}$

Riguardo al segno, abbiamo convenuto di prenderle tutte col medesimo segno. Dunque queste ragioni sono tutte eguali fra loro in valore e segno.

---

merico di $\sqrt[m+1]{\dfrac{B}{A}}$, ossia di q, esisterà quindi sempre e sarà unico; epperciò avremo:

1°. *Se* A, B *sono di segno contrario, ed* m *è pari, la ragione deve essere negativa, ed esisterà quindi sempre una, ed una sola, soluzione reale del problema.*

2°. *Se* A, B *sono di segno contrario, ed* m *è dispari, il problema è impossibile.*

3°. *Se* A, B *sono dello stesso segno, ed* m *è pari, la ragione deve essere positiva, e quindi il problema ammette una, ed una sola, soluzione reale.*

4°. *Se* A, B *sono dello stesso segno, ed* m *è dispari, la ragione può essere presa indifferentemente positiva o negativa; ed allora il problema ammette due, e due sole, soluzioni reali.*

* Poichè è q la ragione della progressione $\div\, a_1 : a_2 : a_3 : \ldots$ sarà $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = q$.

I LOGARITMI RICAVATI DALLE PROGRESSIONI.

291. Giovanni Napier, lo scopritore dei logaritmi, li definì nel seguente modo:

Se si hanno due progressioni, una geometrica contenente il termine 1, e l'altra aritmetica contenente il termine 0, e si fanno corrispondere le due progressioni, termine a termine, in modo però che al termine 1 della progressione geometrica corrisponda il termine 0 della progressione aritmetica, allora:

1°. Ogni numero della progressione aritmetica si chiama il *logaritmo* del corrispondente numero della progressione geometrica;

2°. Dicesi *base dei logaritmi* quel numero della progressione geometrica, che corrisponde al termine 1 della progressione aritmetica. *

Esempio. Sia q la ragione d'una progressione geometrica avente il termine 1, e d la ragione d'una progressione aritmetica avente il termine 0. Avremo:

$$\div\div \ldots\ldots : q^{-4} : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots \quad (\beta)$$
$$\div \ldots\ldots -4d \,.\, -3d \,.\, -2d \,.\, -d \,.\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

e sarà p.e. $-3d$ il logaritmo di q^{-3}, $2d$ il logaritmo di q^2, ecc.

Per trovare la base di questi logaritmi, cerchiamo prima qual posto occupa il termine 1 nella progressione aritmetica (α), e poi qual termine gli corrisponde nella progressione geometrica (β).

Supponendo, per semplicità, che d sia un numero positivo, il termine 1 nella (α) sarà alla destra di 0, ed il termine corrispondente nella (β) sarà alla destra di 1; e quindi basterà cercare qual posto occupa il termine 1 nella progressione $\div\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \ldots\ldots$, e qual numero gli corrisponde nella progressione $\div\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots$

Se nella progressione $\div\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \ldots\ldots$ il termine 1 occupa l'n^o posto, il termine corrispondente della progressione $\div\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots$ occuperà pure l'n^o posto; e (per la formola data dal teor. 2° § 282) esso sarà $1 . q^{n-1} = q^{n-1}$.

Per trovare ora la base dei logaritmi, ci basterà trovare il valore di n, e sostituirlo in q^{n-1}.

Poichè, per ipotesi, nella progressione $\div\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\, 3d \,.\, 4d \ldots\ldots$ l'n^o termine è 1, (applicando la formola data dal teorema 2° § 273,

---

* Michele Stifel, nella sua *Arithmetica Integra* (Nürnberg 1544) aveva, assai prima di Napier, fatto corrispondere i termini d'una progressione geometrica ai termini d'una progressione aritmetica, ed aveva chiamato ciascun termine della progressione aritmetica *esponente* del corrispondente termine della progressione geometrica.

La parola *esponente* fu introdotta nella scienza da Stifel; però il suo significato attuale pare dovuto al padre gesuita Claudio Francesco Millet de Chales, nato a Chambery nel 1621, e morto a Torino nel 1678.

e ponendo $a_n = 1$, ed $a_1 = 0$) avremo $1 = 0 + (n-1)d$; da cui $1 = nd - d$, ossia $nd = 1 + d$, ossia $n = \frac{1+d}{d}$, ossia $n = \frac{1}{d} + 1$.

Ponendo ora questo valore di n in q^{n-1}, si ha $q^{n-1} = q^{\frac{1}{d}+1-1} = q^{\frac{1}{d}}$.

Dunque la base dei logaritmi definiti dalle due progressioni (α), (β) è $q^{\frac{1}{d}}$.

Se variano i valori d, q, varierà in conseguenza la base dei logaritmi; però essa avrà sempre la forma $q^{\frac{1}{d}}$.

292. E facile vedere che la definizione ora data di logaritmo coincide con quella data al § 224.

Infatti: elevando il numero $q^{\frac{1}{d}}$ alla potenza indicata da uno dei numeri della progressione aritmetica (α), si ottiene per risultato il corrispondente numero della progressione geometrica (β); e quindi potremo dire che, anche secondo la definizione di logaritmo data al § 224, ogni numero della progressione aritmetica (α) è il logaritmo, nella base $q^{\frac{1}{d}}$, del corrispondente numero della progressione geometrica (β). *

Volendo che le progressioni (α), (β) definiscano i logaritmi decimali, basta porre $d = 1$, $q = 10$; ed allora si hanno le progressioni

$$\because\!\!\because \ldots : 10^{-4} : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 10^{0} : 10 : 10^{2} : 10^{3} : 10^{4} : \ldots \quad (\beta')$$
$$\div \ldots \; -4 \,.\, -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots \quad (\alpha').$$

Si scorge immediatamente che ogni numero della progressione (α') è il logaritmo decimale del corrispondente numero della progressione (β').

---

* Pare che l'origine della parola *logaritmo* sia la seguente:

Ai tempi di Napier, la base d'una potenza si chiamava *ragione della potenza*; e si diceva p.e. *ragione duplicata, ragione triplicata*, *ragione quadruplicata,* ecc. invece di 2ª potenza, 3ª potenza, 4ª potenza, ecc. Così p.e. in $4^3 = 64$, il numero 64 è una potenza la cui ragione è 4; e 3 è il numero che indica quante volte si prende la ragione 4 per avere 64; ossia 3 è il numero che indica che la ragione è triplicata; e quindi 3 è *il numero della ragione* di 64. Ed in generale: Se si pone $a^x = b$, sarà a la ragione di b, ed x *il numero* (ἀριθμός) *della ragione* (λόγου) di b; e quindi sarà x *il logaritmo di* b.

Per le cose dette al § 292, ogni numero della progressione geometrica (β) è una potenza, ed il corrispondente numero della progressione aritmetica (α) è *il numero della ragione* di questa potenza. Per questo motivo, ogni numero della progressione aritmetica (α) venne detto *il logaritmo* del corrispondente numero della progressione geometrica (β).

APPENDICE

CAPO PRIMO.

Moltiplicazione e divisione dei polinomi

MOLTIPLICAZIONE DEI POLINOMI ORDINATI.

293. DEFINIZIONI. 1ª. Se ciascun fattore letterale di un monomio intero è un monomio, dicesi ***grado del monomio*** **il numero de' suoi fattori letterali.**

Esempio. Il monomio $2a^3b^2c$ è di 6° grado; infatti è $2a^3b^2c = 2aaabbc$. *

2ª. Dicesi ***grado di un monomio frazionario*** **la differenza fra il grado del dividendo ed il grado del divisore.**

Esempio. $\frac{3a^2b^5c}{4mn^2}$ è di 5° grado.

Osservazione. Poichè (per la definizione del § 183) quando un numero non ha segnato alcun esponente vi si può sottintendere l'esponente 1, potremo anche dire: *Se ciascuno dei fattori letterali di un monomio intero è un monomio, dicesi grado del monomio la somma degli esponenti dei fattori letterali del monomio.*

3ª. Dicesi ***grado di un monomio intero rispetto ad una lettera,*** **l'esponente che questa lettera ha nel monomio.**

Esempio. $6a^2mn^3$ è di 2° grado rispetto ad a, di 1° grado rispetto ad m, e di 3° grado rispetto ad n.

294. TEOREMA. Il grado del prodotto di due o più fattori monomi è la somma dei gradi dei fattori.

Dimostrazione. Ciò risulta immediatamente dalla regola (§ 51) della moltiplicazione dei monomi. Infatti, p.e. $(4a^3b^2)(-2ab^3) = (4aaabb)(-2abbb) = -8aaaabbbbb = -8a^4b^5$, ove si vede che, essendo il 1° fattore di 5° grado ed il 2° di 4° grado, il prodotto è di 9° grado.

---

* Si parla del grado d'un monomio solo quando i fattori del monomio sono tutti monomi epperciò se qualcuno dei fattori letterali del monomio è un polinomio, come è nel monomi $4(a^2+n)bc$, non si dice più di qual grado sia il monomio.

295. DEFINIZIONI. 1ª. Dicesi *grado di un polinomio* il grado del monomio che ha il grado massimo.

Esempio. Il polinomio $a^2b-4ab+2c-4d^2-5$ è di 3° grado; il polinomio $5m^3n-4m^2n^4+6n^3$ è di 6° grado.

2ª. Dicesi *grado di un polinomio intero rispetto ad una lettera* il massimo esponente che la lettera ha nel polinomio.

Esempio. Il polinomio $5m^3n-2mn^4+n^2$ è di 3° grado rispetto ad m, e di 4° grado rispetto ad n.

3ª. Un polinomio intero si dice *ordinato rispetto ad una lettera*, se i termini del polinomio sono disposti in modo che gli esponenti di questa lettera vadano dal primo all'ultimo termine gradatamente crescendo, o gradatamente decrescendo; e questa lettera si chiama *lettera ordinatrice*.

Osservazione. Nel 1° caso si dice che il polinomio è ordinato secondo le potenze ascendenti, e nel 2° caso che è ordinato secondo le potenze discendenti della lettera ordinatrice.

Esempio. Il polinomio $4a^3-2a^2b+5ab^2-b^3$ è ordinato secondo le potenze discendenti di a, e secondo le potenze ascendenti di b.

4ª. Un polinomio intero si dice *completo rispetto ad una lettera* se contiene tutte le potenze di questa lettera, cominciando da quella che ne forma il grado, fino al termine che non contiene più questa lettera.

Esempio. Il polinomio $4a^3-2a^2b+5ab^2-b^3$ è completo rispetto ad a; esso è pure completo rispetto a b.

5ª. Un polinomio si dice *omogeneo* se i suoi monomi hanno tutti lo stesso grado.

Esempio. $4a^2b-3ab^2+5a^3$ è omogeneo e di 3° grado.

6ª. Due polinomi si dicono *ordinati similmente rispetto alla medesima lettera* se sono ordinati entrambi secondo le potenze ascendenti od entrambi secondo le potenze discendenti di questa lettera. *

MOLTIPLICAZIONE DI DUE POLINOMI ORDINATI.

296. *Esempio.*

	$2a^3-3a^2b+5ab^2-2b^3$	**Moltiplicando**
	$3a^2+2ab-b^2$	**Moltiplicatore**
Prodotto del molt.do per $3a^2$	$6a^5-9a^4b+15a^3b^2-6a^2b^3$	prodotto prima della riduzione dei termini simili
» » $+2ab$	$+4a^4b-6a^3b^2+10a^2b^3-4ab^4$	
» » $-b^2$	$-2a^3b^2+3a^2b^3-5ab^4+2b^5$	
Prodotto totale ridotto	$6a^5-5a^4b+7a^3b^2+7a^2b^3-9ab^4+2b^5$	

* Se in ciascun polinomio vi sono più termini contenenti la lettera ordinatrice col medesimo sponente, volendo *ordinare similmente* i due polinomi, bisogna, nei due polinomi, ordinare questi rmini nel medesimo modo rispetto ad altre lettere che si trovano nei medesimi termini.

ESEMPIO. Per ordinare similmente rispetto alle medesime lettere i due polinomi:

$3a^2b+8a^3-7b^2d+5a^2c-3ab+6a^2d$ e $2a^3d+5a^2+b^2+4a^4-6a^3c+5a^3b$ si scriverebbero così:

$8a^3+3a^2b+5a^2c+6a^2d-3ab-7b^2d$ e $4a^4+5a^3b-6a^3c+2a^3d+5a^2+b^2$.

Siccome ci occuperemo rarissimamente di questo caso, quando non diremo esplicitamente il ntrario, intenderemo sempre parlare di polinomi che, essendo ordinati, e privi di termini simili, contengono ciascuna potenza della lettera ordinatrice in un solo termine.

Dall'esempio precedente deriva immediatamente che:

Quando i polinomi moltiplicando e moltiplicatore sono ordinati similmente rispetto alla medesima lettera:

α) **Prima della riduzione dei termini simili, il numero dei termini del prodotto è eguale al prodotto del numero dei termini del moltiplicando pel numero dei termini del moltiplicatore.** Infatti questo prodotto è formato da tante orizzontali quanti sono i termini del moltiplicatore, e ciascuna orizzontale ha tanti termini quanti sono i termini del moltiplicando. *

β) **Il prodotto del primo termine del moltiplicando per il primo termine del moltiplicatore, ed il prodotto dell'ultimo termine del moltiplicando per l'ultimo termine del moltiplicatore sono due monomi non simili ad alcun altro; epperò non possono ridursi con alcun altro monomio.** Infatti: Poichè nel primo termine del moltiplicando e nel primo termine del moltiplicatore la lettera ordinatrice ha l'esponente massimo (cioè un esponente superiore a quello che si trova negli altri termini del medesimo polinomio), il prodotto di questi due primi termini darà un monomio in cui la lettera ordinatrice ha esponente massimo (cioè un esponente superiore a quello che si trova negli altri termini del prodotto). Questo termine dunque non si potrà ridurre con alcun altro. L'analogo si dica del prodotto dell'ultimo termine del moltiplicando per l'ultimo termine del moltiplicatore, nei quali la lettera ordinatrice ha l'esponente minimo.

γ) **Se il prodotto è ordinato come il moltiplicando ed il moltiplicatore, il primo termine del prodotto è il prodotto del primo termine del moltiplicando pel primo termine del moltiplicatore; e l'ultimo termine del prodotto è il prodotto dell'ultimo termine del moltiplicando per l'ultimo termine del moltiplicatore.** Ciò risulta evidentemente dall'esempio e da β.

δ) **Il grado del prodotto di due polinomi è la somma dei gradi dei fattori.** Ciò riesce evidente se si ricorda che il grado di un polinomio è il grado del suo monomio di grado massimo, e che quel monomio il quale nel prodotto ha il grado massimo è evidentemente il prodotto di quei due monomi i quali, nei fattori, hanno il grado massimo.

ε) **Se il moltiplicando ed il moltiplicatore sono polinomi omogenei, il prodotto sarà pure omogeneo.** Infatti: poichè i termini del moltiplicando hanno tutti lo stesso grado, e così pure quelli del moltiplicatore, i monomi del prodotto (pel teor. § 294) hanno tutti lo stesso grado, e quindi il prodotto è omogeneo.

ζ) **Il prodotto di due polinomi non può mai essere un monomio.** Ciò è evidente se non vi è alcuna lettera comune ai due polinomi. Se poi questi hanno una lettera comune, li possiamo ordinare similmente rispetto a questa lettera, ed allora (per β) riesce evidente che il prodotto conterrà almeno due termini i quali non si riducono con alcun altro, e perciò il prodotto sarà almeno un binomio.

η) **Il prodotto di un monomio per un polinomio privo di termini simi non può mai essere un monomio.** Infatti, moltiplicando il medesimo monomi per i termini non simili del polinomio, si otterranno per prodotto monom non simili.

---

* È evidente che questo è vero anche se il moltiplicando ed il moltiplicatore non sono ordinat

MASSIMO COMUN DIVISORE E MINIMO COMUN MULTIPLO DEI MONOMI.

297. Se si considera ciascuna lettera di un monomio come rappresentante un *numero primo*, e le lettere diverse come rappresentanti *numeri primi diversi*, si vede che le definizioni di *M.C.D.* e di *m.c.m.* dei monomi sono suggerite dagli enunciati delle regole date in Aritmetica per trovare il *M.C.D.* ed il *m.c.m.* dei numeri scomposti in fattori primi.

Tuttavia sarebbe erroneo il credere che il valore numerico del *M.C.D.* di vari monomi sia sempre superiore al valore numerico degli altri divisori dei monomi dati; e che il valore numerico del *m.c.m.* di vari monomi sia sempre inferiore al valore numerico degli altri multipli comuni ai monomi dati.

Esempio. Dei monomi $4a^2b^5$, $2a^4b^3$, $6a^3b^4$, il *M.C.D.* è $2a^2b^3$; altri divisori sono p.e. ab^2, a^2b,.........

Poniamo p.e. $a=2$, $b=3$. Allora avremo:

$$M.C.D. = 2a^2b^3 = 2.2^2.3^3 = 216;$$
$$ab^2 = 2.3^2 = 18;$$
$$a^2b = 2^2.3 = 12.$$

Ma se poniamo p.e. $a = {}^1\!/_2$, $b = {}^2\!/_3$, avremo:

$$M.C.D. = 2a^2b^3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 2.\frac{1}{4}.\frac{8}{27} = \frac{4}{27};$$
$$ab^2 = \frac{1}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{9} = \frac{2}{9};$$
$$a^2b = \left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{2}{3} = \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Analogamente: il *m.c.m.* dei monomi $4a^2b^5$, $2a^4b^3$, $6a^3b^4$ è $12a^4b^5$. Altri multipli sarebbero p.e. $12a^5b^5$, $12a^5b^6$.

Ponendo p.e. $a=2$, $b=3$, si ha:

$$m.c.m. = 12a^4b^5 = 12.2^4.3^5 = 12.16.243 = 46656;$$
$$12a^5b^5 = 12.2^5.3^5 = 12.32.243 = 93312;$$
$$12a^5b^6 = 12.2^5.3^6 = 12.32.729 = 279936.$$

Ma se poniamo p.e., come precedentemente, $a = {}^1\!/_2$, $b = {}^2\!/_3$, avremo:

$$m.c.m. = 12a^4b^5 = 12.\left(\frac{1}{2}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 12.\frac{1}{16}.\frac{32}{243} = \frac{24}{243};$$
$$12a^5b^5 = 12.\left(\frac{1}{2}\right)^5.\left(\frac{2}{3}\right)^5 = 12.\frac{1}{32}.\frac{32}{243} = \frac{12}{243};$$
$$12a^5b^6 = 12.\left(\frac{1}{2}\right)^5.\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 12.\frac{1}{32}.\frac{64}{729} = \frac{8}{243}.$$

Ove si vede che, nel caso di $a=2$, $b=3$, il *M.C.D.* è superiore agli altri divisori comuni, ed il *m.c.m.* è inferiore agli altri multipli comuni; mentre, nel caso di $a = {}^1\!/_2$, $b = {}^2\!/_3$, il *M.C.D.* è inferiore agli altri divisori comuni, ed il *m.c.m.* è superiore agli altri multipli comuni.

Ne segue che di due monomi formati colle medesime lettere non si può dire che quello in cui le lettere hanno esponente maggiore abbia valore numerico maggiore. Ciò si verifica sempre se *a tutte le lettere* si danno valori numerici superiori all'unità: può verificarsi o non nel caso contrario.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN POLINOMIO.

298. DEFINIZIONE. Un polinomio intero si dice *divisibile per un altro polinomio intero* **se esiste un polinomio (o monomio) intero che, moltiplicato per il secondo, dia per prodotto il primo.**

COROLLARIO. Se un polinomio intero è divisibile per un altro polinomio intero, il grado del quoto è la differenza fra il grado del dividendo ed il grado del divisore; e se il dividendo ed il divisore sono omogenei, anche il quoto sarà omogeneo. Ciò risulta immediatamente dalla definizione precedente e dal § 296, δ, ε.

299. Dati due polinomi qualunque, *in generale,* nessuno dei due è divisibile per l'altro. Vediamo intanto come si fa per trovare il quoto di due polinomi di cui il primo sia divisibile pel secondo.

Supponiamo, per semplicità, che il quoto (il quale per ipotesi sarà intero) sia un polinomio di tre soli termini, e supponiamo ancora di conoscere già questo quoto; moltiplicandolo pel divisore, otterremo per prodotto il dividendo. Ora questa moltiplicazione si può eseguire così. Si moltiplica tutto il divisore pel 1° termine del quoto, e si ottiene un 1° prodotto parziale; poi si moltiplica tutto il divisore pel 2° termine del quoto, e si ottiene un 2° prodotto parziale; poi si moltiplica tutto il divisore pel 3° termine del quoto, e si ottiene un 3° prodotto parziale. *La somma di questi tre prodotti parziali è eguale al dividendo.*

Ora se noi immaginiamo che il dividendo, il divisore ed il quoto siano *ordinati similmente rispetto alla medesima lettera,* (pel § 296, β) il 1° termine del dividendo (prodotto) sarà il prodotto del 1° termine del divisore (moltiplicando) pel 1° termine del quoto (moltiplicatore). Dunque: *Se si divide il 1° termine del dividendo pel 1° termine del divisore, si ottiene il 1° termine del quoto.*

Moltiplichiamo ora tutto il divisore per questo 1° termine del quoto, ed otterremo il 1° dei tre prodotti parziali la cui somma forma il dividendo. Sottraendo dal dividendo questo 1° prodotto parziale, otterremo un resto (detto 1° resto parziale della divisione) il quale evidentemente è eguale alla somma degli altri due prodotti parziali; epperciò è eguale al prodotto di tutto il divisore per la parte non ancora conosciuta del quoto. Dunque: *Il 1° resto parziale è eguale al prodotto di tutto il divisore per la parte non ancora conosciuta del quoto.*

Se questo resto non è ordinato, lo ordineremo come il dividendo ed il divisore; ed allora il 1° termine di questo resto sarà il prodotto del 1° termine del divisore pel 1° termine della parte ancora incognita del quoto, ossia pel 2° termine del quoto. Dunque: *Se si divide il 1° termine del 1° resto pel 1° termine del divisore, si ottiene il 2° termine del quoto.*

Moltiplichiamo il 2° termine del quoto per tutto il divisore, ed otterremo il 2° prodotto parziale che, sottratto dal 1° resto, darà un nuovo resto (detto 2° resto parziale della divisione) il quale, evidentemente, è eguale al 3° prodotto parziale sopra considerato. Dunque: *Il 2° resto parziale della divisione è eguale al prodotto di tutto il divisore per la parte non ancora conosciuta del quoto.* (Nel nostro caso questa parte consta di un solo termine)

Ordiniamo questo 2° resto parziale come abbiamo ordinato il 1° resto; e, ragionando come sopra, conchiuderemo che: *Se si divide il 1° termine del 2° resto parziale per il 1° termine del divisore, si ottiene il 3° termine del quoto.*

Moltiplicando questo termine del quoto per tutto il divisore, otteniamo il 3° prodotto parziale il quale, nel caso nostro, è eguale al 2° resto parziale della divisione. Sottraendo questo prodotto da questo resto, otterremo per resto zero. *L'ultimo resto ottenuto si suole chiamare il resto della divisione.*

Osservazione. Dalle cose dette risulta evidentemente che: *Quando un polinomio è divisibile per un altro, il resto della loro divisione è zero.*

300. Poichè il ragionamento ora fatto è valido qualunque sia il numero dei termini del quoto, potremo ricavarne la seguente regola:

REGOLA PER TROVARE IL QUOTO INTERO DI DUE POLINOMI INTERI.

1°. Si ordinano il dividendo ed il divisore similmente, secondo le potenze ascendenti, o discendenti, della medesima lettera.

2°. Si divide il 1° termine del dividendo per il 1° termine del divisore, e si ottiene il 1° termine del quoto.

3°. Si moltiplica il 1° termine del quoto per tutto il divisore; il prodotto si sottrae dal dividendo, e si ottiene così il 1° resto parziale.

4°. Si ordina il 1° resto come si era ordinato il dividendo ed il divisore.

5°. Si divide il 1° termine del 1° resto pel 1° termine del divisore, e si ottiene il 2° termine del quoto.

6°. Si moltiplica il 2° termine del quoto per tutto il divisore; il prodotto si sottrae dal 1° resto parziale, e si ottiene così il 2° resto parziale.

7°. Si opera su questo 2° resto parziale come si era operato sul 1°, e si ottiene un nuovo resto parziale, sul quale si opera come sui precedenti; e si continua così finchè si ottenga per resto zero.

Esempio 1°.

Dividendo	$14a^5-27a^4b+21a^3b^2-3a^2b^3-2ab^4$	$2a^2-3ab+2b^2$	**Divisore**
	$-14a^5+21a^4b-14a^3b^2$	$7a^3-3a^2b-ab^2$	**Quoto**
1° resto parziale	$-6a^4b+7a^3b^2-3a^2b^3-2ab^4$		
	$+6a^4b-9a^3b^2+6a^2b^3$		
2° resto parziale	$-2a^3b^2+3a^2b^3-2ab^4$		
	$+2a^3b^2-3a^2b^3+2ab^4$		
Resto finale	$0 \quad 0 \quad 0$		

Osservazione. Si è diviso il 1° termine $14a^5$ del dividendo pel 1° termine $2a^2$ del divisore, e si è ottenuto il 1° termine del quoto, cioè $7a^3$. Si è moltiplicato tutto il divisore per $7a^3$, e si è ottenuto il polinomio $14a^5-21a^4b+14a^3b^2$, che si è sottratto dal dividendo. Per eseguire più comodamente la sottrazione, si è scritto subito il polinomio sottraendo coi segni cambiati. (Conviene abituarsi a fare questo in ogni divisione).

Si è diviso il 1° termine $-6a^4b$ del 1° resto pel 1° termine $2a^2$ del divisore, e si è ottenuto il 2° termine $-3a^2b$ del quoto. Si è moltiplicato tutto il divisore per questo termine del quoto, ed il polinomio ottenuto è stato sottratto dal 1° resto parziale. E così di seguito.

Esempio 2°.

Dividendo	$a^3-3abc+b^3+c^3$	$a+b+c$ **Divisore**
	$-a^3 \qquad\qquad -a^2b-a^2c$	$a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$ **Quoto**
1° resto parziale non ordinato	$-3abc+b^3+c^3-a^2b-a^2c$	
1° » » ordinato	$-a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3$	
	$+a^2b \qquad +abc \qquad +ab^2$	
2° » » non ordinato......	$-a^2c-2abc+b^3+c^3+ab^2$	
2° » » ordinato..........	$-a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3$	
	$+a^2c \qquad +abc \qquad +ac^2$	
3° » » non ordinato...............	$+ab^2-abc+b^3+c^3+ac^2$	
3° » » ordinato....................	$+ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3$	
	$-ab^2 \qquad\qquad -b^3 \qquad -b^2c$	
4° » » non ordinato........................	$-abc+ac^2 \qquad +c^3-b^2c$	
4° » » ordinato.............................	$-abc+ac^2-b^2c+c^3$	
	$+abc \qquad +b^2c \qquad +bc^2$	
5° » » non ordinato.................................	$+ac^2 \qquad +c^3+bc^2$	
5° » » ordinato.......................................	$+ac^2+bc^2+c^3$	
	$-ac^2-bc^2-c^3$	
Resto finale................................	$0 \quad 0 \quad 0$	

Osservazione. Nella divisione dei polinomi si abbia sempre l'avvertenza di ordinare ciascun resto parziale come sono ordinati il dividendo ed il divisore. È poi utile, per le sottrazioni che occorrono, scrivere i termini da sottrarsi in colonna coi termini simili, come si fece nell'esempio precedente. Talvolta, per ottenere il quoto esatto, è necessario introdurre coefficienti frazionarî al quoto, come si può vedere nel seguente esempio.

Esempio 3°.

$12a^4x^2-6a^3x^3-40a^2x^4+11ax^5-6x^6$	$6ax-12x^2$
$-12a^4x^2+24a^3x^3$	$2a^3x+3a^2x^2-\frac{4}{6}ax^3+\frac{1}{2}x^4$
$+18a^3x^3-40a^2x^4+11ax^5-6x^6$	
$-18a^3x^3+36a^2x^4$	
$-4a^2x^4+11ax^5-6x^6$	
$+4a^2x^4-8ax^5$	
$+3ax^5-6x^6$	
$-3ax^5+6x^6$	
$0 \quad 0$	

301. Quando il polinomio dividendo non è divisibile pel polinomio divisore se andiamo alla ricerca del quoto seguendo la regola data, non perverremo ma al resto zero; perchè, se ciò accadesse, il dividendo sarebbe divisibile pe divisore, il che è contro l'ipotesi. Perverremo perciò ad un resto parziale senz

§ 301

poter più oltre proseguire l'operazione, oppure l'operazione si potrà continuare indefinitamente. *

Esempio 1°.

$$\begin{array}{l|l}
5a^4b - 3a^3b^2 + 6a^2b^3 - 4ab^4 & a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline
-5a^4b - 10a^3b^2 + 5a^2b^3 & 5a^2 - 13ab + 37b^2 \\ \cline{1-1}
\quad -13a^3b^2 + 11a^2b^3 - 4ab^4 & \\
\quad +13a^3b^2 + 26a^2b^3 - 13ab^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad +37a^2b^3 - 17ab^4 & \\
\qquad -37a^2b^3 - 74ab^4 + 37b^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -91ab^4 + 37b^5 &
\end{array}$$

Esempio 2°.

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - 2x + 3x^2 \\ \hline
-1 + 2x - 3x^2 & 1 + 2x + x^2 - 4x^3 - 11x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cline{1-1}
\quad +2x - 3x^2 & \\
\quad -2x + 4x^2 - 6x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad +x^2 - 6x^3 & \\
\qquad -x^2 + 2x^3 - 3x^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -4x^3 - 3x^4 & \\
\qquad\quad +4x^3 - 8x^4 + 12x^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad -11x^4 + 12x^5 & \\
\qquad\qquad +11x^4 - 22x^5 + 33x^6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad -10x^5 + 33x^6 & \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

Osservazione. In questo esempio conviene considerare il dividendo 1 come un polinomio ordinato secondo le potenze ascendenti della lettera ordinatrice, in cui mancano tutti i termini che seguono il primo. In casi simili, bisogna aver l'avvertenza di ordinare (se non lo è già) il divisore secondo le potenze ascendenti della lettera ordinatrice. Poichè gli esponenti, nei successivi resti parziali, vanno indefinitamente crescendo, la divisione si potrebbe protrarre indefinitamente senza arrivare mai ad ottenere per resto zero.

302. Quando il dividendo non è divisibile pel divisore, se il dividendo ed il divisore sono ordinati secondo le potenze discendenti della medesima lettera, si arriverà ad un punto in cui non sarà più possibile dividere il 1° termine del resto (che si suppone ordinato come il dividendo ed il divisore) pel 1° termine del divisore, ed allora (rispetto alla lettera ordinatrice) il grado del resto sarà inferiore al grado del divisore.

In particolare: se il divisore è di 1° grado rispetto alla lettera ordinatrice, il resto sarà indipendente da questa lettera, ossia non conterrà la lettera ordinatrice. Ciò si vede manifestamente nel seguente esempio.

* Affinchè quest' ultimo fatto possa accadere, bisogna che il dividendo ed il divisore siano ordinati secondo le potenze ascendenti della lettera ordinatrice, come si vede nell'esempio 2°.

Esempio.

$$
\begin{array}{l|l}
+3x^4+5x^3+3x^2-4x-5 & 3x+2 \\ \hline
-3x^4-2x^3 & x^3+x^2+\frac{1}{3}x-\frac{14}{9} \\ \hline
\quad +3x^3+3x^2-4x-5 & \\
\quad -3x^3-2x^2 & \\ \hline
\qquad +x^2-4x-5 & \\
\qquad -x^2-\frac{2}{3}x & \\ \hline
\qquad\quad -\frac{14}{3}x-5 & \\
\qquad\quad +\frac{14}{3}x+\frac{28}{9} & \\ \hline
\qquad\qquad -\frac{17}{9} &
\end{array}
$$

In ogni caso però, qualunque sia il punto in cui noi sospendiamo l'operazione, si suole chiamare *resto* l'ultimo resto ottenuto, e *quoto incompleto* l'espressione scritta al posto del quoto; il vero quoto allora (cioè quell'espressione che moltiplicata pel divisore dà per prodotto il dividendo) si chiama *quoto completo.* Fra *dividendo, divisore, resto,* e *quoto incompleto* esiste l'importante relazione espressa dal seguente teorema.

303. TEOREMA. Nella divisione incompleta di due polinomi, il dividendo è eguale al resto più il prodotto del divisore pel quoto incompleto.

Sia D il dividendo, d il divisore, Q il quoto incompleto, ed R il resto; dico che si avrà $D=R+dQ$.

Dimostrazione. Il resto R si è ottenuto sottraendo da D successivamente il prodotto del divisore per ciascun termine del quoto incompleto; ossia sottraendo da D il prodotto del divisore per tutto il quoto incompleto. Sarà dunque $D-dQ=R$; e quindi il minuendo D è eguale alla somma del resto R e del sottraendo dQ; ossia è $D=R+dQ$.

COROLLARIO. Fra il dividendo D, il divisore d, il quoto incompleto Q, ed il resto R, esiste la relazione $\frac{D}{d}=Q+\frac{R}{d}$.

Dimostrazione. Dividendo per d ambi i membri dell'eguaglianza $D=dQ+R$ si ottiene la nuova eguaglianza $\frac{D}{d}=\frac{dQ}{d}+\frac{R}{d}$, ossia $\frac{D}{d}=Q+\frac{R}{d}$.

304. Non vi sono regole generali per riconoscere facilmente *a priori* se un polinomio intero è divisibile per un altro polinomio intero. Ricordando tuttavia che, se ciò si verifica, e se si ordinano similmente rispetto alla medesima lettera il dividendo, il divisore ed il quoto, il primo termine del dividendo è il prodotto del primo termine del divisore pel primo termine del quoto, e l'ultimo termine del dividendo è il prodotto dell'ultimo termine del divisore per l'ultimo termine del quoto, stabiliremo i seguenti caratteri di indivisibilità.

***CARATTERI DI INDIVISIBILITÀ.** Di due polinomi interi, ordinati similmente rispetto alla medesima lettera, il primo non è divisibile pel secondo:*

1°. Se nel divisore vi è qualche lettera che non si trova nel dividendo;

2°. Se il 1° e l'ultimo termine del dividendo non sono divisibili rispettivamente pel 1° e per l'ultimo termine del divisore;

3°. Se il 1° e l'ultimo termine di qualche resto parziale (ordinato come il dividendo ed il divisore) non sono divisibili rispettivamente pel 1° e per l'ultimo termine del divisore;

4°. Se (essendo il dividendo ed il divisore ordinati secondo le potenze discendenti della lettera ordinatrice) si ottiene al quoto un termine tale che (rispetto alla lettera ordinatrice) il grado di questo termine, sommato col grado dell'ultimo termine del divisore, dia un grado inferiore a quello dell'ultimo termine del dividendo; *

5°. Se (essendo il dividendo ed il divisore ordinati secondo le potenze ascendenti della lettera ordinatrice) si ottiene al quoto un termine tale che (rispetto alla lettera ordinatrice) il grado di questo termine, sommato col grado dell'ultimo termine del divisore, dia un grado superiore a quello dell'ultimo termine del dividendo. *

Osservazione 1a. Quando il polinomio dividendo è divisibile pel polinomio divisore, è indifferente ordinarli secondo una lettera ordinatrice o secondo un'altra, ed è pure indifferente ordinarli secondo le potenze ascendenti o discendenti della lettera ordinatrice; il quoto che si ottiene sarà sempre il medesimo, e varierà solamente l'ordine con cui i suoi termini si succedono. Però, se si commette qualche errore nell'ordinare il dividendo, il divisore ed i resti parziali, generalmente la divisione non darà più per resto zero; perchè la regola per la ricerca del quoto si fonda essenzialmente sull'ipotesi che il dividendo, il divisore ed i resti parziali siano ordinati similmente. L'operazione darà un quoto incompleto (che non sarà il quoto vero) ed un certo resto. Tuttavia, il dividendo sarà ancora eguale al resto trovato più il prodotto del divisore pel quoto incompleto. Ciò risulta evidentemente dal modo con cui si ricavano il polinomio scritto al posto del quoto ed il resto.

Osservazione 2a. Quando il dividendo non è divisibile pel divisore, se si eseguisce varie volte la divisione cambiando, in ciascuna volta, la lettera ordinatrice, oppure il modo di ordinare i polinomi (rispettando però sempre la regola del § 300), si trovano nei vari casi espressioni diverse al posto del quoto e del resto. Tuttavia, ai risultati di ciascuna di queste operazioni sono sempre applicabili il teorema ed il corollario del § 303.

DIVISIBILITÀ DEI POLINOMI.

305. LEMMA 1°. Dato un polinomio intero rispetto ad x, ** ordinato secondo le potenze discendenti di x, e tale che il coefficiente di x nel primo termine del polinomio sia diverso da zero, è sempre possibile trovare un valore di x pel quale il primo termine del polinomio sia, in valore assoluto, maggiore della somma algebrica di tutti gli altri termini.

* Infatti: se il quoto intero esiste, il grado dell'ultimo termine del quoto sommato col grado dell'ultimo termine del divisore, deve dare un grado eguale a quello dell'ultimo termine del dividendo, e non inferiore nè superiore ad esso.

** Un polinomio si dice *intero rispetto ad una lettera* se nessun termine del polinomio ha questa lettera per divisore.

Sia $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m$ *un polinomio intero rispetto ad* x, *ed ordinato secondo le potenze discendenti di* x; *inoltre* a_0, a_1, a_2, $a_3,\dots\dots a_m$ *non contengano* x, *ed* a_0 *sia diverso da zero. Si vuol dimostrare che si potrà trovare un valore di* x *tale che, in valore assoluto, si abbia* $a_0x^m>a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\dots\dots+a_m$.

Dimostrazione. Siano rispettivamente A_1, A_2, $A_3,\dots\dots A_m$ i valori assoluti di a_1, a_2, $a_3,\dots\dots a_m$. Per valori di x maggiori di 1 (pel teor. 5° § 194) avremo $x^{m-1}>x^{m-2}$, $x^{m-1}>x^{m-3}$, $x^{m-1}>x^{m-4},\dots\dots$ ed $A_mx^{m-1}>a_m$. Sarà quindi evidentemente:

$A_1x^{m-1}+A_2x^{m-1}+A_3x^{m-1}+\dots+A_mx^{m-1}>a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m$;

ossia $(A_1+A_2+A_3+\dots+A_m)x^{m-1}>a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m$.

Ora, per dimostrare il teorema, basterà dimostrare che si può trovare un valore di x tale che, in valore assoluto, sia $a_0x^m>(A_1+A_2+A_3+\dots+A_m)x^{m-1}$; cioè sia $a_0x.x^{m-1}>(A_1+A_2+A_3+\dots+A_m)x^{m-1}$; od ancora (dividendo ambi i membri per a_0x^{m-1}) sia $x>\dfrac{(A_1+A_2+A_3+\dots\dots+A_m)x^{m-1}}{a_0x^{m-1}}$;

cioè sia $x>\dfrac{A_1+A_2+A_3+\dots\dots+A_m}{a_0}$.

Ne segue che per ogni valore di x maggiore del valore assoluto di $\dfrac{A_1+A_2+A_3+\dots+A_m}{a_0}$, sarà $a_0x^m>(A_1+A_2+A_3+\dots+A_m)x^{m-1}$; ed a fortiori sarà in valore assoluto $a_0x^m>a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\dots+a_m$.

Osservazione. È sempre possibile trovare un valore di x diverso da un certo numero arbitrario a, e tale che sia in valore assoluto $a_0x^m>a_1x^{m-1}+$ $+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m$. Basta infatti che questo valore di x, oltre ad esser diverso da a, sia anche maggiore del valore assoluto di $\dfrac{A_1+A_2+A_3+\dots+A_m}{a_0}$.

306. LEMMA 2°. Se il polinomio $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m$, **intero rispetto ad** x, **ed ordinato secondo le potenze discendenti di** x, **si annulla per ogni valore di** x **diverso dal valore** $x=a$, **deve avere eguali a *zero* tutti i coefficienti di** x, **ed il termine noto; ossia deve essere** $a_0=a_1=a_2=a_3=\dots\dots=a_m=0$. *(Si suppone che* a_0, a_1, a_2, $a_3,\dots\dots a_m$ *non contengano* x*).*

Dimostrazione. Se il polinomio dato si annulla per ogni valore di x, deve essere $a_0=0$; perchè se fosse a_0 diverso da zero, potremmo (per la osservazione al lemma precedente) trovare un valore di x diverso da a, e tale che in valore assoluto sia $a_0x^m>a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m$. In tal caso la somma algebrica $a_0x^m+(a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m)$, ossia il polinomio dato, non potrebbe più essere zero; il che è contro l'ipotesi. Sarà dunque $a_0=0$; ed allora $a_0x^m=0$, ed il polinomio dato si riduce al polinomio $a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\dots\dots+a_m$.

Ragionando su questo polinomio come si fece sul polinomio dato, si conchiude che deve essere $a_1=0$; ed allora il polinomio dato si riduce al polinomio $a_2x^{m-2}+a_3x^{m-3}+\dots\dots+a_m$.

Ragionando su questo come sul polinomio dato, si conchiude che deve essere $a_2=0$; e così continuando si ottiene $a_3=0$; $a_4=0;\dots\dots a_m=0$.

307. LEMMA 3°. Se il polinomio $a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots\dots+a_m$, **intero rispetto ad** x, **ed ordinato secondo le potenze discendenti di** x, **si an-**

nulla per ogni valore di x diverso dal valore $x=a$, si annullerà anche pel valore $x=a$.

Dimostrazione. Se il polinomio si annulla per ogni valore di x diverso da $x=a$, deve essere (pel lemma preced.) $a_0=a_1=a_2=\ldots\ldots\ldots=a_m=0$, ed allora evidentemente si annullerà anche dando ad x il valore $x=a$.

Osservazione. Poichè, ordinando un polinomio, il valore del polinomio non cambia, se un polinomio ordinato si annulla per un certo valore di x, si annullerà pel medesimo valore di x anche quando non è ordinato. Ne segue che nell'enunciato del lemma 3° si può sopprimere la condizione che il polinomio sia ordinato.

308. LEMMA 4°. Se P è un polinomio intero rispetto ad x, ed ordinato secondo le potenze discendenti di x, e Q è il quoto che si ottiene dividendo P per $x-a$ (ove a non contiene x), ed R è il resto della divisione, si avrà $P=Q(x-a)+R$ per ogni valore di x, anche pel valore $x=a$. *

Dimostrazione. Dal teorema del § 303 sappiamo che l'eguaglianza $P=Q(x-a)+R$, ossia l'equivalente $P-[Q(x-a)+R]=0$, è soddisfatta da ogni valore di x che non renda nullo il divisore $x-a$, ossia da ogni valore di x diverso dal valore $x=a$. Dunque il polinomio $P-[Q(x-a)+R]$ si annulla per ogni valore di x diverso dal valore $x=a$; e quindi (pel lemma ed osserv. preced.) si annullerà anche pel valore $x=a$. Ne segue che per ogni valore di x, compreso il valore $x=a$, si avrà $P-[Q(x-a)+R]=0$, ossia $P=Q(x-a)+R$.

309. TEOREMA 1°. Il resto che si ottiene quando si divide per $x-a$ un polinomio intero rispetto ad x ed ordinato secondo le potenze discendenti di x, è eguale al valore che acquista il polinomio stesso quando in esso si cambia x in a. **

Dimostrazione. Rappresentiamo per brevità con P il polinomio dividendo; e dividiamolo per $x-a$, proseguendo l'operazione finchè si ottenga per resto zero, oppure un resto non più divisibile per $x-a$. Si avrà allora per quoto un certo polinomio intero che rappresento con Q, ed un certo resto che rappresento con R. Osservo anzitutto che Q (in generale) conterrà la lettera x, e che R può essere eguale a zero, ma non può contenere la lettera x, perchè, se la contenesse, potremmo ancora dividere R per $x-a$, il che è contro l'ipotesi. Per indicare che P e Q contengono la lettera x, scriveremo P_x e Q_x invece di P e Q. Pel teorema del § 303, si avrà $P_x=(x-a)Q_x+R$. Pel lemma 4°, questa eguaglianza è soddisfatta anche dal valore $x=a$. Se dunque in tutti i termini dell'eguaglianza in luogo di x scriviamo a, l'eguaglianza persisterà. In questo caso il polinomio P_x prende un certo valore che rappresento con P_a; e Q_x assume esso pure un certo valore defi-

---

* Il teorema del § 303 ci dice che, se dividendo P per $x-a$ si ha per quoto Q e resto R, si avrà $P=Q(x-a)+R$. Questo teorema ci dimostra così che l'eguaglianza $P=Q(x-a)+R$ è vera in tutti i casi in cui si può fare la divisione di P per $x-a$, ossia ogni qual volta si ha $x-a$ diverso da zero, ossia x diverso da a. Ma quando è $x=a$, è anche $x-a=0$, ed allora non possiamo più dividere P per $x-a$; e quindi il teor. del § 303 non ci fa più conoscere se l'eguaglianza $P=Q(x-a)+R$ è ancora vera o non. Il lemma 4° ha per scopo di dimostrare che l'eguaglianza $P=Q(x-a)+R$, essendo vera per ogni valore di x diverso da a, è pure vera pel valore $x=a$.

** È sottinteso che a non contiene la lettera x; così pure in tutto ciò che riguarda la divisibilità dei polinomi, sottintenderemo sempre che i monomi che si scrivono al quoto saranno tutti monomi interi.

nito * che rappresento con Q_a. Il resto R non varia perchè esso non contiene la lettera x. L'eguaglianza precedente si muterà allora nella seguente: $P_a=(a-a)Q_a+R$. Poichè Q_a ha valore definito, essendo $a-a=0$, sarà $(a-a)Q_a=0.Q_a=0$. (Corollario 2° § 41). Avremo quindi:

$$P_a=(a-a)Q_a+R=0.Q_a+R=0+R=R.$$

Esempio 1º. Dividendo $5x^3-4x^2-2x+6$ per $x-5$, si ottiene per quoto incompleto $5x^2+21x+103$, e per resto 521. Se nel dividendo ad x si sostituisce $+5$, si ottiene evidentemente $5(+5)^3-4(+5)^2-2(+5)+6=$ $=5(+125)-4(+25)-2(+5)+6=625-100-10+6=521$.

Esempio 2º. Dividendo il polinomio $2x^4-3x^3-4x^2+5x-2$ per $x-2$, si ottiene per quoto $2x^3+x^2-2x+1$, e per resto *zero*. Se nel dividendo ad x si sostituisce $+2$, si ottiene $2(+2)^4-3(+2)^3-4(+2)^2+5(+2)-2=$ $=2(+16)-3(+8)-4(+4)+5(+2)-2=32-24-16+10-2=0$.

Esempio 3º. Dividendo $ax^4-a^2x^3+a^3x^2-a^4$ per $x-a$, si ottiene per quoto incompleto $ax^3+a^3x+a^4$, e per resto $-a^4+a^5$. Se nel dividendo ad x si sostituisce $+a$, si ottiene:

$$a(+a)^4-a^2(+a)^3+a^3(+a)^2-a^4=+a^5-a^5+a^5-a^4=+a^5-a^4.$$

Esempio 4º. Dividendo il polinomio $ax^4-a^2x^3+a^3x^2-a^5$ per $x-a$, si ottiene per quoto $ax^3+a^3x+a^4$, e per resto *zero*. Se nel dividendo ad x si sostituisce $+a$, si ottiene:

$$a(+a)^4-a^2(+a)^3+a^3(+a)^2-a^5=+a^5-a^5+a^5-a^5=0.$$

COROLLARIO 1°. Se un polinomio P_x, intero rispetto ad x, acquista il valore zero quando in esso si cambia x in a, il polinomio è divisibile per $x-a$.

Dimostrazione. Per ipotesi si ha $P_a=0$; e poichè (teorema preced.) è sempre $P_a=R$, sarà pure $R=0$; e quindi sarà $P_x=(x-a)Q_x$, ove Q_x è per ipotesi un polinomio intero rispetto ad x. Dunque (per la definizione del § 298) P_x è divisibile per $x-a$.

COROLLARIO 2°. Se un polinomio P_x, intero rispetto ad x, è divisibile per $x-a$, esso acquista il valore zero quando vi si cambia x in a.

Dimostrazione. Se P_x è divisibile per $x-a$, (per la osservaz. del § 299) sarà $R=0$; ma (teor. preced.) essendo sempre $P_a=R$, sarà pure $P_a=0$.

310. *Osservazione 1ª.* Sia ancora P il polinomio dividendo, Q il quoto ed R il resto, e sia p.e. $x+a$ il divisore. Ragionando come precedentemente, avremo: $P_x=(x+a)Q_x+R$, e mutando in ogni termine x in $-a$, avremo: $P_{(-a)}=(-a+a)Q_{(-a)}+R=0+R=R$.

Esempio. Dividendo il polinomio $2x^3-3x^2-5x-1$ per $x+3$, si ottiene per quoto $2x^2-9x+22$, e per resto -67. Se nel dividendo ad x si sostituisce -3, si ottiene $2(-3)^3-3(-3)^2-5(-3)-1=2(-27)-3(+9)-5(-3)-1=$ $=-54-27+15-1=-67$. **

---

* Poichè il polinomio Q è intero rispetto ad x, nessun suo termine contiene x al denominatore, e quindi ciascun suo termine avrà forma diversa da $\frac{m}{0}$ e da $\frac{0}{0}$, ed avrà perciò (osservazione 5ª § 68) valore definito. Dunque tutto il polinomio Q [che è eguale (§ 53) alla somma algebrica dei suoi termini] avrà valore definito. Non si esclude però il caso possibile di $Q=0$. Si dice che Q ha valore definito; perchè se fosse $Q=\frac{0}{0}$, oppure $Q=\frac{m}{0}$, non sapremmo dire a che cosa è eguale $0.Q$.

** Nella sostituzione si ponga mente ai due teoremi dei §§ 44, 45 sul segno delle potenze.

Osservazione 2ª. Se il divisore è $mx-a$, ragionando analogamente, avremo: $P_x=(mx-a)Q_x+R$; e cambiando in ogni termine x in $\frac{a}{m}$, avremo ancora:

$$P_{\frac{a}{m}}=(m\frac{a}{m}-a)Q_{\frac{a}{m}}+R=(a-a)Q_{\frac{a}{m}}+R=0.Q_{\frac{a}{m}}+R=0+R=R.$$

Similmente se il divisore fosse $mx+a$, avremmo $P_x=(mx+a)Q_x+R$; e mutando in ogni termine x in $-\frac{a}{m}$, avremmo:

$$P_{(-\frac{a}{m})}=\left[m\left(-\frac{a}{m}\right)+a\right]Q_{(-\frac{a}{m})}+R=(-a+a)Q_{(-\frac{a}{m})}+R=$$

$$=0.Q_{(-\frac{a}{m})}+R=0+R=R.$$

Donde si può ricavare il seguente teorema generale:

TEOREMA. Il resto che si ottiene quando si divide un polinomio intero rispetto ad x ed ordinato secondo le potenze discendenti di x per un binomio di 1° grado in x, è eguale al valore che acquista il polinomio stesso quando in luogo di x si pone quel valore che, sostituito ad x nel binomio divisore, annulla il divisore stesso.

311. Esaminiamo ora in quali casi x^m+a^m ed x^m-a^m sono divisibili per $x+a$ o per $x-a$. *

A tal fine, poniamo $+a$ (oppure $-a$) in luogo di x nel dividendo; e se per questa sostituzione il dividendo si annulla, è segno [pel coroll. 1° § 309, ed osserv. 1ª § 310] che è divisibile per $x-a$ (o per $x+a$); in caso contrario il dividendo non è divisibile nè per $x-a$ nè per $x+a$. **

Esaminiamo separatamente i varî casi particolari che si possono presentare, rappresentando ancora con R il resto della divisione.

$(x^m-a^m):(x-a)$	se m è pari,	$R=(+a)^m-a^m=+a^m-a^m=0.$	**Divisibile**
	se m è dispari,	$R=(+a)^m-a^m=+a^m-a^m=0.$	**Divisibile**
$(x^m-a^m):(x+a)$	se m è pari,	$R=(-a)^m-a^m=+a^m-a^m=0.$	**Divisibile**
	se m è dispari,	$R=(-a)^m-a^m=-a^m-a^m=-2a^m$	**Non div.**
$(x^m+a^m):(x-a)$	se m è pari,	$R=(+a)^m+a^m=+a^m+a^m=+2a^m$	**Non div.**
	se m è dispari,	$R=(+a)^m+a^m=+a^m+a^m=+2a^m$	**Non div.**
$(x^m+a^m):(x+a)$	se m è pari,	$R=(-a)^m+a^m=+a^m+a^m=+2a^m$	**Non div.**
	se m è dispari,	$R=(-a)^m+a^m=-a^m+a^m=0.$	**Divisibile**

Se chiamiamo *simili* due potenze quando hanno egual esponente, possiamo riassumere questi risultati nei due seguenti teoremi 2° e 3°:

TEOREMA 2°. Di due potenze simili pari, la somma non è divisibile nè per la somma, nè per la differenza delle basi; e la differenza è divisibile tanto per la somma quanto per la differenza delle basi.

---

* È sottinteso che si suppone che a non contenga x.

** Si può osservare che x^m+a^m ed x^m-a^m sono polinomi interi rispetto ad x, ed ordinati secondo le potenze discendenti di x, appunto come richiede il teorema 1° § 309. Essi hanno la particolarità di avere solo il primo e l'ultimo termine, e di non avere i termini intermedi i quali dovrebbero contenere le potenze discendenti di x inferiori alla emmesima. A questi polinomi è perciò applicabile il teorema 1° § 309. Si osservi ancora che (pei teoremi dei §§ 44, 45) è $(+a)^m=+a^m$ sia m pari o dispari; invece $(-a)^m=+a^m$ se m è pari, e $(-a)^m=-a^m$ se m è dispari.

TEOREMA 3°. Di due potenze simili dispari, la somma è divisibile solamente per la somma delle basi; e la differenza è divisibile solamente per la differenza delle basi.

Esempi.

$(x^2-a^2):(x-a)=x+a.$
$(x^2-a^2):(x+a)=x-a.$
$(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2.$
$(x^3+a^3):(x+a)=x^2-ax+a^2.$
$(x^4-a^4):(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3.$
$(x^4-a^4):(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3.$
$(x^5-a^5):(x-a)=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$
$(x^5+a^5):(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4.$

312. Dagli esempi recati si può facilmente ricavare la seguente regola:

REGOLA. *Il quoto intero (quando esiste) delle divisioni che hanno la forma* $(x^m \pm a^m):(x \pm a)$ *è un polinomio in cui:*

1°. Ciascun termine è il prodotto d'una potenza di x *per una potenza di* a*;*

2°. Gli esponenti di x *vanno gradatamente decrescendo da* $m-1$ *a zero; mentre gli esponenti di* a *vanno gradatamente crescendo da zero ad* $m-1$*;* *

3°. Se il divisore è una differenza, i termini del quoto sono tutti positivi; se il divisore è una somma, i termini del quoto sono alternativamente uno positivo e l'altro negativo.

REGOLA PRATICA PER TROVARE SPEDITAMENTE IL RESTO DELLA DIVISIONE DI UN POLINOMIO INTERO RISPETTO AD x ***PER UN BINOMIO DELLA FORMA*** $x \pm a$.

Sia p.e. il polinomio $P_x=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$, ove a_0, a_1, a_2, a_3 sono coefficienti qualsiasi, positivi o negativi, e non contenenti x. Chiamando R il resto, (pel teorema 1° § 309) avremo $R=a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3$.

Questo resto lo possiamo anche ottenere a questo modo:

1°. Si moltiplica a_0 per a e si ha a_0a.

2°. Al risultato si aggiunge a_1, e si ha a_0a+a_1.

3°. Il risultato si moltiplica per a, e si ha $a_0a^2+a_1a$.

4°. Al risultato si aggiunge a_2, e si ha $a_0a^2+a_1a+a_2$.

5°. Il risultato si moltiplica per a, e si ha $a_0a^3+a_1a^2+a_2a$.

6°. Al risultato si aggiunge a_3, e si ha $a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3$.

Esempio. Sia p.e. $4x^3-3x^2+5x+1$ il dividendo, ed $x-2$ il divisore. In questo caso è $a_0=+4$, $a_1=-3$, $a_2=+5$, $a_3=+1$, $a=+2$; e l'operazione si può disporre così:

a	a_0	a_1	a_2	a_3	
	$+4$	-3	$+5$	$+1$	
$+2)$		$+8$	$+10$	$+30$	
		$+5$	$+15$	$+31$	**Resto** $=+31$.

Si moltiplica $+2$ per $+4$, e si ottiene $+8$ che si scrive sotto il -3, e poi si somma con esso, e si ha $+5$. Si moltiplica $+5$ per $+2$, e si ottiene $+10$ che si scrive sotto il $+5$, e si somma con esso ottenendo così $+15$. Si moltiplica $+15$ per $+2$, e si ha $+30$ che si scrive sotto il $+1$, e si somma con esso ottenendo così $+31$. Il resto della divisione sarà $+31$.

---

* Per dire che un termine non contiene una lettera si suole anche dire che la contiene (V. § 184) con esponente zero. E quindi il 1° termine sarà a^0x^{m-1}, ossia $1.x^{m-1}$, ossia x^{m-1}; e l'ultimo termine sarà $a^{m-1}.x^0$, ossia $a^{m-1}.1$, ossia a^{m-1}.

Osservazione. Quando il polinomio dividendo non è completo rispetto ad x, (§ 295, 4°) si sostituiscono con zeri i coefficienti dei termini che mancano.

Esempio. Sia $3x^5-2x^3+x-6$ il dividendo, ed $x+3$ il divisore. Si immagina di avere il polinomio completo $3x^5+0.x^4-2x^3+0.x^2+x-6$, e si dispone l'operazione così:

	+3	+0	—2	+0	+1	—6	
—3)		—9	+27	—75	+225	—678	
		—9	+25	—75	+226	—684	Resto = —684.

313. TEOREMA 4°. Se un polinomio intero rispetto ad x si annulla quando si cambia x in uno qualunque dei numeri a, b, c, ecc. diversi fra loro e non contenenti x, il polinomio è divisibile per il prodotto $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Sia il polinomio P_x intero rispetto ad x; e supponiamo che esso si annulli cambiando x in a, oppure cambiando x in b, oppure cambiando x in c, ecc. essendo a, b, c, ecc. diversi fra loro e non contenenti x. Supponiamo cioè che sia $P_a=0$, $P_b=0$, $P_c=0$, ecc.; dico che P_x sarà divisibile per il prodotto $(x-a)(x-b)(x-c)$..........

Avrò dimostrato questo se dimostrerò che, in queste ipotesi, P_x è eguale al prodotto di $(x-a)(x-b)(x-c)$.......... per un fattore intero. *

Dimostrazione. Poichè per ipotesi P_x si annulla mutando x in a, sarà P_x divisibile per $x-a$ (coroll. 1° § 309). Eseguendo la divisione, si otterrà per quoto completo un monomio od un polinomio intero in x che rappresento con Q_x. Il dividendo P_x sarà eguale al prodotto del divisore $x-a$ pel quoto Q_x. Avremo cioè $P_x=(x-a)Q_x$ . . . . (1)

Questa eguaglianza è soddisfatta da ogni valore di x, e quindi anche dal valore $x=b$. Si avrà allora $P_b=(b-a)Q_b$. Ma per ipotesi $P_b=0$; sarà dunque anche $(b-a)Q_b=0$. Affinchè un prodotto sia zero è necessario e sufficiente (coroll. 2° § 41) che sia zero uno dei fattori. Nel prodotto $(b-a)Q_b$ il 1° fattore $(b-a)$ non è zero, perchè per ipotesi b è diverso da a; deve dunque essere zero l'altro fattore, cioè Q_b. Se $Q_b=0$, è segno che Q_x si annulla mutando x in b; epperciò Q_x è divisibile per $x-b$. (Coroll. 1° § 309). Dividendo Q_x per $x-b$, otterremo per quoto completo un monomio od un polinomio intero in x che rappresento con Q'_x; ed allora avremo $Q_x=(x-b)Q'_x$. Sostituendo questo valore di Q_x nella (1), otteniamo:

$$P_x=(x-a)(x-b)Q'_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Questa eguaglianza essendo soddisfatta da ogni valore di x, sarà anche soddisfatta dal valore $x=c$. Cambiando allora nella (2) x in c, otteniamo $P_c=(c-a)(c-b)Q'_c$. Ma per ipotesi $P_c=0$; dunque sarà $(c-a)(c-b)Q'_c=0$. Ma $c-a$ e $c-b$ non sono zero, poichè per ipotesi a, b, c sono diversi fra loro. Sarà perciò (coroll. 2° § 41) $Q'_c=0$; e quindi Q'_x è divisibile per $x-c$. Eseguendo la divisione di Q'_x per $x-c$, otterremo per quoto completo un monomio od un polinomio intero in x che rappresento con Q''_x; e sarà: $Q'_x=(x-c)Q''_x$. Sostituendo questo valore di Q'_x nella (2), otterremo:

$$P_x=(x-a)(x-b)(x-c)Q''_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Dalla (3) si vede che P_x è il prodotto di $(x-a)(x-b)(x-c)$ pel monomio o polinomio intero Q''_x.

Dunque P_x è divisibile per il prodotto $(x-a)(x-b)(x-c)$.

---

* Questo fattore può essere un polinomio, un monomio, od anche 1.

CAPO SECONDO.

Sistemi di equazioni di 1° grado a più incognite

RISOLUZIONE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO A PIÙ INCOGNITE.

314. TEOREMA 1°. Un' equazione di 1° grado a più incognite ha un numero illimitato di sistemi di radici.

DIMOSTRAZIONE. Sia p.e. l'equazione $2x+3y-z=8$, che è di 1° grado a tre incognite. Possiamo assegnare valori arbitrari a due incognite, e porre p.e. $y=2$, $z=3$; e l'equazione diventa $2x+3.2-3=8$, che è di 1° grado in x, ed ha per radice $x={}^5/_2$. I tre valori $x={}^5/_2$, $y=2$, $z=3$ formano *un sistema di radici* * dell'equazione data. Variando ad arbitrio il valore di due incognite, varierebbe in conseguenza il valore della terza. Analogamente si può ragionare sopra ogni equazione di 1° grado a più incognite.

Osservazione. Questo teorema si suole anche esprimere dicendo: *Un' equazione di 1° grado a più incognite è indeterminata.*

315. DEFINIZIONI. 1ª. Varie equazioni a più incognite formano *un sistema,* se devono essere soddisfatte dai medesimi valori delle incognite.

2ª. Due sistemi di equazioni a più incognite si dicono *equivalenti* se tutte le soluzioni di un sistema sono anche soluzioni dell'altro.

È evidente il seguente corollario:

COROLLARIO. Due sistemi di equazioni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.

La dimostrazione del teorema e dei due corollari del § 122 si può facilmente estendere ai sistemi aventi più di due equazioni con più di due incognite. Avremo quindi:

316. TEOREMA 2°. Se, in un sistema di varie equazioni con più incognite, ad un' equazione del sistema si sostituisce quella che si ottiene sommando o sottraendo membro a membro l'equazione stessa con un'altra equazione qualsiasi del sistema, si ottiene un nuovo sistema equivalente al sistema dato.

COROLLARIO 1°. Se, in un sistema di varie equazioni con più incognite, si risolvono due equazioni rispetto alla medesima incognita, e si eguagliano fra loro i valori ottenuti, si ottiene una nuova equazione la quale, sostituita ad una delle due equazioni sopradette, dà un nuovo sistema equivalente al sistema dato.

COROLLARIO 2°. Se, in un sistema di varie equazioni con più incognite, ad un' incognita d'una equazione si sostituisce il valore che si ottiene risolvendo un'altra equazione qualsiasi del sistema rispetto alla medesima incognita, si ottiene un nuovo sistema equivalente al sistema dato.

---

* Dicesi *una soluzione*, ossia *un sistema di valori delle incognite*, ossia *un sistema di radici* d'un' equazione a più incognite, un gruppo di valori delle incognite (un solo valore per ciascuna incognita) tali che, sostituiti rispettivamente alle incognite nell'equazione, verifichino l' equazione stessa.

317. Per risolvere un sistema di varie equazioni di 1° grado a più incognite, si segue un procedimento analogo a quello tenuto per la risoluzione di un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite. Cioè:

Applicando al sistema dato varie volte il teorema od i corollari precedenti, si ricava un'altro sistema equivalente al sistema dato, ma più facile a risolversi; poi, da questo, un altro sistema equivalente e più facile ancora; e così di seguito, finchè si perviene ad un sistema che si sappia facilmente risolvere. Quest'ultimo sistema si chiama *il sistema risolvente* del sistema dato, e le sue soluzioni sono le soluzioni del sistema proposto.

318. Risolveremo ora il seguente sistema (I) di tre equazioni a tre incognite, facendo uso, prima del metodo di *riduzione,* poi del metodo di *paragone,* e poi del metodo di *sostituzione.*

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x-5y+3z=8 & \dots\dots\dots \quad (1) \\ 3x+2y-6z=-11 & \dots\dots\dots \quad (2) \\ 4x-3y+3z=18 & \dots\dots\dots \quad (3) \end{cases}$$

METODO DI RIDUZIONE. Eliminiamo p.e. la z fra la (1) e la (2). Per rendere i coefficienti della z numericamente eguali e di segno contrario, basta moltiplicare per 2 tutti i termini della (1), e si ottiene:

$$4x-10y+6z=16 \quad \dots\dots\dots \quad (1')$$

Sommando, membro a membro, la (1′) colla (2), otterremo l'equazione

$$7x-8y=5 \quad \dots\dots\dots \quad (2')$$

La (2′) può essere sostituita alla (1) od alla (2).

Eliminiamo ora la z fra la (1) e la (3). Poichè i due coefficienti della z sono numericamente eguali, basterà cambiare il segno a tutti i termini di una delle due equazioni, p.e. della (1); ed otterremo:

$$-2x+5y-3z=-8 \quad \dots\dots\dots \quad (1'')$$

Sommiamo membro a membro la (1″) colla (3), ed otteniamo l'equazione: $2x+2y=10$, ossia, dividendo tutti i termini per 2, $x+y=5$ . . (3′)

La (3′) può essere sostituita alla (1) od alla (3).

Sostituendo, nel sistema (I), la (2′) alla (2) e la (3′) alla (3), otterremo il sistema (II) equivalente al sistema (I).

$$\text{(II)} \begin{cases} 2x-5y+3z=8 & \dots\dots\dots \quad (1) \\ 7x-8y \quad\quad =5 & \dots\dots\dots \quad (2') \\ x+y \quad\quad\quad =5 & \dots\dots\dots \quad (3') \end{cases}$$

Nel sistema (II) due equazioni, cioè la (2′) e la (3′), contengono due sole incognite. Eliminiamo ora una di queste due incognite, p.e. la y fra queste due equazioni. A tal fine rendiamo, nelle due equazioni, numericamente eguali e di segno contrario i coefficienti della y. Basta perciò moltiplicare tutti i termini della (3′) per 8, ed otterremo $8x+8y=40$, la quale, sommata membro a membro colla (2′), dà l'equazione

$$7x+8x=5+40, \quad \text{ossia} \quad 15x=45, \quad \text{ossia} \quad x=3 \quad . \; . \quad (3'')$$

La (3″) può essere sostituita alla (2′) od alla (3′). Sostituendola alla (3′), otterremo il sistema (III) equivalente al sistema (II), e quindi anche al sistema (I).

$$\text{(III)} \begin{cases} 2x-5y+3z=8 & \dots\dots\dots \quad (1) \\ 7x-8y \quad\quad =5 & \dots\dots\dots \quad (2') \\ x \quad\quad\quad\quad =3 & \dots\dots\dots \quad (3'') \end{cases}$$

La (3″) del sistema (III) dà direttamente il valore di x; *esso è unico*.

L'unico valore di x dato dalla (3″) si sostituisce nella (2′), e si ha: $7.3-8y=5$, ossia $-8y=5-21$, ossia $-8y=-16$, ossia $y=2$. La (2′) dà per y *il solo valore* $y=2$.

Si sostituiscono i valori trovati di x e di y nella (1), e si ha: $2.3-5.2+3z=8$, ossia $6-10+3z=8$, ossia $3z=12$, da cui: $z=4$.

La (1) dà per z *il solo valore* $z=4$. Dunque:

Il sistema ammette la sola soluzione $x=3$, $y=2$, $z=4$. *

METODO DI PARAGONE. Cominciamo ad eliminare p.e. la z.

A tal fine risolviamo rispetto a z la (1), la (2) e la (3), ed otteniamo:

$$\text{dalla (1)} \qquad z=\frac{8-2x+5y}{3}$$

$$\text{dalla (2)} \qquad z=\frac{11+3x+2y}{6}$$

$$\text{dalla (3)} \qquad z=\frac{18-4x+3y}{3}$$

Eguagliando fra loro il 1° valore di z col 2°, e poi il 1° col 3°, otteniamo le equazioni:

$$\frac{8-2x+5y}{3}=\frac{11+3x+2y}{6} \;^{**} \qquad \text{ossia} \qquad 7x-8y=5 \quad . \; . \quad (2')$$

$$\frac{8-2x+5y}{3}=\frac{18-4x+3y}{3} \qquad \text{ossia} \qquad x+y=5 \quad . \; . \quad (3')$$

le quali possono essere sostituite a due qualunque delle tre equazioni del sistema dato.

Sostituendo la (2′) alla (2), e la (3′) alla (3), otterremo il sistema (II) equivalente al sistema (I).

$$\text{(II)} \begin{cases} 2x-5y+3z=8 & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ 7x-8y \qquad =5 & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2') \\ x+y \qquad =5 & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3') \end{cases}$$

Eliminiamo ora p.e. la y fra la (2′) e la (3′).

A tal fine risolviamo la (2′) e la (3′) rispetto ad y, ed otteniamo:

$$\text{dalla (2')} \quad y=\frac{7x-5}{8}; \qquad \text{dalla (3')} \quad y=5-x.$$

Eguagliando questi due valori di y, si ha l'equazione $\frac{7x-5}{8}=5-x$, ossia *** $7x-5=40-8x$, ossia $7x+8x=+40+5$, ossia $15x=45$, ossia

---

* Per ottenere il valore di y e di z, potremmo partire dal sistema (I), e (tenendo una via analoga) eliminare prima x, e poi z; e si avrebbe così il valore di y. Poi, partendo nuovamente dal sistema (I), eliminare, nel medesimo modo, prima x, e poi y; e si otterrebbe il valore di z. È però più comodo tenere la via da noi seguita.

** Eliminando i denominatori, ed ordinando le equazioni, si vede che

$$\text{da} \quad \frac{8-2x+5y}{3}=\frac{11+3x+2y}{6} \quad \text{si ha} \quad 7x-8y=5;$$

$$\text{e da} \quad \frac{8-2x+5y}{3}=\frac{18-4x+3y}{3} \quad \text{si ha} \quad x+y=5.$$

*** Moltiplicandone ambi i membri per 8.

$x=3$, la quale può essere sostituita alla (2′) od alla (3′). Sostituendola alla (3′), si ottiene il sistema (III) già trovato col metodo precedente. *

METODO DI SOSTITUZIONE. Anche qui vogliamo cominciare ad eliminare la z. Risolviamo a tal fine p.e. la (1) del sistema (I) rispetto a z, ed otteniamo $z=\frac{8-2x+5y}{3}$. Sostituendo questo valore di z nella (2) e nella (3), otteniamo:

dalla (2) $\quad 3x+2y-6.\frac{8-2x+5y}{3}=-11 \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$

dalla (3) $\quad 4x-3y+3.\frac{8-2x+5y}{3}=18 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$

Ordinando le equazioni (α), (β), si ha:

Dalla (α): $3x+2y-2(8-2x+5y)=-11$, ossia $3x+2y-16+4x-10y=-11$, ossia $7x-8y=-11+16$, ossia $7x-8y=5$ . . . . (2′)

Dalla (β): $4x-3y+8-2x+5y=18$, ossia $2x+2y=10$, ossia $x+y=5$ (3′)

Sostituendo la (2′) alla (2), e la (3′) alla (3), si ha il sistema (II).

$$(\text{II}) \begin{cases} 2x-5y+3z=8 & \ldots \ldots \ldots (1) \\ 7x-8y \qquad =5 & \ldots \ldots \ldots (2') \\ x+y \qquad =5 & \ldots \ldots \ldots (3') \end{cases}$$

Eliminiamo ora p.e. la y fra la (2′) e la (3′). A tal fine risolviamo la (2′) rispetto ad y, ed otteniamo $y=\frac{7x-5}{8}$. Sostituendo questo valore di y nella (3′), otteniamo l'equazione $x+\frac{7x-5}{8}=5$, ossia ** $8x+7x-5=40$, ossia $15x=45$, ossia $x=3$ . . . . (3″)

L'equazione (3″) si può sostituire alla (3′). Così facendo si ottiene il sistema (III) già trovato coi metodi precedenti. ***

Osservazione 1ª. Quando, facendo uso del teorema e dei due corollari del § 316, da due o più equazioni di un sistema se ne ricava un'altra che può essere sostituita ad una delle equazioni considerate, si dice che si è formata un'equazione che *è conseguenza* delle equazioni considerate. P.e. la (2′) del sistema (II) è conseguenza della (1) e della (2) del sistema (I). La (3′) del medesimo sistema (II) è conseguenza della (1) e della (3) del sistema (I).

Osservazione 2ª. Si osservi bene la differenza che esiste fra *equazioni equivalenti* ed *equazione conseguenza di due o più altre.* Due o più equazioni *equivalenti* hanno le medesime soluzioni. Un'equazione *conseguenza* di più altre ha tutte le *soluzioni comuni* a queste altre, ma può non avere tutte le soluzioni di ciascuna di queste altre; cosicchè, *in generale,* un'equazione può essere *conseguenza* di più altre, e non essere *equivalente* ad alcuna di esse.

---

* Potremmo adesso (seguendo la medesima via) ripartire dal sistema (I), ed eliminare successivamente x ed y; e si avrebbe così il valore di z. Poi, ripartendo di nuovo dal sistema (I), eliminare successivamente x e z; e si avrebbe il valore di y. È però più comodo risolvere il sistema (III) seguendo la via da noi tenuta.

** Moltiplicandone ambi i membri per 8.

*** Anche qui si potrebbe partire nuovamente dal sistema (I), e (rifacendo la stessa via) eliminare prima x, e poi y; e si otterrebbe così un sistema equivalente che darebbe immediatamente il valore di z. Poi, partire nuovamente dal sistema (I), ed eliminare prima x e poi z; e si avrebbe un sistema equivalente, che darebbe immediatamente il valore di y. Però è più comodo risolvere il sistema (III) seguendo la via da noi tenuta.

Esempio. Si abbiano le equazioni: $\begin{cases} 3x-4y=3 & \dots\dots\dots \\ 2x+5y=25 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

Sommandole membro a membro, si ha l'equazione:

$$3x+2x-4y+5y=3+25, \quad \text{ossia} \quad 5x+y=28 \quad \dots (3)$$

La (3) è conseguenza della (1) e della (2). La (1) e la (2) hanno la soluzione comune $x=5$, $y=3$; e questa soluzione verifica anche la (3) che ne è la conseguenza.

La (1) poi ha ancora altre soluzioni in numero illimitato; p.e. $x=1$, $y=0$, poi $x=2$, $y=3/4$, poi $x=3$, $y=3/2$, ecc. le quali non verificano la (2). Similmente la (2) ha altre soluzioni in numero illimitato; p.e. $x=1$, $y=23/5$, poi $x=2$, $y=21/5$, poi $x=3$, $y=19/5$, ecc. le quali non verificano la (1).

Ora quelle soluzioni che verificano solamente la (1) o solamente la (2), non verificano la (3). Si vede quindi che la (3), la quale è *conseguenza* della (1) e della (2), non è *equivalente* nè alla (1) nè alla (2). Analogo ragionamento si potrebbe fare in ogni altro caso.

319. Da quanto si è detto si scorge che la (2′) del sistema (II) non è equivalente alla (1) del sistema (I), e tuttavia i due sistemi sono equivalenti. È facile vedere che potremmo p.e. in luogo della (1) sostituire un'equazione conseguenza della (1) e della (2), ed in luogo della (3) sostituire un'equazione conseguenza p.e. della (2) e della (3). Otterremmo così un nuovo sistema equivalente al sistema (I), ed in cui nessuna equazione è equivalente ad alcuna equazione del sistema (I). Dunque:

Affinchè due sistemi di equazioni, contenenti le medesime incognite, siano equivalenti, *non è necessario* che ciascuna equazione del 2° sistema sia equivalente ad un'equazione del 1° sistema; ma *è sufficiente* che ciascuna equazione del 2° sistema sia conseguenza di quelle del 1°.

Però *è necessario* che a formare le equazioni del 2° sistema concorrano *tutte* le equazioni del sistema dato.

320. A titolo di esercizio, risolviamo il seguente sistema (I) di quattro equazioni con quattro incognite, facendo uso alternativamente dei tre metodi.

$$(\text{I}) \begin{cases} 5x-2y+z-2t=1 & \dots\dots\dots (1) \\ 3x+4y-2z+5t=29 & \dots\dots\dots (2) \\ 2x-y+3z-3t=-3 & \dots\dots\dots (3) \\ 4x+3y-5z+2t=6 & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

Cominciamo p.e. ad eliminare l'incognita t fra le quattro equazioni date, facendo uso del *metodo di sostituzione*.

Risolvendo la (1) rispetto a t, otteniamo: $t=\dfrac{5x-2y+z-1}{2}$.

Sostituiamo questo valore di t nella (2), nella (3), e nella (4).

Dalla (2) avremo:

$$3x+4y-2z+5.\frac{5x-2y+z-1}{2}=29, \quad \text{ossia *}$$

$$6x+8y-4z+5(5x-2y+z-1)=58, \quad \text{ossia}$$

$$6x+8y-4z+25x-10y+5z-5=58, \quad \text{ossia}$$

$$31x-2y+z=63 \quad \dots\dots\dots (2')$$

* Moltiplicando tutti i termini per 2.

Dalla (3) avremo:

$$2x-y+3z-3.\frac{5x-2y+z-1}{2}=-3, \quad \text{ossia *}$$
$$4x-2y+6z-3(5x-2y+z-1)=-6, \quad \text{ossia}$$
$$4x-2y+6z-15x+6y-3z+3=-6, \quad \text{ossia}$$
$$-11x+4y+3z=-9, \quad \text{ossia **}$$
$$11x-4y-3z=9 \quad \ldots\ldots \quad (3')$$

Dalla (4) avremo:

$$4x+3y-5z+2.\frac{5x-2y+z-1}{2}=6, \quad \text{ossia ***}$$
$$8x+6y-10z+2(5x-2y+z-1)=12, \quad \text{ossia}$$
$$8x+6y-10z+10x-4y+2z-2=12, \quad \text{ossia}$$
$$18x+2y-8z=14, \quad \text{ossia ****}$$
$$9x+y-4z=7 \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Ciascuna delle tre equazioni (2′), (3′), (4′) si può sostituire ad una delle due equazioni da cui è stata ricavata. Sostituendo la (2′) alla (2), la (3′) alla (3), e la (4′) alla (4), otterremo il sistema (II) equivalente al sistema (I).

$$(II)\begin{cases} 5x-2y+z-2t=1 & \ldots\ldots (1) \\ 31x-2y+z=63 & \ldots\ldots (2') \\ 11x-4y-3z=9 & \ldots\ldots (3') \\ 9x+y-4z=7 & \ldots\ldots (4') \end{cases}$$

Nel sistema (II) la 1ª equazione contiene tutte e quattro le incognite, e le altre tre equazioni contengono solamente le tre incognite x, y, z.

Eliminiamo ora un'altra incognita, p.e. la z, fra le tre ultime equazioni a tre sole incognite, facendo uso p.e. del *metodo di paragone*. Risolviamo a tal fine rispetto a z la (2′), la (3′) e la (4′), ed otterremo rispettivamente:

dalla (2′) $\quad z=63-31x+2y;$

dalla (3′) $\quad z=\dfrac{11x-4y-9}{3};$

dalla (4′) $\quad z=\dfrac{9x+y-7}{4}.$

Eguagliando il 1° di questi valori di z col 2°, otteniamo:

$$63-31x+2y=\frac{11x-4y-9}{3}, \quad \text{ossia *****}$$
$$189-93x+6y=11x-4y-9, \quad \text{ossia}$$
$$-93x+6y-11x+4y=-9-189, \quad \text{ossia}$$
$$-104x+10y=-198, \quad \text{******}$$
$$52x-5y=99 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'')$$

* Moltiplicando tutti i termini per 2.

** Cambiando il segno a tutti i termini, affinchè il 1° termine sia positivo.

*** Moltiplicando tutti i termini per 2.

**** Dividendo tutti i termini per 2.

***** Moltiplicando tutti i termini per 3.

****** Dividendo tutti i termini per —2.

Eguagliando il 1° dei tre valori di z col 3°, otteniamo:

$$63-31x+2y=\frac{9x+y-7}{4}, \quad \text{ossia *}$$
$$252-124x+8y=9x+y-7, \quad \text{ossia}$$
$$-124x+8y-9x-y=-7-252, \quad \text{ossia}$$
$$-133x+7y=-259, \quad \text{ossia **}$$
$$133x-7y=259 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4'')$$

La $(3'')$ e la $(4'')$ si possono sostituire ad una qualsiasi delle equazioni $(2')$, $(3')$, $(4')$ da cui sono state ricavate. Sostituendo la $(3'')$ alla $(3')$, e la $(4'')$ alla $(4')$, otteniamo il sistema (III) equivalente al sistema (II), e quindi anche equivalente al sistema (I).

$$(\mathrm{III}) \left\{ \begin{array}{lll} 5x-2y+z-2t=1 & \ldots\ldots\ldots & (1) \\ 31x-2y+z \quad =63 & \ldots\ldots\ldots & (2') \\ 52x-5y \quad =99 & \ldots\ldots\ldots & (3'') \\ 133x-7y \quad =259 & \ldots\ldots & (4'') \end{array} \right.$$

Nel sistema (III) la 1ª equazione contiene tutte e quattro le incognite x, y, z, t; la 2ª ne contiene solo tre, cioè x, y, z; le altre due contengono ciascuna due sole incognite, cioè x, y.

Eliminiamo ora un'incognita, p. e. la y, fra le due ultime equazioni, facendo uso del *metodo di riduzione*. Moltiplichiamo a tal fine tutti i termini della $(3'')$ per 7, e tutti i termini della $(4'')$ per 5, ed otterremo:

$$\text{dalla } (3'') \qquad 364x-35y=693 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$
$$\text{dalla } (4'') \qquad 665x-35y=1295 \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

e, cambiando i segni a tutti i termini della (α), perchè i coefficienti della y che si vuole eliminare hanno lo stesso segno, e poi sommando membro a membro la (α) e la (β), si ottiene:

$$-364x+35y+665x-35y=-693+1295, \quad \text{ossia}$$
$$301x=602, \quad \text{ossia} \quad x=\frac{602}{301}; \quad \text{da cui} \quad x=2 \quad \ldots \quad (4''')$$

La $(4''')$ può essere sostituita ad una qualsiasi delle due equazioni $(3'')$ e $(4'')$ da cui fu ricavata. Sostituendola alla $(4'')$, otteniamo il sistema (IV) equivalente al sistema (III), e quindi anche equivalente al sistema (I).

$$(\mathrm{IV}) \left\{ \begin{array}{lll} 5x-2y+z-2t=1 & \ldots\ldots\ldots & (1) \\ 31x-2y+z \quad =63 & \ldots\ldots\ldots & (2') \\ 52x-5y \quad =99 & \ldots\ldots\ldots & (3'') \\ x \quad =2 & \ldots\ldots\ldots & (4''') \end{array} \right.$$

La $(4''')$ ci dà il valore di x che *è unico*.

Sostituendo questo valore di x nella $(3'')$, si ha:

$52.2-5y=99$; ossia $104-99=5y$, ossia $5=5y$, da cui $y=1$ . . $(3''')$

Il valore di y dato dalla $(3''')$ *è unico*.

Sostituendo questi unici valori di x e di y nella $(2')$, si ha:

$31.2-2.1+z=63$, ossia $z=63-62+2$, ossia $z=3$ . . . . . . $(2''$

Il valore di z dato dalla $(2'')$ *è unico*.

---

* Moltiplicando tutti i termini per 4.

** Cambiando il segno a tutti i termini.

Sostituendo questi unici valori di x, di y, e di z nella (1), si ottiene: $5.2-2.1+3-2t=1$, ossia $-2t=1-10+2-3$, ossia $-2t=-10$, ossia $2t=10$, ossia $t=5$ . . . . (1')

Il valore di t dato dalla (1') *è unico.*

Il sistema proposto ammette dunque la sola soluzione $x=2$, $y=1$, $z=3$, $t=5$.

321. *REGOLA PER LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA DI n EQUAZIONI DI PRIMO GRADO CON n INCOGNITE.*

Si elimina una medesima incognita, successivamente, fra la 1ª equazione e ciascuna delle rimanenti $n-1$ equazioni. Si ottengono così $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, le quali si sostituiscono alle ultime $n-1$ equazioni del sistema dato.

Nel sistema così ottenuto si elimina una medesima incognita, successivamente, fra la 2ª equazione e ciascuna delle rimanenti $n-2$ equazioni. Si ottengono così $n-2$ equazioni con $n-2$ incognite, le quali si sostituiscono alle ultime $n-2$ equazioni del sistema precedentemente ottenuto.

Nel sistema così ottenuto si elimina una medesima incognita, successivamente, fra la 3ª equazione e ciascuna delle rimanenti $n-3$ equazioni. Si ottengono così $n-3$ equazioni con $n-3$ incognite, le quali si sostituiscono alle ultime $n-3$ equazioni del sistema precedentemente ottenuto.

E si continua così finchè si ottiene un'equazione ad una sola incognita, la quale si sostituisce all'ultima equazione dell'ultimo sistema precedentemente ottenuto. Il sistema che ne risulta sarà il sistema risolvente del sistema dato. *

---

* Se, per la risoluzione di un sistema di n equazioni di 1° grado con n incognite, si volesse avere una regola speciale per ciascun metodo, si potrebbe far uso delle tre regole seguenti:

METODO DI RIDUZIONE. Si addiziona, membro a membro, la 1ª equazione separatamente con ciascuna delle rimanenti, in modo da eliminare sempre una medesima incognita, scelta ad arbitrio. Si ricavano così $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, che si sostituiscono alle ultime $n-1$ equazioni del sistema proposto.

Nel sistema così ottenuto si addiziona, membro a membro, la 2ª equazione separatamente con ciascuna delle rimanenti, in modo da eliminare sempre una medesima incognita, scelta ad arbitrio. Si ottengono così $n-2$ equazioni con $n-2$ incognite, che si sostituiscono alle ultime $n-2$ equazioni del sistema precedentemente ottenuto.

E si continua sempre così finchè si perviene a sommare, membro a membro, la penultima equazione con l'ultima, in modo da eliminare la penultima incognita. Si ottiene allora un'equazione ad una sola incognita, che si sostituisce all'ultima equazione dell'ultimo sistema precedentemente ottenuto.

Il sistema finale che ne risulta sarà il sistema risolvente del sistema dato.

METODO DI PARAGONE. Si risolvono rispetto ad una medesima incognita, scelta ad arbitrio, p.e. rispetto ad x, tutte le equazioni del sistema. Il 1° di questi valori di x si eguaglia successivamente con ciascuno degli altri valori di x, e si ottengono così $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, che si sostituiscono alle ultime $n-1$ equazioni del sistema dato.

Nel sistema che ne risulta si risolvono rispetto ad una medesima incognita, arbitrariamente scelta, p.e. rispetto ad y, tutte le ultime $n-1$ equazioni. Il 1° di questi valori di y si eguaglia successivamente con ciascuno dei rimanenti valori di y; e si ottengono così $n-2$ equazioni con $n-2$ incognite, che si sostituiscono alle ultime $n-2$ equazioni del sistema precedentemente ottenuto.

E si procede così finchè si arriva a risolvere le due ultime equazioni rispetto alla penultima incognita. Il 1° valore ottenuto di quest'incognita si eguaglia col 2°, e si ottiene un'equazione con una sola incognita, che si sostituisce all'ultima equazione dell'ultimo sistema precedentemente ottenuto.

Il sistema finale che ne risulta sarà il sistema risolvente del sistema dato.

METODO DI SOSTITUZIONE. Si risolve rispetto ad un'incognita, scelta ad arbitrio, p.e. rispetto ad x, la 1ª equazione del sistema; ed il valore di x così ottenuto si sostituisce in tutte le rimanenti equazioni del sistema dato. Si ottengono così $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, le quali si sostituiscono alle ultime $n-1$ equazioni del sistema dato.

Si risolve rispetto ad un'altra incognita, scelta ad arbitrio, p.e. rispetto ad y, la 2ª equazione del nuovo sistema; ed il valore ottenuto di y si sostituisce in tutte le rimanenti $n-2$ equazioni del sistema stesso. Si ottengono così $n-2$ equazioni con $n-2$ incognite, le quali si sostituiscono alle ultime $n-2$ equazioni del sistema precedentemente ottenuto.

E si continua così finchè si risolve rispetto alla penultima incognita la penultima equazione, e si sostituisce il valore ottenuto nell'ultima equazione. Si ottiene allora un'equazione ad una sola incognita che si sostituisce all'ultima equazione dell'ultimo sistema precedentemente ottenuto.

Il sistema finale che ne risulta sarà il sistema risolvente del sistema proposto.

Osservazione 1ª. Per risolvere un sistema, non è necessario tenere proprio la via indicata nella regola precedente. Anzi, molte volte, non è neppure conveniente, potendosi sovente ottenere più presto il sistema risolvente scegliendo opportunamente sia l'ordine con cui si devono eliminare le incognite, sia le equazioni da usare per queste eliminazioni.

Così pure si può far uso di uno qualsiasi dei tre metodi *(di riduzione, di paragone, di sostituzione)*, Generalmente, si preferisce far uso del metodo di riduzione, perchè con questo non si introducono denominatori, e più facilmente si possono fare quasi tutte le operazioni *a memoria.* In alcuni casi, specialmente quando un'incognita ha in qualche equazione per coefficiente l'unità, può tornar più comodo il metodo di paragone. La pratica suggerirà, nei diversi casi, qual metodo sia da preferirsi.

Ordinariamente, si ottiene più presto il risultato finale facendo uso alternativamente dei vari metodi, il che si imparerà sopratutto con la pratica. Basterà qui far osservare che:

1°. E sempre utile cominciar ad eliminare quelle incognite che hanno i coefficienti più piccoli.

2°. L'equazione ottenuta eliminando un'incognita fra due equazioni, si deve sempre sostituire ad una delle due equazioni da cui essa è stata ricavata.

3°. Bisogna inoltre procurare che, a formare le equazioni del sistema ri solvente, concorrano tutte le equazioni del sistema proposto.

Osservazione 2ª. Nella regola precedente abbiamo supposto (per semplicità di esposizione) che, ad ogni eliminazione, scomparisse un' incognita sola. Accade spesso che, invece d'una sola, scompaiono contemporaneamente varie incognite. Ciò abbrevia assai le operazioni da farsi per la risoluzione del sistema.

Osservazione 3ª. In generale, prima di risolvere un sistema, conviene ordinarne tutte le equazioni.

DEI SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI È INFERIORE AL NUMERO DELLE INCOGNITE.

322. TEOREMA. Un sistema di n equazioni di 1° grado con $n+k$ incognite ha un numero illimitato di soluzioni. *

DIMOSTRAZIONE. Se, con uno qualsiasi dei metodi che conosciamo, cerchiamo il sistema risolvente del sistema dato, otterremo un sistema di n equazioni. La 1ª avrà tutte le $n+k$ incognite; la 2ª ne avrà una di meno, cioè $n+k-1$; la 3ª ne avrà due di meno, cioè $n+k-2$; la 4ª ne avrà tre di meno, cioè $n+k-3$; ecc.; infine l'ultima, cioè la n^a, avrà $n-1$ incognite di meno, ossia $n+k-(n-1)=n+k-n+1=k+1$ incognite.

Quest'ultima equazione, contenendo più d'una incognita, è indeterminata; e quindi fornirà, per ciascuna delle incognite che contiene, un numero illimitato di valori. Sostituendo questi valori successivamente nelle altre equazioni, si otterrà un numero illimitato di valori per ciascuna delle altre incognite.

Osservazione. In questo caso diremo che *il sistema è indeterminato.*

* È sottinteso che n, k sono numeri interi, positivi, maggiori di zero.

Esempio. Sia dato il seguente sistema (I) di 3 equazioni di 1° grado con 5 incognite.

$$\text{(I)}\ \begin{cases} 2x+5y+3z-t+v=10 & \ldots\ (1) \\ 6x-2y+2z+3t-v=4 & \ldots\ (2) \\ x+3y-z-t-v=2 & \ldots\ (3) \end{cases}$$

Per risolverlo, cominciamo ad eliminare l'incognita v col metodo di riduzione. Sommando membro a membro la (1) colla (2), otteniamo l'equazione:

$$8x+3y+5z+2t=14 \quad \ldots\ (2')$$

che può essere sostituita alla (1) od alla (2) da cui essa deriva.

Sommando membro a membro la (1) colla (3), otteniamo l'equazione:

$$3x+8y+2z-2t=12 \quad \ldots\ (3')$$

che può essere sostituita alla (1) od alla (3) da cui essa deriva.

Sostituendo la (2′) alla (2), e la (3′) alla (3), otteniamo il sistema (II)

$$\text{(II)}\ \begin{cases} 2x+5y+3z-t+v=10 & \ldots\ (1) \\ 8x+3y+5z+2t\quad =14 & \ldots\ (2') \\ 3x+8y+2z-2t\quad =12 & \ldots\ (3') \end{cases}$$

che è equivalente al sistema (I).

Dobbiamo ora eliminare un'incognita fra le due ultime equazioni, ed è facile vedere che ci è più comodo eliminare la t col metodo di riduzione. Basta perciò sommare membro a membro la (2′) colla (3′); ed otterremo l'equazione:

$$11x+11y+7z=26 \quad \ldots\ (3'')$$

che può essere sostituita alla (2′) od alla (3′) da cui essa deriva.

Sostituendo la (3″) alla (3′), otterremo il sistema (III) che sarà il sistema risolvente del sistema (I).

$$\text{(III)}\ \begin{cases} 2x+5y+3z-t+v=10 & \ldots\ (1) \\ 8x+3y+5z+2t\quad =14 & \ldots\ (2') \\ 11x+11y+7z\quad =26 & \ldots\ (3'') \end{cases}$$

Osservazione. Nel caso nostro è $n=3$ e $k=2$; e si vede che l'ultima equazione del sistema risolvente ha appunto $k+1=2+1=3$ incognite.

DEI SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI È EGUALE AL NUMERO DELLE INCOGNITE.

323. TEOREMA. Un sistema di n equazioni di 1° grado con n incognite ha, in generale, una ed una sola soluzione. *

Dimostrazione. Cercando il sistema risolvente del sistema dato, troveremo un sistema di n equazioni, di cui la 1ª conterrà tutte le n incognite; la 2ª conterrà tutte le incognite della 1ª, meno una; la 3ª conterrà tutte le incognite della 2ª, meno una; ecc. finchè l'ultima equazione conterrà una sola incognita.

Si risolve quest'equazione; ed il valore dell'incognita che essa contiene, lo si sostituisce all'incognita stessa nell'equazione a due incognite, la quale

* È sottinteso che n è un numero intero, positivo, maggiore di zero.

diventa un'equazione ad una sola incognita, e ci dà il valore della 2ª incognita. Si sostituiscono i due valori trovati alle rispettive incognite nell'equazione a tre incognite, la quale diventa perciò un'equazione ad una sola incognita, e ci dà il valore della 3ª incognita. E così di seguito, si otterranno successivamente i valori di tutte le incognite.

Si vede così che il valore di ciascun' incognita si trova risolvendo un'equazione di 1° grado ad un'incognita. Ora (§ 108 osservaz.) una tale equazione ha, in generale, una ed una sola soluzione. Dunque il sistema dato avrà, in generale, una ed una sola soluzione. *

Osservazione. In questo caso diremo che *il sistema è determinato.*

DEI SISTEMI IN CUI IL NUMERO DELLE EQUAZIONI È SUPERIORE AL NUMERO DELLE INCOGNITE.

324. TEOREMA. Un sistema di $n+k$ equazioni di 1° grado con n incognite non ha, in generale, alcuna soluzione. **

DIMOSTRAZIONE. Se, con uno qualsiasi dei metodi che conosciamo, cerchiamo il sistema risolvente del sistema dato, troveremo un sistema di $n+k$ equazioni di cui la 1ª ha tutte le n incognite; la 2ª ha tutte le incognite della 1ª, meno una; la 3ª ha tutte le incognite della 2ª, meno una; ecc.; la $n-1^{ma}$ ha due sole incognite; la n^a equazione e le k equazioni rimanenti hanno tutte una sola e medesima incognita, p.e. l'incognita x.

Se il sistema dato avesse una soluzione, esisterebbe un sistema di valori delle incognite capace di verificare contemporaneamente tutte le equazioni del sistema dato, e quindi anche tutte quelle del sistema risolvente. Ed in particolare, esisterebbe un valore di x che verificherebbe contemporaneamente tutte quelle equazioni del sistema risolvente, le quali hanno la sola incognita x. Ma, poichè varie equazioni di 1° grado ad una incognita non ammettono, in generale, alcuna soluzione comune, non esisterà, in generale, alcuna soluzione del sistema risolvente, e quindi neppure del sistema dato.

Osservazione. In questo caso diremo che *il sistema è impossibile.*

325. Conchiuderemo dicendo:

In generale, un sistema di equazioni di 1° grado a più incognite è *determinato, indeterminato, od impossibile,* secondochè il numero delle equazioni è eguale, inferiore, o superiore al numero delle incognite. Ne segue che:

---

* Si disse *in generale,* perchè può essere che il sistema abbia equazioni che non possono coesistere; ed in tal caso non ha soluzione. Tale sarebbe p.e. il sistema $5x-4y=2$, $5x-4y=7$ il quale evidentemente non ha alcuna soluzione, perchè le due equazioni hanno eguali i primi membri, e disuguali i secondi membri.

Può anche essere che il sistema contenga alcune equazioni equivalenti; ed allora ha solo apparentemente n equazioni distinte; ma realmente ha meno di n equazioni fra loro indipendenti, epperciò è *indeterminato.*

Osservazione. Si suole dire che le equazioni di un sistema sono *tutte distinte,* ossia *tutte indipendenti,* quando ciascuna di esse non è nè equivalente ad alcun' altra equazione del sistema, nè conseguenza (osserv. 1ª § 318) delle altre equazioni del sistema stesso.

** Si disse *in generale,* perchè può essere che il sistema abbia alcune equazioni equivalenti. In tal caso avrebbe $n+k$ equazioni, distinte solo apparentemente; ma in realtà avrebbe meno di $n+k$ equazioni distinte, e quindi potrebbe essere determinato (se avesse solo n equazioni indipendenti), od anche indeterminato (se avesse meno di n equazioni indipendenti). È poi sottinteso che n, k sono numeri interi, positivi, maggiori di zero.

Affinchè un problema di 1° grado a più incognite sia determinato, è necessario che, traducendolo in equazioni, si ottengano tante equazioni indipendenti quante sono le incognite del problema.

DELLE SOLUZIONI NEGATIVE.

326. Per l'interpretazione delle soluzioni negative dei problemi con più di due incognite, si può osservare che la dimostrazione del teor. del § 134 si estende facilissimamente al caso di un sistema di n equazioni di 1° grado con n incognite. Potremo quindi enunciare il seguente teorema generale:

TEOREMA. Se in un sistema di n equazioni di 1° grado con n incognite si cambia il segno a tutti e soli i coefficienti di una o di più incognite, si ottiene un secondo sistema, le cui radici hanno il medesimo valore numerico di quelle del sistema primitivo; però hanno segno contrario i valori di quelle incognite i cui coefficienti cambiarono segno. *

CAPO TERZO.

Equazioni la cui risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione delle equazioni di 1° e di 2° grado

EQUAZIONI FRAZIONARIE.

327. TEOREMA. Se i due membri d'una equazione frazionaria si moltiplicano per un multiplo dei denominatori, si ottiene un'equazione intera la quale avrà tutte le radici dell'equazione frazionaria, e potrà inoltre avere anche altre radici. Queste altre radici poi saranno comprese fra i valori delle incognite che annullano il moltiplicatore.

Sia l'equazione $\frac{A}{M}=\frac{B}{N}$, *ove* A, B, M, N *sono monomi o polinomi interi rispetto alle incognite. Moltiplicando ambi i membri dell'equazione pel prodotto* MN, *si avrà l'equazione intera* $\frac{A}{M}.MN=\frac{B}{N}.MN.$ **

* Questo teorema fu enunciato e dimostrato per la prima volta da Lazzaro Carnot, nato a Nolay (Borgogna) nel 1753, e morto a Magdeburgo nel 1823.

** Quest'equazione è intera, perchè, avendo moltiplicato tutti i termini dell'equazione frazionaria per un multiplo di tutti i denominatori, se si sopprimono in ogni frazione i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, scompaiono tutti i denominatori.

DIMOSTRAZIONE. 1°. La 2ª equazione ha certamente tutte le radici della 1ª, perchè quei valori delle incognite che rendono $\frac{A}{M}=\frac{B}{N}$ renderanno anche $\frac{A}{M}.MN=\frac{B}{N}.MN$. (teor. 2° § 97).

2°. Ma può essere che abbia anche altre radici; poichè può ben darsi che i due membri della $\frac{A}{M}.MN=\frac{B}{N}.MN$ abbiano un fattore comune il quale diventi zero per un valore delle incognite diverso da quei valori che rendono $\frac{A}{M}=\frac{B}{N}$. Allora i due membri della $\frac{A}{M}.MN=\frac{B}{N}.MN$ diventano entrambi zero, e quindi eguali; ma non diventano eguali i due membri di $\frac{A}{M}=\frac{B}{N}$. Un tal valore sarà perciò radice della 2ª equazione, ma non della 1ª.

3°. La 1ª equazione può scriversi $\frac{A}{M}-\frac{B}{N}=0$; e la 2ª può scriversi $\left(\frac{A}{M}-\frac{B}{N}\right)(MN)=0$. Ora i valori che rendono $\left(\frac{A}{M}-\frac{B}{N}\right)(MN)=0$ senza rendere $\frac{A}{M}-\frac{B}{N}=0$ sono tutti e soli * quelli che rendono $MN=0$. Ossia: Se qualche valore delle incognite è radice della equazione $\left(\frac{A}{M}-\frac{B}{N}\right)(MN)=0$ [ossia dell'equazione $\frac{A}{M}MN=\frac{B}{N}MN$] senza essere radice dell'equazione frazionaria $\frac{A}{M}-\frac{B}{N}=0$ $\left[\text{ossia dell'equazione } \frac{A}{M}=\frac{B}{N}\right]$ esso è radice di $MN=0$, ossia annulla il moltiplicatore MN.

Osservazione. Se il moltiplicatore non si può annullare, è certo che la equazione intera è equivalente all'equazione frazionaria.

328. Da quanto precede possiamo ricavare la seguente regola:

REGOLA PER RISOLVERE UN' EQUAZIONE FRAZIONARIA.

Si moltiplicano ambi i membri per un multiplo qualsiasi dei denominatori; p. e. pel prodotto dei denominatori. Si ottiene così un' equazione intera la quale ha tutte le radici dell'equazione data, ma può anche avere altre radici.

Se si sa risolvere l'equazione intera, basterà poi:

1°. Verificare quali fra le radici dell'equazione intera non soddisfano l'equazione data, e rigettarle come radici estranee;

2°. Oppure, cercare se fra le radici dell'equazione intera ve ne sono di quelle che annullano il moltiplicatore, e non soddisfano l'equazione data, e rigettarle come radici estranee.

329. ***Esempio.*** *Si risolva l'equazione:*

$$\frac{x}{6(x-3)}+\frac{5}{6}=\frac{2}{x+3}+\frac{x^2+1}{x^2-9} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

---

* Perchè (pel corollario 2° § 41) i valori che rendono $\left(\frac{A}{M}-\frac{B}{N}\right)\left(MN\right)=0$ sono tutti e soli quelli che rendono zero uno dei due fattori.

È facile vedere che $6(x^2-9)$, ossia $6(x+3)(x-3)$ è un multiplo comune a tutti i denominatori. Moltiplicando dunque ambi i membri dell'equazione per $6(x+3)(x-3)$, e sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, otterremo:

$$x(x+3)+5(x^2-9)=2.6(x-3)+6(x^2+1), \quad \text{ossia}$$
$$x^2+3x+5x^2-45=12x-36+6x^2+6, \quad \text{ossia}$$
$$-9x=15, \quad \text{ossia} \quad 3x=-5, \quad \text{ossia} \quad x=-{}^5/_3.$$

L'equazione intera ha la sola soluzione $x=-{}^5/_3$; e poichè questo valore non annulla il moltiplicatore $6(x+3)(x-3)$, esso sarà anche radice dell'equazione data.

Risposta. *L'equazione data ha la sola soluzione* $x=-{}^5/_3$.

Osservazione 1ª. Se avessimo moltiplicato ambi i membri della (1) per $6(x^2-9)(x-3)$, avremmo ottenuto successivamente:

$x(x^2-9)+5.(x^2-9)(x-3)=2.6.(x-3)(x-3)+(x^2+1).6.(x-3)$, ossia
$x^3-9x+5x^3-45x-15x^2+135=12x^2-72x+108+6x^3+6x-18x^2-18$, ossia
$-9x^2+12x+45=0$, ossia (dividendo tutti i termini per -3)
$3x^2-4x-15=0$ le cui radici sono $x'=+3$, $x''=-{}^5/_3$.

Di queste due radici, la $x''=-{}^5/_3$ non annulla il moltiplicatore $6(x^2-9)(x-3)$; dunque $x=-{}^5/_3$ è certamente radice dell'equazione data. La $x'=+3$ annulla il moltiplicatore $6(x^2-9)(x-3)$. Dobbiamo quindi osservare se verifica o non, l'equazione data. Provando, si vede che non la verifica. Dunque $x=+3$ non è una radice dell'equazione data.

Osservazione 2ª. Alcune volte, facendo scomparire i denominatori, si ottiene un'equazione intera di grado superiore al 2°, e la cui risoluzione si può facilmente far dipendere dalla risoluzione di equazioni di 1° o di 2° grado. Ciò accade p.e. quando, avendo ordinato l'equazione intera, si riesce a metterne il primo membro sotto forma di prodotto i cui fattori sono tutti di 1° o di 2° grado. In questo caso, le radici dell'equazione intera sono quei valori delle incognite che annullano qualcuno dei fattori del prodotto.

Esempio. *Si risolva l'equazione* $\dfrac{9x^2}{x^2+5}=2x$ . . . . (1)

Moltiplicandone ambi i membri per x^2+5, si ottiene l'equazione intera $9x^2=2x(x^2+5)$, ossia $9x^2=2x^3+10x$, ossia $2x^3-9x^2+10x=0$ . . (2)

Poichè nel 1° membro della (2) vi è il fattore x comune a tutti i termini, potremo scrivere la (2) così: $x(2x^2-9x+10)=0$. Il valore $x=0$ annulla il 1° fattore; dunque $x=0$ è una radice dell'equazione (2). I valori $x=2$, $x={}^5/_2$ annullano il 2° fattore; e quindi $x=2$, $x={}^5/_2$ sono radici della (2). Ne segue che la (2) ha per radici $x'=0$, $x''=2$, $x'''={}^5/_2$; e poichè questi valori di x non annullano il moltiplicatore x^2+5, essi sono anche radici dell'equazione (1).

Risposta. *Le radici dell'equazione* (1) *sono* $x'=0$, $x''=2$, $x'''={}^5/_2$.

Osservazione 3ª. Quando si dice che certi valori particolari delle incognite sono radici d'un'equazione, si intende parlare solamente di quei valori i quali, sostituiti alle incognite nell'equazione, non fanno prendere la forma ${}^m/_0$, nè la forma ${}^0/_0$ ad alcuno dei termini dell'equazione.

Esempio. Se nell'equazione $\dfrac{x-2}{x+3}-6=\dfrac{-5}{2x+6}+2x$ sostituiamo -3

in luogo di x, otteniamo $\frac{-3-2}{-3+3}-6=\frac{-5}{2.(-3)+6}+2.(-3)$, ossia $\frac{-3-2}{-3+3}-6=\frac{-5}{-6+6}-6$, ossia $\frac{-5}{0}-6=\frac{-5}{0}-6$.

Se nell'equazione $\frac{7x-14}{x-2}+2x=\frac{x-2}{3x-y}+(y-2)$ poniamo 2 in luogo di x, e 6 in luogo di y, otteniamo:

$$\frac{7.2-14}{2-2}+2.2=\frac{2-2}{3.2-6}+(6-2), \text{ ossia}$$

$$\frac{14-14}{2-2}+4=\frac{2-2}{6-6}+4, \quad \text{ossia} \quad \frac{0}{0}+4=\frac{0}{0}+4.$$

Parrebbe, a prima vista, che si possa dire essere $x=-3$ una radice della 1ª equazione, ed $x=2$, $y=6$ un sistema di radici della 2ª equazione. Però, siccome per tali valori delle incognite alcuni termini delle due equazioni acquistano la forma $^m/_0$ o la forma $^0/_0$, noi non diremo che $x=-3$ è radice della 1ª equazione, nè che $x=2$, $y=6$ è un sistema di radici della 2ª equazione.

Osservazione 4ª. Se un'equazione frazionaria avente frazioni non ridotte ai minimi termini ha un numero di radici inferiore al numero di radici dell'equazione che si ottiene riducendo ai minimi termini tutte le frazioni, si suole considerare come equazione data quella in cui le frazioni sono ridotte ai minimi termini.

Esempio. Si abbia l'equazione $\frac{5}{x}+6=\frac{x^2-5x}{x-5}+2$ . . . . . . (1)

Evidentemente è $\frac{x^2-5x}{x-5}=\frac{x(x-5)}{x-5}$. Risolviamo la (1) senza ridurre $\frac{x(x-5)}{x-5}$ ai minimi termini. A tal fine, moltiplichiamo tutti i termini della (1) pel prodotto $x(x-5)$ dei denominatori; e, facendo le riduzioni, otteniamo successivamente:

$$5(x-5)+6x(x-5)=(x^2-5x)x+2x(x-5), \text{ ossia}$$
$$5x-25+6x^2-30x=x^3-5x^2+2x^2-10x, \text{ ossia}$$
$$x^3-9x^2+15x+25=0 \quad . . . . (2)$$

È facile verificare che $x=-1$ ed $x=5$ sono due radici dell'equazione (2). Sostituendo questi due valori di x nella (1), si vede che il valore $x=-1$ la trasforma nell'identità $+1=+1$. Dunque $x=-1$ è una radice della (1). Il valore $x=5$ sostituito nella (1) fa perdere significato al termine $\frac{x^2-5x}{x-5}$; dunque $x=5$ non è radice della (1).

Ma se nella (1) riduciamo ai minimi termini la frazione $\frac{x^2-5x}{x-5}$, otteniamo $\frac{x^2-5x}{x-5}=\frac{x(x-5)}{x-5}=x$; e l'equazione (1) si potrà scrivere sotto la forma:

$$\frac{5}{x}+6=x+2 \quad . . . . (1')$$

È facile verificare che la (1′) è soddisfatta dai due valori $x=-1$, ed $x=5$. Considereremo perciò come equazione proposta non la (1), ma la (1′).

EQUAZIONI TRINOMIE E BIQUADRATICHE.

330. DEFINIZIONE. Un' equazione ad un' incognita ed ordinata si dice *trinomia* se ha la forma $ax^{2m}+bx^m+c=0$; ove $a, b, c, m,$ non contengono l'incognita, a è diverso da zero, ed m è intero, positivo e maggiore di 1.

331. *RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE* $ax^{2m}+bx^m+c=0$.

L'equazione si può scrivere sotto la forma $a(x^m)^2+bx^m+c=0$.

Introduciamo un'incognita ausiliaria, e poniamo p.e. $y=x^m$. Allora se nella $a(x^m)^2+bx^m+c=0$ si pone y al posto di x^m, si ottiene l'equazione:

$$ay^2+by+c=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

la quale è di 2° grado ad una incognita, e dà:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Sostituiamo ora ad y il suo valore, ed otteniamo:

$$x^m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

La (3) ci dice che x è un numero la cui potenza m^a è $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; e quindi x è la radice m^a di $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Avremo quindi:

$$x=\sqrt[m]{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Questa è la formola di risoluzione delle equazioni trinomie. *

Osservazione. Se m è pari, il radicale esterno potrà avere il doppio segno; se m è dispari, il radicale esterno avrà il segno del radicando.

332. DEFINIZIONE. Se $m=2$, l'equazione trinomia prende la forma $ax^4+bx^2+c=0$, e si chiama *equazione biquadratica.*

Ponendo $m=2$, la (4) diventa $x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ . . . (5)

che è la formola di risoluzione delle equazioni biquadratiche.

Si scorge facilmente che la (5) è la scrittura compendiata dei seguenti quattro valori di x:

$$x'=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x''=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}};$$

$$x'''=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}; \qquad x''''=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

* Come si vede, abbiamo ridotto la risoluzione dell'equazione trinomia alla risoluzione d'una equazione di 2° grado ad un' incognita, ed all'estrazione di una radice m^a. Vedremo poi come si fa, per mezzo dei logaritmi, ad estrarre con una data approssimazione la radice aritmetica m^a.

Se m è una potenza di 2, pel teor. 4° § 166, si può estrarre la radice m^a con successive estrazioni di radici quadrate.

Ne segue il teorema:

TEOREMA. L'equazione biquadratica ha sempre quattro, e quattro sole radici, a due a due eguali in valore numerico e di segno contrario.

333. ***REGOLA PER RISOLVERE L'EQUAZIONE BIQUADRATICA RIDOTTA ALLA FORMA*** $ax^4+bx^2+c=0$.

1º. Si pone p.e. y ***al posto di*** x^2, ***e si ottiene un'equazione di 2º grado, di cui si cercano le radici*** y' ***ed*** y''.

2º. $+\sqrt{y'}$, $-\sqrt{y'}$, $+\sqrt{y''}$, $-\sqrt{y''}$ ***sono le quattro radici cercate.***

Esempio. *Si risolva l'equazione* $x^4-34x^2+225=0$.

In questo caso è $a=+1$, $b=-34$, $c=+225$; e la (5) dà:

$$x=\pm\sqrt{\frac{34\pm\sqrt{(-34)^2-4.(+1).225}}{2.(+1)}}=\pm\sqrt{\frac{34\pm\sqrt{1156-900}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{34\pm\sqrt{256}}{2}}=$$

$$=\pm\sqrt{\frac{34\pm16}{2}}=\pm\sqrt{17\pm8}.$$ Avremo dunque:

$x'=+\sqrt{17+8}=+\sqrt{25}=+5$; $\quad x''=-\sqrt{17+8}=-\sqrt{25}=-5$;

$x'''=+\sqrt{17-8}=+\sqrt{9}=+3$; $\quad x''''=-\sqrt{17-8}=-\sqrt{9}=-3$.

Risposta. *Le radici sono* $x'=+5$, $x''=-5$, $x'''=+3$, $x''''=-3$.

334. DISCUSSIONE DELLA FORMOLA DI RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI BIQUADRATICHE.

Ponendo per semplicità $y'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ed $y''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

e supponendo a, b, c numeri reali, la discussione della formola di risoluzione delle equazioni biquadratiche si può compendiare così:

- y', y'' **immaginarie.** 4 *radici immaginarie e disuguali.*
- y', y'' **negative, disuguali.** 4 *radici immaginarie e disuguali.*
- y', y'' **negative, eguali.** 4 *radici immaginarie eguali a due a due.*
- y', y'' **positive, disuguali.** 4 *radici reali e disuguali.*
- y', y'' **positive, eguali.** 4 *radici reali eguali a due a due.*
- y', y'' **di segno contrario.** 2 *radici reali, e* 2 *immaginarie.*

EQUAZIONI IRRAZIONALI.

335. DEFINIZIONE. Un'equazione algebrica su cui siano state fatte tutte le riduzioni si dice ***irrazionale*** **se qualche incognita compare sotto il segno di radice.**

336. TEOREMA. Se ambi i membri d'una equazione intera non ridotta a zero si elevano alla medesima potenza intera e positiva, si ottiene una nuova equazione la quale contiene tutte le radici dell'equazione data, ma può anche contenere radici estranee. *

Sia p.e. l'equazione intera, non ridotta a zero, $A=B$ . . . (1)

Dico che $A^m=B^m$ *(per* m *intero e positivo) contiene tutte le radici di* $A=B$, *ma può anche contenere radici estranee.*

* Se l'equazione data è ridotta a zero, e sia p. e. l'equazione $M=0$, quella che si ottiene elevandone ambi i membri alla potenza n^a non avrà radici estranee. Infatti: in tal caso, si ha $M^m=0^m$, ossia $M^m=0$, ossia MMM........ *(m volte)* $=0$. Ed è evidente che i valori che annullano il prodotto sono tutti e soli quelli che annullano il fattore M.

Dimostrazione. Pel corollario 3° § 102, le equazioni $A^m = B^m$ ed $A^m - B^m = 0$ sono equivalenti. Ma (per la osserv. § 59) $A^m - B^m$ è il prodotto di $A-B$ e di un polinomio intero che posso indicare con Q; ossia è $A^m - B^m = (A-B)Q$. Saranno dunque equivalenti $A^m = B^m$ ed $(A-B)Q = 0$. Ora tutte le radici di $A = B$, rendendo $A = B$, rendono $A-B=0$, e quindi risolvono $(A-B)Q=0$, ossia $A^m = B^m$. Dunque *$A^m = B^m$ contiene tutte le radici di $A = B$.*

Vi possono poi essere dei valori delle incognite che rendano $Q=0$ senza rendere $A=B$. Tali valori renderanno $(A-B)Q=0$, ossia saranno radici di $A^m = B^m$; ma, non rendendo $A=B$, non saranno radici di $A=B$. Dunque *$A^m = B^m$ può contenere radici estranee.*

COROLLARIO. Se da ambi i membri d'una equazione intera e non ridotta a zero si estrae la medesima radice aritmetica di indice intero e positivo, si ottiene una nuova equazione le cui radici sono tutte comprese fra le radici dell'equazione data. *

Dimostrazione. Estraendo da ambi i membri di $A^m = B^m$ la radice aritmetica m^a (per m intero e positivo), si ha $A = B$; e sappiamo dal teor. preced. che tutte le radici della $A = B$ sono anche radici della $A^m = B^m$.

337. Per risolvere un'equazione irrazionale, basta dare un'opportuna distribuzione ai termini dell'equazione, e poi elevarne ambi i membri ad una potenza conveniente. Facendo una o più volte successivamente questa operazione, si perviene spesso ad un'equazione razionale che si sa risolvere. Poi si cerca quali fra le radici trovate verificano l'equazione data, e si rigettano le altre come radici estranee. **

Esempio. *Si risolva l'equazione* $3x - \sqrt{x} + 5 = 7x$ . . . . . . (1)

L'equazione si può scrivere così: $3x - 7x + 5 = \sqrt{x}$, ossia

$$-4x + 5 = \sqrt{x} \quad . . . . (2)$$

Elevando al quadrato ambi i membri della (2), otteniamo:

$$(-4x+5)^2 = (\sqrt{x})^2, \quad \text{ossia} \quad (-4x)^2 + 2(-4x)5 + 5^2 = x, \quad \text{ossia}$$

$$16x^2 - 40x + 25 = x, \quad \text{ossia} \quad 16x^2 - 41x + 25 = 0 \quad . . . . (3)$$

Le radici della (3) sono $x' = 1\frac{9}{16}$ e $x'' = 1$.

Provando, si trova che solo $x'' = 1$ verifica l'equazione data.

Risposta. *L'equazione data ha la sola soluzione* $x = 1$.

Osservazione. $x' = 1\frac{9}{16}$ risolverebbe l'equazione $3x + \sqrt{x} + 5 = 7x$.

Però quest'equazione non è soddisfatta dal valore $x'' = 1$.

Osservazione. Se l'equazione razionale che si ottiene è di grado superiore al 2°, si prova se si riesce a risolverla col metodo indicato nella osservazione 2ª del § 329.

---

* Di ogni radicale considereremo sempre il solo valore aritmetico.

** Quando l'equazione contiene un sol radicale, conviene *isolarlo*; ossia scrivere un'equazione equivalente alla data, ed in cui il radicale formi da solo uno dei membri dell'equazione. Elevando allora ambi i membri a potenza conveniente, si ottiene un'equazione razionale. Se il radicale non è isolato, l'elevazione a potenza non lo fa scomparire, come si puo riconoscere elevando al quadrato ambi i membri di $3x - \sqrt{x} = 7x$. Si ha infatti: $(3x - \sqrt{x})^2 = (7x)^2$, ossia $(3x)^2 - 2(3x)\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 = 49x^2$, ossia $9x^2 - 6x\sqrt{x} + x = 49x^2$.

CAPO QUARTO.

Applicazione dei logaritmi alle questioni di interesse.

INTERESSE COMPOSTO. *

338. DEFINIZIONI. 1ª. Dicesi *interesse* l'utile (ossia il frutto) che si vuol ricavare dall'imprestito d'una somma.

2ª. Dicesi *tassa* l'utile che recano 100 lire imprestate per un anno.

3ª. Dicesi *capitale* la somma imprestata.

4ª. Dicesi *montante* la somma del capitale e dell'interesse.

5ª. L'interesse si chiama *semplice* quando è proporzionale al tempo durante il quale la somma si lascia ad imprestito.

Esempio. Se una certa somma posta ad interesse semplice, in un anno frutta L. 10, in due anni frutterà L. $10.2=20$, in tre anni frutterà L. $10.3=30$, ecc.

6ª. L'interesse si dice *composto* quando alla fine dell'unità di tempo l'interesse prodotto si somma col capitale per fruttare nell'unità di tempo successiva. **

L'interesse composto si chiama *annuale, semestrale, trimestrale,* ecc. secondochè l'unità di tempo è l'*anno,* il *semestre,* il *trimestre,* ecc. ***

Esempio. Mettiamo L. 100 all'interesse composto annuale del 5 %. **** Nel 1° anno, 100 lire fruttano 5 lire. Alla fine del 1° anno, le 5 lire di frutto si sommano col capitale, e si hanno 105 lire. Durante il 2° anno, saranno 105 lire quelle che fruttano interessi; e così di seguito.

Osservazione. Nell'interesse composto, invece della *tassa* (frutto di 100 lire in un anno) si suole considerare la *tassa unitaria* (il frutto di una lira in un anno).

339. TEOREMA. Nell'interesse composto alla tassa unitaria r, il montante M_n che si ricava dopo n unità di tempo è eguale al prodotto del capitale c per la n^{ma} potenza del binomio $1+r$; ossia $M_n=c(1+r)^n$. *****

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che l'unità di tempo sia l'anno; e siano M_1, M_2, M_3,........M_n i montanti che avremo rispettivamente alla fine del 1°, del 2°, del 3°,........ dell'n° anno.

---

* Forse è al matematico indiano Âryabhatta, nato nel 476 dell'Era Volgare, che si deve attribuire la più antica trattazione degli interessi. La moderna trattazione degli interessi dev i suoi più importanti teoremi a Leibniz, che li pubblicò negli *Acta Eruditorum di Lipsia del 1683*

** Sono sinonimi *si somma col capitale* e *si capitalizza.*

*** In questi casi l'interesse si dice *discreto*; si dice invece *continuo* se l'interesse si capi talizza ad ogni istante.

**** 5 % si legge 5 *per cento* e significa che 100 lire in un anno ne fruttano 5. Similmente 4 ½ % si legge 4 ½ *per cento,* ecc.

***** È sottinteso che n è un numero intero positivo.

Se una lira in un anno frutta lire r, lire c in un anno frutteranno lire rc; * ed il montante M_1 che avremo alla fine del 1° anno sarà la somma del capitale c e del frutto rc. Avremo cioè $M_1 = c + rc = c(1+r)$.

Il capitale che frutta durante il 2° anno non è più c, ma è M_1; e quindi, se una lira frutta lire r, lire M_1 frutteranno lire rM_1; ed il montante M_2 che avremo alla fine del 2° anno sarà la somma del montante M_1 e del frutto rM_1; avremo cioè: $M_2 = M_1 + rM_1 = M_1(1+r)$.

Sostituendo ad M_1 il suo valore $c(1+r)$, si ottiene:

$$M_2 = c(1+r)(1+r) = c(1+r)^2.$$

Similmente il capitale che frutta durante il 3° anno è M_2; ed il montante M_3 che avremo alla fine del 3° anno, sarà $M_2 + rM_2 = M_2(1+r)$. E sostituendo ad M_2 il suo valore $c(1+r)^2$, si avrà:

$$M_3 = c(1+r)^2(1+r) = c(1+r)^3.$$

Similmente si avrà $M_4 = c(1+r)^4$, $M_5 = c(1+r)^5$, ecc.

Ed in generale ** $M_n = c(1+r)^n$ . . . . (1)

340. Nell'eguaglianza $M_n = c(1+r)^n$ entrano i quattro numeri M_n, c, r, n. Se tre di questi numeri sono noti, la (1) è un'equazione ad un'incognita, e dà il valore del quarto numero. Perciò sui quattro numeri M_n, c, r, n si potranno avere quattro problemi distinti, cioè:

Problema 1°. *Si trovi M_n, essendo dati c, r, n.*

Problema 2°. *Si trovi c, essendo dati M_n, r, n.*

Problema 3°. *Si trovi r, essendo dati M_n, c, n.*

Problema 4°. *Si trovi n, essendo dati M_n, c, r.* ***

Se si prendono i logaritmi d'ambi i membri della (1), si ottiene:

$$\log M_n = \log[c(1+r)^n] = \log c + \log[(1+r)^n], \quad \text{ossia}$$

$$\log M_n = \log c + n\log(1+r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

---

* Generalmente la tassa varia da 3 % a 6 %; e quindi r (tassa unitaria) varia da $\frac{3}{100} = 0{,}03$ a $\frac{6}{100} = 0{,}06$; epperciò cr è sempre minore di c.

** Se la tassa unitaria per un anno è r, per un semestre è $\frac{r}{2}$. Ora in n anni vi sono $2n$ semestri; e quindi se l'unità di tempo fosse il semestre, e si cercasse il montante dopo n anni, basterebbe nella (1) sostituire $\frac{r}{2}$ ad r, e $2n$ ad n; e si avrebbe $M_n = c\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$.

Analogamente, se l'unità di tempo fosse il trimestre, il bimestre, il mese, il giorno, e si cercasse il montante M_n dopo n anni, si avrebbe rispettivamente:

$$M_n = c\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4n} \quad \text{per l'interesse trimestrale;}$$

$$M_n = c\left(1+\frac{r}{6}\right)^{6n} \quad \text{per l'interesse bimestrale;}$$

$$M_n = c\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n} \quad \text{per l'interesse mensile;}$$

$$M_n = c\left(1+\frac{r}{360}\right)^{360n} \quad \text{per l'interesse giornaliero.}$$

*** Questi problemi si sogliono enunciare così:

PROBLEMA 1°. *Qual'è dopo n anni il montante di lire c poste all'interesse composto annuale, ed alla tassa unitaria r?*

PROBLEMA 2°. *Qual somma devo mettere all'interesse composto annuale, ed alla tassa unitaria r, per avere dopo n anni il montante M_n?*

PROBLEMA 3°. *A qual tassa unitaria devo mettere il capitale c all'interesse composto annuale per avere, dopo n anni, il montante M_n?*

PROBLEMA 4°. *Per quanti anni devo lasciare il capitale c all'interesse composto annuale ed alla tassa unitaria r per ottenere il montante M_n?*

La (I) ci fa conoscere il logaritmo di M_n (e quindi M_n) quando si conoscono c, r, n. La (I) risolve perciò il problema 1°. *

Risolvendo la (I) rispetto a $\log c$, si ottiene:

$$\log c = \log M_n - n \log(1+r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

La (II) fa conoscere $\log c$ (e quindi c) quando si conoscono M_n, r, n. La (II) risolve perciò il problema 2°. **

Risolvendo la (I) rispetto a $\log(1+r)$, si ottiene:

$$\log(1+r) = \frac{\log M_n - \log c}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$

La (III) fa conoscere *log*$(1+r)$ (e quindi $1+r$, ed anche r) quando si conoscono M_n, c, n. La (III) risolve perciò il problema 3°.

Risolvendo la (I) rispetto ad n, si ottiene:

$$n = \frac{\log M_n - \log c}{\log(1+r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{IV})$$

La (IV) fa conoscere n quando si conoscono M_n, c, r; essa quindi risolve il problema 4°.

Osservazione. Se dal montante M_n si sottrae il capitale c, si ottiene per risultato l'interesse; e quindi, chiamando I l'interesse, avremo: $M_n - c = \mathrm{I}$. Sarà perciò facile, in ogni caso, date due delle tre quantità, *capitale, montante, interesse,* trovare la terza.

PROBLEMA. *Quale sarà dopo* 10 *anni il montante di lire* 25000 *poste all'interesse composto annuale del* 5 %?

Risoluzione. Nel nostro caso, si ha $c = 25000$, $n = 10$, $r = 0{,}05$, $1+r = 1+0{,}05 = 1{,}05$; e la (I) ci dà immediatamente:

$\log M_{10} = \log 25000 + 10 \log 1{,}05 = 4{,}39794 + 10 \times 0{,}02119 = 4{,}39794 + 0{,}2119 =$
$= 4{,}60984$; ossia $\log M_{10} = 4{,}60984$. Da cui $M_{10} = 40723$.

Risposta. *Il montante sarà di lire* 40723.

341. Se il capitale si lascia in imprestito un numero intero n di unità di tempo più una frazione di unità di tempo, (p.e. un numero n di anni, ed una frazione k di anno) per trovarne il montante definitivo, si trova prima il montante che si ha dopo n unità di tempo (dopo n anni), e poi l'interesse semplice di questo montante durante la frazione k di unità di tempo (durante la frazione k di anno). La somma del montante trovato e di questo interesse semplice sarà il montante definitivo cercato.

342. ***PROBLEMA.*** *Pongo il capitale c all'interesse composto annuale ed alla tassa unitaria r. Quale sarà il montante M dopo n anni e la frazione k di anno?*

Risoluzione. Il montante M_n alla fine degli n anni sarà $M_n = c(1+r)^n$. Ora se una lira in un anno frutta lire r, durante la frazione k di anno frut-

---

* Quando il $\log(1+r)$ deve essere moltiplicato per n, è bene (se si hanno le tavole opportune) trovare il valore di $\log(1+r)$ con 8 o 9 cifre decimali. Dopo la moltiplicazione per n, si potranno ritenere solamente tante cifre decimali, quante sono quelle che si adoperano nei logaritmi degli altri numeri. Se non si ha questa avvertenza, si va a pericolo di avere nel valore di $(1+r)^n$ un'approssimazione inferiore a quella che si desidera. Perchè, siccome la mantissa di ogni logaritmo dà solo un valore approssimato del logaritmo, moltiplicando il logaritmo per n, anche l'errore viene moltiplicato per n.

** Se n è frazionario, la parte intera dà il numero degli anni. Per avere i mesi ed i giorni, si trovi qual montante si ha dopo il numero trovato di anni; e poi si cerchi quanti mesi e giorni si richiedono affinchè questo montante, posto all'interesse semplice ed alla tassa unitaria r, produca il montante M_n.

terà lire kr; e lire M_n, durante la frazione k di anno, frutteranno lire krM_n. Il montante definitivo M sarà quindi: $M=M_n+krM_n=M_n(1+kr)$.

Ponendo in luogo di M_n il suo valore $c(1+r)^n$, si ha:

Risposta. $M=c(1+r)^n(1+kr)$.

ANNUALITÀ.

343. DEFINIZIONI. 1ª. Dicesi *annualità* una somma che si mette ogni anno all'interesse composto, e sempre alle medesime condizioni. *

2ª. Dicesi *montante* la somma delle diverse annualità coi relativi interessi.

L'annualità si dice *anticipata* o *posticipata*, secondochè si paga al principio d'ogni anno od alla fine d'ogni anno. **

344. TEOREMA. Il montante M_n prodotto dopo n anni dall'annualità a posta all'interesse composto annuale ed alla tassa unitaria r è:

$$M_n=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

DIMOSTRAZIONE. La 1ª annualità avrà fruttato n anni all'interesse composto annuale ed alla tassa unitaria r; epperciò il suo montante sarà $a(1+r)^n$.

La 2ª annualità (essendo stata depositata un anno dopo) avrà fruttato un anno di meno, cioè $n-1$ anni; ed il suo montante sarà $a(1+r)^{n-1}$.

La 3ª annualità avrà fruttato un anno di meno che la 2ª, cioè $n-2$ anni; ed il suo montante sarà $a(1+r)^{n-2}$.

E così di seguito, si avranno i montanti parziali $a(1+r)^{n-3}$, $a(1+r)^{n-4}$, ecc.; finchè l'ultima annualità avrà fruttato un anno solo, ed il suo montante sarà $a(1+r)$.

Il montante definitivo M sarà la somma di tutti i montanti parziali; epperciò avremo:

$$M_n=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\dots\dots+a(1+r)^2+a(1+r),$$

ed invertendo, per comodità, l'ordine dei termini della somma,

$$M_n=a(1+r)+a(1+r)^2+\dots\dots+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^n \quad (1)$$

Il 2° membro di questa eguaglianza è evidentemente la somma dei primi n termini della progressione geometrica che ha per primo termine $a(1+r)$, e per ragione $1+r$.

La somma di questi termini si otterrà dalla formola $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ (teor. 5° § 285, nota **) ponendo $a(1+r)$ al posto di a_1, ed $1+r$ al posto di q. Facendo questa sostituzione, il 2° membro dell'eguaglianza precedente diventa:

$$a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1} \quad \text{ossia} \quad a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Si avrà quindi: $$M_n=a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

345. Nella (2) entrano i quattro numeri M_n, a, r, n. Se tre di questi numeri sono noti, la (2) è un'equazione con una incognita, e dà il valore

* Cioè sempre alla medesima tassa, ed alla medesima unità di tempo (anno, semestre, ecc.).

** *Le annualità posticipate* hanno ordinariamente per iscopo l'estinzione di un debito, e ne tratteremo nel capitolo seguente col titolo *Ammortimenti*.

del quarto numero. Perciò sui quattro numeri M_n, a, r, n, si potranno avere quattro problemi distinti, cioè:

Problema 1°. *Si trovi M_n essendo dati a, r, n.*

Problema 2°. *Si trovi a essendo dati M_n, r, n.*

Problema 3°. *Si trovi r essendo dati M_n, a, n.*

Problema 4°. *Si trovi n essendo dati M_n, a, r.* *

Se si prendono i logaritmi d'ambi i membri della (2), si ottiene:

$$\log M_n = \log\left[a(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}\right] = \log a + \log(1+r) + \log\frac{(1+r)^n-1}{r}, \text{ ossia}$$

$$\log M_n = \log a + \log(1+r) + \log[(1+r)^n-1] - \log r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

Quest'equazione fa conoscere $\log M_n$ (e quindi M_n) quando si conoscono a, r, n. La (I) risolve quindi il problema 1°.

Risolvendo la (I) rispetto ad a, si ottiene:

$$\log a = \log M_n - \log(1+r) - \log[(1+r)^n-1] + \log r \quad . \; . \quad \text{(II)}$$

Quest'equazione fa conoscere $\log a$ (e quindi a) quando si conoscono M_n, r, n. La (II) risolve perciò il problema 2°.

Per la risoluzione del 3° problema, osserviamo che la (2) non è altro che la (1) scritta sotto forma diversa. Ora nella (1) vi è $a(1+r)^n$; e la potenza $(1+r)^n$ contiene certamente il termine r^n. Similmente la potenza $(1+r)^{n-1}$ contiene certamente il termine r^{n-1}. E così continuando, si vede che, prima della riduzione dei termini simili, vi sono certamente termini contenenti r^n, termini contenenti r^{n-1}, termini contenenti r^{n-2} ecc. fino a termini contenenti r, e termini senza r. Facendo poi la riduzione dei termini simili, nessuna di queste potenze scompare, perchè i termini della (1) sono tutti positivi. Dunque la (1), e quindi la (2), sono equazioni complete di n^o grado in r.

Poichè, fra le equazioni complete ad un'incognita, abbiamo studiato solamente quelle di 1° e di 2° grado, potremo risolvere il problema 3° solamente quando è $n=1$ od $n=2$.

Per risolvere il problema 4°, bisogna dare una forma particolare alla (2) in modo che, facendo uso dei logaritmi, si possa avere un'equazione facilmente risolvibile rispetto ad n. A tal fine, moltiplichiamo per r ambi i membri della (2), ed avremo:

$$rM_n = a(1+r)[(1+r)^n-1], \quad \text{ossia}$$
$$rM_n = a(1+r)(1+r)^n - a(1+r), \quad \text{ossia}$$
$$rM_n + a(1+r) = a(1+r)(1+r)^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (3)$$

Prendendo i logaritmi d'ambi i membri della (3), si ottiene:

$$\log[rM_n + a(1+r)] = \log a + \log(1+r) + n\log(1+r).$$

Risolviamo ora quest'equazione rispetto ad n, ed avremo:

$$n\log(1+r) = \log[rM_n + a(1+r)] - \log a - \log(1+r), \quad \text{ossia}$$

$$n = \frac{\log[rM_n + a(1+r)] - \log a - \log(1+r)}{\log(1+r)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)}$$

---

* Questi problemi si sogliono enunciare così:

PROBLEMA 1°. *Qual'è il montante prodotto dall'annualità a dopo n anni alla tassa unitaria r?*

PROBLEMA 2°. *Quale annualità devo pagare alla tassa unitaria r per avere, dopo n anni, montante M_n?*

PROBLEMA 3°. *A qual tassa unitaria devo collocare l'annualità a per avere, dopo n anni, montante M_n?*

PROBLEMA 4°. *Per quanti anni devo pagare l'annualità a alla tassa unitaria r per avere montante M_n?*

La (III) risolve il problema 4°. *

346. ***PROBLEMA.*** *Al principio d'ogni anno pongo lire* 500 *all'interesse composto del* 4 %. *Quale sarà il montante dopo* 8 *anni?*

Risoluzione. Se la tassa è 4 %, la tassa unitaria sarà di lire 0,04.

Avremo quindi $a = 500$, $n = 8$, $r = 0{,}04$, $1+r = 1+0{,}04 = 1{,}04$. Poichè si cerca il montante M_n, basterà sostituire nella (I) i valori di a, r, n, e si avrà: $\log M_8 = \log 500 + \log 1{,}04 + \log(1{,}04^8 - 1) - \log 0{,}04$.

Cominciamo a calcolare il valore di $1{,}04^8 - 1$; ed anzi tutto il valore di $1{,}04^8$. Si avrà: $\log 1{,}04^8 = 8 \times \log 1{,}04$.

Poichè è $\log 1{,}04 = 0{,}01703$, sarà $\log 1{,}04^8 = 8 \times 0{,}01703 = 0{,}13624$.

Il numero corrispondente al logaritmo 0,13624 è 1,36848. Sarà perciò $1{,}04^8 = 1{,}36848$; e quindi $1{,}04^8 - 1 = 0{,}36848$. Avremo allora:

$$\log M_8 = \log 500 + \log 1{,}04 + \log 0{,}36848 - \log 0{,}04 =$$
$$= 2{,}69897 + 0{,}01703 + \overline{1}{,}56642 - \overline{2}{,}60206 = \text{**}$$
$$= 2{,}69897 + 0{,}01703 + \overline{1}{,}56642 + 1{,}39794 = 3{,}68036.$$

Sarà dunque $M_8 = 4790{,}22$.

Risposta. Il montante sarà di lire 4790,22.

AMMORTIMENTI.

347. DEFINIZIONE. Dicesi *ammortimento* l'estinzione di un debito aumentato dei suoi interessi composti, fatta per mezzo di annualità posticipate. ***

TEOREMA. Se l'estinzione del debito c è fatta per mezzo di n annualità, ciascuna di lire a, poste alla tassa unitaria r, deve sussistere l'eguaglianza

$$c(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè alla fine di ogni anno pago un'annualità, se le annualità sono n, gli anni impiegati per estinguere il debito sono pure n.

Ora la 1ª annualità la pago alla fine del 1° anno. Essa quindi frutterà durante $n-1$ anni; ed il suo montante sarà $a(1+r)^{n-1}$.

La 2ª annualità la pago alla fine del 2° anno. Essa quindi frutterà durante $n-2$ anni; ed il suo montante sarà $a(1+r)^{n-2}$.

E così di seguito, si avrà $a(1+r)^{n-3}$, $a(1+r)^{n-4}$, ecc. finchè la penultima annualità frutterà durante un solo anno; ed il suo montante sarà $a(1+r)$.

Nell'istante in cui pago l'ultima annualità (cioè alla fine del n° anno) estinguo il debito. Perciò l'ultima annualità non frutta più interessi.

---

* Si osservi che non si può prendere il logaritmo di $(1+r)^n - 1$ e di $rM_n + a(1+r)$ prendendo i logaritmi dei termini dei due polinomi. Bisogna prima calcolare separatamente $(1+r)^n - 1$ ed $rM_n + a(1+r)$, e poi prendere i logaritmi dei valori così trovati.

Si noti ancora che, avendo da trovare il valore di $(1+r)^n - 1$, è utile servirsi dei logaritmi per trovare il valore di $(1+r)^n$.

Giova inoltre ricordare che, affinchè il valore trovato di n risolva il problema, il numero n deve essere intero positivo.

** Poichè è $\overline{2}{,}60206 = -1{,}39794$, sarà $-\overline{2}{,}60206 = -(-1{,}39794) = +1{,}39794$. E quindi, invece di scrivere $-\overline{2}{,}60206$, potremo scrivere $+1{,}39794$. Si opera analogamente in casi analoghi.

*** Si suppone che il debito frutti interesse a favore del creditore. Il debito poi sarà estinto (ammortizzato) quando il montante delle annualità pagate dal debitore diventa eguale al debito primitivo aumentato dei suoi interessi composti. Si suppone inoltre che la tassa unitaria, e l'unità di tempo siano le medesime, sia pel calcolo delle annualità come pel calcolo degli interessi prodotti dal debito primitivo.

La somma pagata al creditore sarà eguale alla somma dei montanti di tutte queste annualità; ossia sarà:

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}+\dots\dots+a(1+r)^2+a(1+r)+a;$$

oppure anche (scrivendo, per maggior comodità, gli addendi in ordine inverso):

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\dots\dots+a(1+r)^{n-3}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-1} \quad . \quad . \quad (1)$$

Ma questa è la somma dei primi n termini d'una progressione geometrica il cui 1° termine è a e la ragione è $1+r$. La somma (1) si otterrà perciò dalla formola $s_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ (teor. 5° § 285, nota **) sostituendo a ad a_1, ed $1+r$ a q. Si trova così che la somma (1) è eguale all'espressione $a\frac{(1+r)^n-1}{(1+r)-1}$, ossia ad $a\frac{(1+r)^n-1}{r}$.

Il debito che originariamente era c, dopo n anni sarà divenuto $c(1+r)^n$. Ma, alla fine degli n anni, ho pagato in tutto lire $a\frac{(1+r)^n-1}{r}$, ed ho interamente estinto il mio debito aumentato dei suoi interessi composti. Ciò significa che è:

$$c(1+r)^n=a\frac{(1+r)^n-1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

348. Nella (2) entrano i quattro numeri c, a, r, n. Se tre di questi numeri sono noti, la (2) è un'equazione ad una sola incognita, e ci dà il valore del quarto numero. Perciò sui quattro numeri c, a, r, n si potranno avere quattro problemi distinti, cioè:

Problema 1°. *Si trovi c essendo dati a, r, n.*
Problema 2°. *Si trovi a essendo dati c, r, n.*
Problema 3°. *Si trovi r essendo dati c, a, n.*
Problema 4°. *Si trovi n essendo dati c, a, r.* *

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri della (2), si ha:

$$\log[c(1+r)^n]=\log\left[a\frac{(1+r)^n-1}{r}\right] \quad \text{ossia}$$

$$\log c+n\log(1+r)=\log a+\log[(1+r)^n-1]-\log r \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Risolvendo la (3) rispetto a $\log c$, si ottiene:

$$\log c=\log a+\log[(1+r)^n-1]-\log r-n\log(1+r) \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I})$$

Quest'equazione fa conoscere $\log c$ (e quindi c) quando si conoscono a, r, n. La (I) risolve perciò il problema 1°.

Risolvendo la (3) rispetto a $\log a$, si ottiene:

$$\log a=\log c+n\log(1+r)-\log[(1+r)^n-1]+\log r \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II})$$

Quest'equazione fa conoscere $\log a$ (e quindi a) quando si conoscono c, r, n. La (II) risolve perciò il problema 2°.

Ragionando come sul problema 3° del § 345, conchiudiamo che potremo risolvere il problema 3° solamente quando è $n=1$ od $n=2$.

---

* Questi problemi si sogliono enunciare così:

PROBLEMA 1°. *Qual'è il debito che ho contratto se, per estinguerlo, devo pagare l'annualità a durante n anni, ed alla tassa unitaria r?*

PROBLEMA 2°. *Contraggo un debito di lire c. Qual'è l'annualità che devo pagare alla tassa unitaria r, affinchè il debito sia estinto dopo n anni?*

PROBLEMA 3°. *Voglio contrarre un debito di lire c, pagabile in n anni mediante l'annualità a. A qual tassa unitaria devono calcolarsi gli interessi?*

PROBLEMA 4°. *Quanti anni sono necessarii per pagare, mediante l'annualità a, alla tassa unitaria r, un debito che attualmente è di lire c?*

Per la risoluzione del problema 4°, ci conviene considerare $(1+r)^n$ come incognita, e risolvere prima la (2) rispetto ad $(1+r)^n$. A tal fine moltiplichiamo per r ambi i membri della (2), ed avremo:
$cr(1+r)^n = a[(1+r)^n - 1]$; ossia $cr(1+r)^n = a(1+r)^n - a$; ossia $a(1+r)^n - cr(1+r)^n = a$; ossia * $(a-cr)(1+r)^n = a$; ossia
$(1+r)^n = \frac{a}{a-cr}$.

Prendendo i logaritmi d'ambi i membri di questa eguaglianza, si ha:
$\log[(1+r)^n] = \log\frac{a}{a-cr}$; ossia $n\log(1+r) = \log a - \log(a-cr)$; da cui

$$n = \frac{\log a - \log(a-cr)}{\log(1+r)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Quest'equazione fa conoscere n quando si conoscono c, a, r; essa quindi risolve il problema 4°. **

349. PROBLEMA. *Contraggo un debito di 50000 lire da pagarsi insieme coi suoi interessi composti del 4 % in 10 anni, mediante annualità. Quale annualità dovrò pagare?*

Risoluzione. Nel caso nostro abbiamo da risolvere il problema 2°, e dovremo far uso della (II). Abbiamo $c = 50000$; $n = 10$; $r = 0{,}04$, e quindi $1 + r = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$. Cominciamo intanto a trovare $(1+r)^n - 1 = 1{,}04^{10} - 1$; e per trovarlo vogliamo far uso dei logaritmi. Avremo:

$$\log 1{,}04^{10} = 10 \times \log 1{,}04 = 10 \times 0{,}01703 = 0{,}17030.$$

Il numero corrispondente al logaritmo 0,17030 è 1,48013. Sarà quindi $1{,}04^{10} = 1{,}48013$; epperciò $1{,}04^{10} - 1 = 1{,}48013 - 1 = 0{,}48013$. Dalla (II) avremo: $\log a = \log 50000 + 10.\log 1{,}04 - \log 0{,}48013 + \log 0{,}04 =$

$$= 4{,}69897 + 0{,}17030 - \overline{1}{,}68136 + \overline{2}{,}60206 = \; ***$$

$$= 4{,}69897 + 0{,}17030 + 0{,}31864 + \overline{2}{,}60206 = 3{,}78997.$$

Il numero corrispondente al logaritmo 3,78997 è 6165,57.
Sarà quindi $a = 6165{,}57$.

Risposta. *Bisognerà pagare un'annualità di lire* 6165,57.

CAPO QUINTO.

Estrazione della radice quadrata

PRELIMINARI.

350. TEOREMA. Il quadrato di un numero formato di unità e di decine è eguale al quadrato delle decine, più il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità.

---

* Mettendo in evidenza il fattore $(1+r)^n$ comune ai due termini del 1° membro.

**. Affinchè il valore trovato soddisfi al problema, bisogna che n sia un numero intero positivo.

*** Poichè è $\overline{1}{,}68136 = -0{,}31864$, sarà $-\overline{1}{,}68136 = -(-0{,}31864) = +0{,}31864$; e quindi, invece di scrivere $-\overline{1}{,}68136$, potremo scrivere $+0{,}31864$.

Dimostrazione. Sia per esempio 148 il numero dato; sarà evidentemente: $148 = 14$ decine $+ 8$ unità; e quindi (pel teor. 2° § 60) si avrà:

$$148^2 = (14 \text{ dec.} + 8 \text{ un.})^2 = (14 \text{ dec.})^2 + 2(14 \text{ dec.})(8 \text{ un.}) + (8 \text{ un.})^2.$$

Analogo ragionamento si fa sopra ogni altro numero avente unità e decine.

Corollario. **Il quadrato delle decine è un numero di centinaia; ed il doppio prodotto delle decine per le unità è un numero di decine.**

Dimostrazione. Ponendo nell'esempio preced. 10.14 invece di 14 dec., si ha: $(14 \text{ dec.})^2 = (10.14)^2 = 10^2.14^2 = 100 \times 14^2 = 1 \text{ cent.} \times 14^2 = 14^2$ centinaia.

Similmente si ha $2(14 \text{ dec.})(8 \text{ un.}) = 2.(10.14).8 = 2.10.14.8 = 10.(2.14.8) = 1 \text{ dec.} \times (2.14.8) = 2.14.8$ decine.

351. Due numeri interi consecutivi tali che i loro quadrati siano l'uno minore di a, e l'altro maggiore di a, si chiameranno *radici quadrate di a approssimate a meno d'una unità:* il minore si chiamerà *radice quadrata a meno d'una unità per difetto;* il maggiore, *radice quadrata a meno d'una unità per eccesso.*

Il numero minore si suole chiamare semplicemente *radice quadrata intera di a;* ed in generale:

Dicesi *radice quadrata intera* di un numero a, il maggior numero intero il cui quadrato non supera a.

Due frazioni aventi per numeratori due numeri interi consecutivi, ed aventi egual denominatore n, e tali che i loro quadrati siano l'uno minore di a, e l'altro maggiore di a, si chiameranno *radici quadrate di a approssimate a meno di* $1/n$. La minore delle due frazioni si chiamerà *radice quadrata di a approssimata a meno di* $1/n$ *per difetto;* la maggiore, *radice quadrata di a approssimata a meno di* $1/n$ *per eccesso.*

Esempio. Se $\left(\frac{8}{15}\right)^2 > a$ e $\left(\frac{7}{15}\right)^2 < a$, sarà $\frac{8}{15}$ la radice quadrata di a a meno di $1/15$ per eccesso, e $\frac{7}{15}$ la radice quadrata di a a meno di $1/15$ per difetto.

Dicesi *resto dell'estrazione della radice quadrata di un numero* il resto che si ottiene quando dal numero si sottrae il quadrato della sua radice approssimata per difetto.

Esempio. Il numero 70 non è quadrato, e la sua radice quadrata intera è 8. Sottraendo 8^2 da 70, si ottiene per resto 6. Il numero 6 si chiama il resto della estrazione della radice quadrata intera di 70.

Osservazione. Se un numero è quadrato, sottraendone il quadrato della sua radice quadrata, si ottiene per resto *zero.*

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA INTERA DEI NUMERI INTERI.

352. Esamineremo separatamente diversi casi particolari.

1° CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO DI UNA O DI DUE CIFRE.

Non vi è alcuna regola; queste radici si devono sapere a memoria.

2° CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO DI 3 O DI 4 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice quadrata intera di 7548. Questo numero è compreso fra 100 e 10000; la sua radice quadrata sarà perciò compresa fra $\sqrt{100}$ e $\sqrt{10000}$, (ossia fra 10 e 100) e quindi avrà due cifre.

La radice di 7548 (indicandone con a la cifra delle decine e con b la cifra delle unità) si potrà rappresentare con $10.a+b$. Se r è il resto della estrazione di radice sarà evidentemente:

$$7548 = (10.a+b)^2+r = 100.a^2+10.2ab+b^2+r;$$

e poichè $100.a^2$ è un numero di centinaia, e $10.2ab$ un numero di decine, potremo anche scrivere*:

$$7548 = a^2 \text{ cent.} + 2ab \text{ dec.} + b^2 + r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ove $r=0$ se 7548 è quadrato.

1°. ***Ricerca delle decine della radice.*** Dalla (1) si scorge che le a^2 cent. del 1° addendo devono essere contenute nelle 75 cent. di 7548, ossia che a^2 deve essere contenuto in 75. Ora il maggior quadrato contenuto in 75 è 64; e dico che sarà $a^2=64$, ossia $a=8$. Dimostrerò questo, dimostrando che non può essere $a>8$, nè $a<8$.

Non può essere $a>8$. Infatti: essendo 8^2 (cioè 64) il maggior quadrato contenuto in 75, se fosse $a>8$, non potrebbe più a^2 essere contenuto in 75.

Non può essere $a<8$. Infatti: essendo 8^2 contenuto in 75, 8^2 cent. saranno contenute in 75 cent., ossia in 7500; ed a fortiori 8^2 cent. saranno contenute in 7548. Ma $8^2 \text{ cent.} = 100.8^2 = 10^2.8^2 = (10.8)^2 = 80^2$. Dunque il quadrato di 80 è contenuto in 7548, epperciò la radice quadrata di 7548 non è inferiore ad 80. Ne segue che la cifra delle decine della radice non è inferiore ad 8.

Abbiamo così provato che la cifra delle decine della radice è 8. Dunque: *Per trovare la cifra delle decine della radice, basta, nel numero dato, separare con un punto le centinaia dalle decine, ed estrarre la radice quadrata intera del numero che si trova alla sinistra del punto.*

2°. ***Ricerca delle unità della radice.*** Nella eguaglianza (1), possiamo ad a sostituire il suo valore 8, ed otterremo:

$7548 = 8^2 \text{ cent.} + 2.8.b \text{ dec.} + b^2 + r,$ ossia

$7548 = 64 \text{ cent.} + 16.b \text{ dec.} + b^2 + r,$ ossia *

$7548 - 6400 = 16.b \text{ dec.} + b^2 + r,$ ossia

$1148 = 16.b \text{ dec.} + b^2 + r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$

75'48	86	
64		
—	167	166
114'8	7	6
996	—	—
—		
152		

Dalla eguaglianza precedente si scorge che $16.b$ dec. è tutto contenuto nella somma 1148; e poichè $16.b$ dec. è un numero esatto di decine, se esso deve essere contenuto in 1148, dovrà essere contenuto nelle 114 dec. di 1148; sarà quindi $16.b$ dec. contenuto in 114 dec., ossia $16.b$ contenuto in 114.

Se fosse esattamente $16.b=114$, dividendo 114 per 16 si otterrebbe per quoto il valore esatto di b. Ma [come si scorge dalla (2)] nelle 114 dec. di 1148 vi possono essere decine provenienti dalla somma degli addendi b^2 ed r. Ne segue che, dividendo 114 per 16, si ottiene per quoto il valore di b, oppure un numero maggiore di b.

Ciò che abbiamo fatto lo possiamo esprimere così:

* Sottraendo 64 cent. = 6400 da ambi i membri dell'eguaglianza.

Si osservi poi che per sottrarre 64 cent. (ossia 6400) da 7548, basta sottrarre 64 dal gruppo delle cent., ed alla destra del risultato scrivere il gruppo 48. Così si è fatto nell'Esempio.

Trovata la cifra delle decine della radice, la si eleva al quadrato, ed il numero ottenuto si sottrae dal gruppo delle centinaia del numero dato. Alla destra del resto (che chiameremo resto parziale) si scrive il gruppo formato dalle decine ed unità del numero dato. Nel numero che ne risulta, si separano con un punto le decine dalle unità, ed il numero che si trova alla sinistra del punto si divide pel doppio della cifra delle decine della radice. Il quoto che si ottiene sarà la cifra delle unità della radice, oppure una cifra troppo grande.

Dividendo 114 per 16, si ottiene per quoto 7. Sarà perciò 7 eguale a b, oppure maggiore di b. Per verificare questo, basta porre nella (2) il 7 al posto di b, e si deve ottenere $1148 = 16.7\,\text{dec.} + 7^2 + r$ . . . . . . (2′) ove dobbiamo ricordare che r può anche avere il valor *zero*. Affinchè sia vera la (2′), deve essere $16.7\,\text{dec.} + 7^2$ non superiore a 1148.

Calcolando, * si trova che è $16.7\,\text{dec.} + 7^2 = 1169$. Dunque la cifra 7 è troppo grande.

Proviamo la cifra 6, ed avremo $16.6\,\text{dec.} + 6^2 = 996$. Poichè 996 non è superiore a 1148, sarà 6 il valore di b. Sarà quindi $a = 8$ e $b = 6$, epperciò la radice cercata è 86. Sostituendo nella (2) a b il suo valore 6, si ottiene: $1148 = 16.6\,\text{dec.} + 6^2 + r = 96\,\text{dec.} + 36 + r$ ossia $1148 = 996 + r$ . . (3)

Da cui si ha: $1148 - 996 = r$, ossia $152 = r$.

Ne segue che la radice quadrata intera di 7548 è 86 con 152 di resto

Ciò che abbiamo fatto ultimamente lo possiamo esprimere così:

Per verificare se il quoto ottenuto è la vera cifra delle unità della radice, si scrive questo quoto a destra del doppio della cifra delle decine della radice, ed il numero che ne risulta si moltiplica pel quoto stesso. Se questo prodotto si può sottrarre dal numero formato dal resto parziale seguito dal gruppo scrittogli a destra, il quoto trovato è la cifra cercata delle unità della radice. In caso contrario, si diminuisce d'una unità questo quoto, e si prova la cifra così ottenuta; e così si continua (se occorre) una o più volte, finchè si ottenga un prodotto che si possa sottrarre. L'ultima cifra provata è la cifra delle unità della radice, ed il resto di questa sottrazione sarà il resto dell'estrazione della radice.

3° CASO. RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO AVENTE PIÙ DI 4 CIFRE.

Si abbia p.e. da estrarre la radice quadrata intera di 75481523. Poichè il numero dato ha più di due cifre, la sua radice quadrata intera ha più d'una cifra, ossia è un numero avente unità e decine.

Sappiamo già che il quadrato delle decine della radice è un numero di centinaia; e che, estraendo la radice quadrata intera dalle centinaia del nu-

* Per trovare comodamente il valore di $16.7\,\text{dec.} + 7^2$, si osservi che, ponendo in evidenza il fattore 7, si ha $16.7\,\text{dec.} + 7^2 = (16\,\text{dec.} + 7).7 = (160 + 7).7 = 167.7$. Dove si scorge che basta scrivere 7 alla destra di 16 (che è il doppio della cifra delle decine della radice), e moltiplicare per 7 il numero che ne risulta.

Il prodotto 167.7 dovendosi sottrarre da 1148, bisognerebbe scriverlo sotto il numero 1148. Ma, siccome non sappiamo se tale sottrazione si potrà eseguire o non, è meglio scrivere a parte il prodotto 167.7, e se questo prodotto non si può sottrarre da 1148, si diminuisce d'una unità il moltiplicatore, e si prova il prodotto 166.6; se anche questo prodotto è troppo grande, si diminuisce ancora d'una unità il moltiplicatore, e si prova il prodotto 165.5; e così si continua (se occorre) finchè si ottenga un prodotto che si possa sottrarre da 1148. Questo prodotto si scriverà sotto il 1148, e si farà la sottrazione. Così si fece nell'Esempio.

Analogamente si opererà in casi analoghi.

mero dato, si ottengono le decine della radice. Siamo perciò condotti a separare con un punto le centinaia dalle decine di 75481523, ed a cercare la radice quadrata intera di 754815. Questa radice sarà il numero delle decine della radice cercata. Trovate le decine, troveremo poi le unità col metodo indicato nel 2° caso. Siamo così ridotti ad estrarre la radice quadrata intera del numero 754815, che ha due cifre di meno del numero dato.

La radice di 754815 ha anch'essa unità e decine; e le decine si ottengono estraendo la radice quadrata intera dalle centinaia di 754815, ossia da 7548. Siamo così condotti a separare con un punto le centinaia dalle decine di 754815, e ad estrarre la radice quadrata intera del numero 7548 che ha due cifre di meno di 754815.

Poichè 7548 ha quattro sole cifre, ne sappiamo estrarre la radice.

La radice di 7548 sarà il numero delle decine della radice di 754815. Trovate le decine della radice di 754815, si troveranno (col metodo indicato nel 2° caso) le unità della radice di 754815, e così sarà trovata la radice di 754815.

Questa radice sarà il numero delle decine della radice di 75481523; e trovate le decine, troveremo poi col metodo solito anche le unità della radice di 75481523.

Quest' ultima radice sarà la radice quadrata cercata.

Osservazione. Si capisce facilmente che, qualunque sia il numero di cifre del numero dato, tenendo la via sopra indicata, si arriverà sempre ad un numero di 3 o di 4 cifre, la cui radice quadrata intera si sa estrarre.

Esempio. Nell'esempio si è estratta la radice quadrata intera di 75481523, e si è ottenuto 8688 per radice intera e 179 di resto. *

75'48'15'23	8688	
64	167	166
114'8	7	6
996		1728
1521'5		8
13824		17368
13912'3		8
138944		
179		

353. Da quanto precede si ricava facilmente la seguente regola:

REGOLA PER ESTRARRE LA RADICE QUADRATA INTERA DI UN NUMERO INTERO.

1°. Si scompone il numero dato in gruppi di due cifre, partendo da destra. L'ultimo gruppo a sinistra può anche avere una sola cifra.

2°. Si estrae la radice quadrata intera del 1° gruppo a sinistra, e si ottiene la 1ª cifra (a sinistra) della radice.

3°. Si fa il quadrato di questa cifra, e lo si sottrae dal 1° gruppo (a sinistra) del numero dato.

4°. A destra del resto ottenuto (che chiameremo 1° resto parziale) si scrive il 2° gruppo, e si separa con un punto la cifra delle unità del numero che ne risulta.

5°. Si divide il numero che è alla sinistra del punto per il doppio della cifra già trovata della radice. Il quoto intero ottenuto sarà la 2ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande. La si verifica scrivendola a destra del doppio della cifra già trovata alla radice, e moltiplicando il numero che ne risulta per la cifra stessa. Se questo prodotto si può sottrarre dal numero formato dal 1° resto parziale seguito dal gruppo scrittogli a destra, la cifra trovata è buona. In caso contrario, si esperimenta la cifra immediatamente inferiore; e si continua così

---

* Per trovare il doppio di 86, ci è bastato fare la somma 166+6. Infatti si ha evidentemente: $86.2 = (8 \text{ dec.} + 6 \text{ un.}) \times 2 = 8 \text{ dec.} \times 2 + 6 \text{ un.} \times 2 = 16 \text{ dec.} + 6 \text{ un.} + 6 \text{ un.} = 160 \text{ un.} + 6 \text{ un.} + 6 \text{ un.} =$
$= 166 \text{ un.} + 6 \text{ un.}$ Analogamente, per avere il doppio di 868, ha bastato fare la somma 1728+8. Analogamente si farà negli altri casi.

finchè si ottenga un prodotto che si possa sottrarre. L'ultima cifra sperimentata sarà la 2ª cifra della radice.

6º. Alla destra del resto ottenuto (che chiameremo 2º resto parziale) si scrive il 3º gruppo, e si separa con un punto la cifra delle unità del numero risultante.

7º. Si divide il numero che è alla sinistra del punto pel doppio del numero già trovato alla radice. Il quoto intero ottenuto sarà la 3ª cifra della radice, oppure una cifra troppo grande; e la si esperimenta come si è fatto precedentemente.

8º. Si continua così finchè si sia operato su tutti i gruppi che formano il numero dato. L'ultimo resto sarà il resto dell'estrazione della radice quadrata. *

Osservazioni. 1º. Se il numero dato è quadrato, il resto è *zero.*

2º. Se l'operazione fu ben condotta, sommando il resto col quadrato della radice trovata, si ottiene il numero dato.

3º. Se una di quelle divisioni che si fanno per trovare una cifra della radice dà per quoto intero *zero,* si opera su questo *zero* come si opererebbe se il quoto fosse una cifra significativa. Dall'esempio, si scorge che basta scrivere *zero* alla destra del numero già trovato alla radice, ed anche alla destra del doppio di questo numero; poi scrivere un altro gruppo alla destra di quell'ultimo gruppo che fu scritto a destra dell'ultimo resto parziale ottenuto, e continuare poscia l'operazione al modo solito.

10'26'56'16	3204
9	62
12'6	2
124	640
25'6	0
000	6404
2561'6	4
25616	
0	

4º. Se si ottenesse un resto parziale eguale a *zero,* e vi fossero ancora gruppi di *zeri* da adoperare, si scrivono alla destra del numero già trovato alla radice tanti *zeri* quanti sono i gruppi di *zeri* non ancora adoperati. Il numero che ne risulta sarà la radice cercata.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DELLE FRAZIONI.

354. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL NUMERATORE ED IL DENOMINATORE SONO QUADRATI.

Problema. *Si estragga la radice quadrata di* $\frac{9}{25}$.

Risoluzione. Sappiamo (Coroll. § 88) che il quadrato di una frazione è una frazione che ha per numeratore il quadrato del numeratore, e per denominatore il quadrato del denominatore. Quindi, per trovare la radice quadrata di $\frac{9}{25}$, basterà trovare una frazione che abbia per numeratore un numero il cui quadrato sia 9, e per denominatore un numero il cui quadrato sia 25. Perciò la frazione $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$ sarà la radice quadrata cercata.

Ne segue evidentemente la regola:

REGOLA. La radice quadrata di una frazione ordinaria in cui il numeratore ed il denominatore sono quadrati, è una frazione che ha per numeratore la radice quadrata del numeratore, e per denominatore la radice quadrata del denominatore della frazione data.

* Questa regola è, in sostanza, quella che diede Teone d'Alessandria nel suo *Commentario sull'Almagesto di Tolomeo.* Teone d'Alessandria nacque verso il 320, e morì verso il 395 dell'Era Volgare.

355. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI IL SOLO DENOMINATORE È QUADRATO.

Problema. *Si estragga la radice quadrata di* $\frac{33}{64}$.

Risoluzione. La radice quadrata intera di 33 è 5; la radice quadrata intera di 64 è 8; ed è $\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$ e $\left(\frac{6}{8}\right)^2=\frac{36}{64}$. Poichè $\frac{33}{64}$ è compreso fra $\frac{25}{64}$ e $\frac{36}{64}$, la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ sarà compresa fra la radice quadrata di $\frac{25}{64}$ e la radice quadrata di $\frac{36}{64}$, ossia fra $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$. Poichè $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{8}$ differiscono fra loro di $\frac{1}{8}$, la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ differirà da $\frac{5}{8}$ e da $\frac{6}{8}$ per meno di $\frac{1}{8}$. Diremo perciò che $\frac{5}{8}$ è la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ a meno di $\frac{1}{8}$ per difetto, e che $\frac{6}{8}$ è la radice quadrata di $\frac{33}{64}$ a meno di $\frac{1}{8}$ per eccesso. Ne segue la regola:

REGOLA. La radice quadrata (per difetto) di una frazione ordinaria in cui il solo denominatore è quadrato, è una frazione che ha per numeratore la radice quadrata intera del numeratore, e per denominatore la radice quadrata del denominatore della frazione data.

356. FRAZIONE ORDINARIA IN CUI NÈ IL NUMERATORE, NÈ IL DENOMINATORE SONO QUADRATI.

Problema. *Si estragga la radice quadrata di* $\frac{23}{7}$.

Risoluzione. Poichè il numeratore ed il denominatore non sono quadrati, potremo facilmente ritornare al 2° caso, moltiplicando p.e. i due termini della frazione pel denominatore. Così facendo avremo: $\frac{23}{7}=\frac{23.7}{7.7}=\frac{161}{7^2}$.

Estraendo la radice quadrata di $\frac{161}{7^2}$, si avrà la radice quadrata cercata.

La radice quadrata intera di 161 è 12, e la radice quadrata di 7^2 è 7; sarà quindi $\frac{12}{7}$, la radice quadrata di $\frac{23}{7}$ a meno di $\frac{1}{7}$ per difetto.

REGOLA. Per estrarre la radice quadrata di una frazione ordinaria in cui il numeratore ed il denominatore non sono quadrati, si moltiplicano ambi i termini della frazione pel denominatore. La radice quadrata della frazione così ottenuta sarà la radice quadrata cercata. *

Osservazione. 1ª. Se, prima di moltiplicare ambi i termini della frazione pel denominatore, si riduce la frazione ai minimi termini, si ottiene talvolta una frazione i cui termini sono quadrati. P.e. la frazione $\frac{32}{98}$ ha i due termini non quadrati; ma, riducendola ai minimi termini, si trova $\frac{32}{98}=\frac{16}{49}$.

---

* Questa regola si trova già nella *Triparty en la science des nombres* di Nicola Chuquet, pubblicata nel 1484.

In questo caso, sarebbe meglio estrarre la radice quadrata di $\frac{16}{49}$ piuttosto chè di $\frac{32}{98}$.

2ª. Se è dato un numero misto, conviene ridurlo prima sotto forma di frazione ordinaria. P.e. invece di $3\frac{2}{7}$ si adopera $\frac{23}{7}$.

357. FRAZIONE DECIMALE.

Si può scrivere la frazione decimale sotto forma di frazione ordinaria; e si rientra così in uno dei tre casi precedenti. Alla radice quadrata trovata si potrà poi sempre dare la forma di numero decimale.

Problema 1º. Si estragga la radice quadrata di 7,5076.

Risoluzione. Avremo $7{,}5076 = \frac{75076}{10000}$. Sarà perciò $\sqrt{7{,}5076} = \sqrt{\frac{75076}{10000}} = \frac{\sqrt{75076}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{75076}}{100}$. La radice intera di 75076 è 274, e quindi la radice cercata è $\frac{274}{100} = 2{,}74$.

Problema 2º. Si estragga la radice quadrata di 2634,503.

Risoluzione. Rendiamo pari * il numero delle cifre decimali, scrivendo uno zero a destra di 2634,503, ed avremo $2634{,}503 = 2634{,}5030 = \frac{26345030}{10000}$.

Perciò: $\sqrt{2634{,}503} = \sqrt{2634{,}5030} = \sqrt{\frac{26345030}{10000}} = \frac{\sqrt{26345030}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{26345030}}{100}$.
La radice quadrata intera di 26345030 è 5132; e quindi la radice cercata è 51,32.

Da quanto precede si ricava facilmente la seguente regola:

REGOLA. Per estrarre la radice quadrata da un numero decimale, si rende pari (se non lo è) il numero delle cifre decimali, collo scrivere uno zero alla destra del numero dato. Poi si estrae la radice quadrata dal numero che ne risulta, senza tener conto della virgola decimale. Però, appena si scrive a destra d'uno dei resti parziali il 1º gruppo di cifre decimali, si pone la virgola decimale alla radice; e poi si continua l'operazione come se questa virgola non esistesse.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA CON UNA DATA APPROSSIMAZIONE.

358. TEOREMA. La radice quadrata di un numero a intero o frazionario, approssimata per difetto a meno di $\frac{1}{n}$ (per n intero e positivo), è una frazione che ha per denominatore n, e per numeratore la radice quadrata del prodotto an^2.

* Si rende pari il numero delle cifre decimali affinchè il denominatore della frazione ordinaria equivalente alla frazione decimale abbia un numero pari di zeri, e quindi sia un quadrato.

Dimostrazione. Si ha evidentemente $a = \frac{an^2}{n^2}$. Perciò la radice quadrata di a sarà eguale alla radice quadrata di $\frac{an^2}{n^2}$, la quale si ottiene appunto scrivendo una frazione che abbia per denominatore n e per numeratore la radice quadrata intera di an^2.

Poichè è $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{an^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{an^2}}{n}$, se indichiamo con x la radice quadrata intera di an^2, avremo evidentemente $\frac{x}{n} < \sqrt{a}$, ed $\frac{x+1}{n} > \sqrt{a}$. Dunque $\frac{x}{n}$ è la radice quadrata di a approssimata a meno di $\frac{1}{n}$ per difetto. *

359. ***Problema 1°.*** *Si estragga la radice quadrata di 7 approssimata per difetto a meno di* $^1/_5$.

Risoluzione. Si ha $7 = \frac{7.5^2}{5^2} = \frac{175}{5^2}$. E poichè la radice quadrata intera di 175 è 13, la radice quadrata cercata sarà $^{13}/_5$.

Problema 2°. *Si estragga la radice quadrata di* $6\,^2/_3$ approssimata per difetto a meno di $^1/_8$.

$$\textit{Risoluzione.}\ \text{Avremo}\ 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3} = \frac{\frac{20}{3}\times 8^2}{8^2} = \frac{\frac{1280}{3}}{8^2} = \frac{426\,^2/_3}{8^2}.$$

Si estrae la radice quadrata intera di $426\,^2/_3$; e per ciò fare, basta estrarre la radice quadrata intera di 426; essa è 20. Dunque $^{20}/_8$ ossia $2\,^1/_2$ è la radice quadrata cercata.

Osservazione. 1ª. Trovata la radice quadrata approssimata a meno di $^1/_n$ per difetto, aumentandone d'una unità il numeratore, si otterrà la radice quadrata approssimata a meno di $^1/_n$ per eccesso.

2ª. L'enunciato del teorema può servire di regola.

3ª. Se n è una potenza di 10, la moltiplicazione per 10^2 si fa scrivendo alla destra del numero dato tante coppie di zeri, oppure trasportando verso destra la virgola decimale di tante coppie di cifre, quanti sono gli zeri di n.

Per dividere poi per n la radice intera trovata, basterà alla destra della radice separare colla virgola decimale tante cifre quanti sono gli zeri contenuti in n. Praticamente si può operare come è indicato nella seguente regola:

360. ***REGOLA PER ESTRARRE DA UN NUMERO INTERO O FRAZIONARIO LA RADICE QUADRATA A MENO DI*** $^1/_n$ ***ESSENDO*** n ***UNA POTENZA INTERA E POSITIVA DI*** 10.

1°. Si scrive il numero dato sotto forma di frazione decimale avente tante coppie di cifre decimali quanti sono gli zeri di n***; e se mancano cifre decimali, vi si supplisce con zeri.***

---

* Se il numero dato è una frazione, nel calcolare il valore del numeratore di $\frac{an^2}{n^2}$, conviene moltiplicare prima a per n^2, e poi estrarre gli intieri dal prodotto. Se invece si estraessero prima da a gli intieri (oppure si riducesse prima a in frazione decimale approssimata), e poi si moltiplicasse per n solamente la parte intera (oppure la frazione decimale approssimata che si è ottenuta), si andrebbe a pericolo di avere un valore non sufficientemente approssimato.

2°. Si estrae la radice quadrata intera del numero ottenuto, senza tener conto della virgola decimale.

3°. Quando nel corso dell'operazione si scrive accanto ad un resto parziale la 1ª coppia di cifre decimali, si pone la virgola decimale alla radice, e si continua l'operazione come se la virgola decimale non esistesse.

Problema 1°. Si estragga la radice quadrata di 2 a meno di $^1/_{100}$.

Risoluzione. Si scrive $2 = 2{,}0000$. Si estrae la radice quadrata intera di 20000, e si ottiene 141. La radice quadrata cercata sarà 1,41.

Problema 2°. Si estragga la radice quadrata di 6,213 *a meno di* $^1/_{1000}$.

Risoluzione. Si scrive $6{,}213 = 6{,}213000$. Si estrae la radice quadrata intera di 6213000, e si ottiene 2492. La radice quadrata cercata sarà 2,492.

Problema 3°. Si estragga la radice quadrata di $7\,^3/_{20}$ *a meno di* $^1/_{100}$.

Risoluzione. Si riduce $7\,^3/_{20}$ sotto forma di frazione decimale con due coppie di cifre decimali, e si ottiene $7\,^3/_{20} = 7{,}1500$. Si estrae la radice quadrata intera di 71500, e si ottiene 267. La radice quadrata cercata sarà 2,67.

Problema 4°. Si estragga la radice quadrata di $4\,^{17}/_{111}$ a meno di $^1/_{10000}$.

Risoluzione. Si riduce $4\,^{17}/_{111}$ sotto forma di frazione decimale con quattro coppie di cifre decimali, e si ottiene $4\,^{17}/_{111} = 4{,}15315315$. Si estrae la radice quadrata intera di 415315315, e si ottiene 20379. La radice quadrata cercata sarà 2,0379.



PARTE SECONDA

Esercitazioni relative alla Parte Prima

LIBRO PRIMO

Addizione.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme:

1. $-12+24$. **2.** $-27+81$. **3.** $-149+163$. **4.** $-48+31$. **5.** $-\frac{3}{4}+\frac{7}{8}$.
6. $-\frac{5}{12}+\frac{7}{24}$. **7.** $-\frac{5}{8}+\frac{11}{12}$. **8.** $-3\frac{4}{5}+7\frac{1}{9}$. **9.** $-3-1\frac{1}{5}$.
10. $-7-15$. **11.** $-21-1\frac{3}{8}$. **12.** $-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$. **13.** $-\frac{3}{4}-\frac{5}{9}$.
14. $-\frac{3}{7}+1\frac{2}{3}$. **15.** $-\frac{7}{12}+5\frac{1}{4}$. **16.** $-3\frac{1}{9}-7\frac{1}{10}$. **17.** $-17+13\frac{4}{9}$.
18. $-\frac{3}{8}+2\frac{3}{5}$. **19.** $-\frac{7}{10}-11\frac{2}{9}$.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme: *

20. $5-8+5-7+5$. **21.** $12-27+31-49+53-24$.
22. $-7-11-13+10-41-534+459$. **23.** $3/4-5/6+7/8-9/10+3/5-2/3-1/2$.
24. $-3\frac{1}{4}+5\frac{3}{8}-1\frac{1}{6}-4\frac{1}{9}-3\frac{1}{2}+5\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{10}$.
25. $3+(-4)+(-8)+5+(-18)+(-20)$.
26. $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)+2\frac{1}{4}$.

Si eseguisca la somma dei seguenti numeri:

27. $+3,\ -4,\ -8,\ -5,\ -18,\ -20$.
28. $-2,\ -5,\ +6,\ -4,\ +5,\ -9,\ 11,\ -10$.
29. $-3,\ -1/2,\ +1/4,\ -3/8,\ +8,\ -2,\ +1/6,\ -3$.

* Per la legge associativa dell'addizione, si può anche fare prima la somma di tutti i termini positivi, poi la somma di tutti i termini negativi, e poi sommare insieme le due somme.

30. $-\frac{3}{4}$, $+\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{12}$, -3, $+5\frac{1}{6}$, $-2\frac{1}{2}$, $+10$, $-\frac{11}{3}$.
31. -1, $+3$, -5, $+7$, -9, $+11$, -13, $+15$.
32. $+2$, -4, $+6$, -8, $+10$, -12, $+14$, -16.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti somme applicando il corollario 1° § 31:

33. $(-3+4-7+22)+(-10+8-7+11-5-13)+(1-8+15-22+29)$.
34. $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\left(-3\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)$.
35. $\left(-3\frac{1}{8}-1\frac{1}{6}-1\frac{1}{10}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}-3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}\right)$.
36. Si trovi il valore delle somme dell'esercizio precedente senza far uso del corollario 1° § 31.
37. Si trovi il valore della somma $1-3+5-7+9-11+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino a 500 termini. *
38. Si trovi il valore della somma $1-3+5-7+9-11+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino a 999 termini.
39. Si trovi il valore della somma $1-3+5-7+9-11+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino ad n termini.
40. Si trovi il valore della somma $2-4+6-8+10-12+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino a 600 termini.
41. Si trovi il valore della somma $2-4+6-8+10-12+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino a 583 termini.
42. Si trovi il valore della somma $2-4+6-8+10-12+\ldots\ldots\ldots$ estesa fino ad n termini.

Sottrazione.

In ciascuna delle seguenti coppie di numeri, dal 1° numero si sottragga il 2°.

43. $+7$, 8. **44.** 5, -7. **45.** -11, -10. **46.** 10, $+24$.
47. $7\frac{1}{2}$, $-\frac{223}{4}$. **48.** $-3\frac{1}{4}$, $-25\frac{1}{8}$. **49.** $5\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{8}$.

Si trovi il valore di ciascuna delle seguenti differenze, facendo uso del teorema 3° § 36:

50. $(2-3+10-24+36-60+120-200)-(54+36-108+201)$.
51. $\left(1\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}-3\frac{1}{10}\right)-\left(-3\frac{7}{8}-2\frac{5}{6}+1\frac{1}{9}-5\frac{7}{20}\right)$.
52. $(3/8-5/10+7/12)-(-2/3+4/5-6/7+8/9)$.
53. Si trovi il valore delle differenze dell'esercizio precedente senza far uso del teorema 3° § 36.

Si tolgano le parentesi, e si trovi il valore delle seguenti espressioni:

54. $-3-\{-5+[4-(-3+2)]\}$.
55. $-8-\{-5-[-3-(-8-2)+(-4)]-(-10)\}$.

---

* Si scrivano per ordine il 1° addendo, poi la somma dei due primi, poi la somma dei tre primi, ecc.; e si vedrà subito la legge di formazione di queste somme.

56. $15+6-[3-(8+4)]$. **57.** $37-48-[18-(12+3)-(2-3)-33]$.

58. $6-8-3-[4-8-(2-5)-(4+3)+(8+2)]$.

59. $44+[48-(6+3-7)+4]-[48-8+2+(4+3)]$.

60. $4-[(3-4)+(3+17)-(98+3)]$. **61.** $5+2-6-\left\{3-(6-6)\right\}$.

62. $7-\left[3-\left\{4-(5-2)\right\}\right]$. **63.** $3-\left[4+\frac{2}{3}-\left\{4+\frac{1}{3}-3-\left(\frac{3}{4}+2+3+5\right)\right\}\right]$.

64. $2-\left[3-\left\{4-(5-6)\right\}\right]$. **65.** $\frac{3}{2}-\left[7+\left\{3-2-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right\}+2-(4+3)\right]$.

66. $3-\left[5-\left\{2-(3-3)+2-(4-2-1)\right\}\right]$.

67. $\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{3}-5-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\left(3-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}$. **68.** $4+\left[\left(\frac{3}{4}-2\right)+\left(\frac{1}{2}-3\right)\right]+$
$+\left(3+\frac{2}{3}-2\right)-\left[-\left(\frac{1}{4}-3\right)\right]-\left\{2-\left[\frac{1}{2}-(2-3)-3\right]-2\right\}$.

69. $12-\left\{[25-(6-3+7)-4]-\left[24-8+2-\left(4+\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$.

70. $\left(5-3-\frac{3}{4}\right)-\left\{4-5-(3-7-5)-[7-(3-2)]-2\right\}$.

71. $11-\left\{(5-3+2)-\left[6-3-\left(\frac{3}{4}-3\right)-7\right]-(2-5-3)\right\}$.

72. $\frac{3}{4}-\left[\frac{5}{6}+\frac{2}{9}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)$.

73. $\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{8}-1\right)-\left(3-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left\{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$.

PROBLEMI SULL'ADDIZIONE E SULLA SOTTRAZIONE.

74. Se x è un numero intero, come si rappresenta il numero intero che immediatamente lo precede, e quello che immediatamente lo segue?

75. Se x rappresenta un numero, come si rappresenta il numero che gli è superiore di a, o gli è inferiore di b?

76. Se presentemente ho x anni, quanti anni avevo a anni or sono, e quanti ne avrò fra b anni?

77. Se x è un multiplo di 3, come si rappresenta il multiplo di 3 immediatamente precedente, e quello immediatamente seguente?

78. Da un giuoco di 32 carte se ne tolgono x e poi ancora 3 in una prima volta; e poi, in una seconda volta, se ne toglie il doppio di quante se ne tolsero la prima volta, ed ancora 5 di più. Quante carte rimangono?

79. Il lato maggiore di un rettangolo, supera il minore di a metri. Quale è il perimetro del rettangolo se il minore è lungo x metri?

80. Ho fatto quattro compere. Nella prima ho speso lire m. Nella seconda a lire di più; nella terza b lire di più che nella seconda; e nella quarta c lire di più che nella terza. Quanto ho speso in tutto?

81. Un padre ha m anni; il figlio ne ha a di meno; e l'avolo b di più. Qual'è presentemente la somma delle tre età? Qual era n anni or sono? Quale sarà fra n anni?

Moltiplicazione ed elevazione a potenza.

PRODOTTO E POTENZA DEI MONOMI.

Esempio 1°. $(-x^n)^5$. La base $-x^n$ è negativa e l'esponente 5 è dispari; dunque sarà $(-x^n)^5 = -x^{5n}$.

Esempio 2°. $(-x)^{2n}$. Qualunque sia il valore del numero intero n, sappiamo che $2n$ rappresenterà un numero pari. Avremo quindi: $(-x)^{2n} = +x^{2n}$.

Esempio 3°. $(-x)^{2n+1}$; $(-x)^{2n-1}$. Qualunque sia il valore del numero intero n, sappiamo che $2n+1$ e $2n-1$ sono numeri dispari. Avremo quindi: $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$; $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$. *

Si eseguiscano i seguenti prodotti:

82. $(-5)(+2)(+7)$. **83.** $(+4)(-1)(-1/_3)(+2/_5)$.

84. $4\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-8\frac{1}{6}\right).\frac{5}{8}$. **85.** $8\frac{1}{4}.\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-2\right)\left(+\frac{1}{3}\right)$.

86. $(a^3)^2$. **87.** $(a^n)^2$. **88.** $(a^n)^3$. **89.** $(a^3)^n$. **90.** $(a^2b^3)^n$. **91.** $(-a)^3$.

92. $(-a^n)^4$. **93.** $(-a^n)^5$. **94.** $(-a)^{2n}$. **95.** $(-a)^{2n+1}$. **96.** $[(-a^2)^4]^3$.

97. $y.y^{n-2}.y$. **98.** $a^x.a^{3x}.b^{4c}.a^{2x}.b^c$. **99.** $a^{m-n}.a^n.b^{2m-3n}.b^{4n-m}$.

100. $8c^2x^2 \times 4a^2c$. **101.** $5abcx(-7a^2cx^3)$. **102.** $(-18x^2y)(-12ay)$.

103. $(-ab)(+ab^2)(-a^2b)(-a^2b^2)$. **104.** $(4a^2x)(-5a^2x^2)(-x)$.

105. $(-xy)(ax)(-ay)(-5)$. **106.** $(-3x^2)(-4x^3)(-5x)(-1)$.

107. $3/_4\,a^2b.(-2/_5\,bc)$. **108.** $(-1/_2\,a^5mn)(-2/_3\,ab)(-1/_5\,bc).2am^3$.

109. $(-5a^2b)^3$. **110.** $(1/_3\,m^4n^2)^2$. **111.** $(-1/_2\,bc)^3$. **112.** $(8bn^3p)^4$.

113. $(-2a^3)^4+(-2a^4)^3-(-3a^6)^2-(-5a^2)^6-(-8a^4)^3$.

114. $(5anx)^{2c}.(2an)^{c+2}.(2nx)^{c-2}$. **115.** $(ab)^{x-2c}.(ac)^{5x-6c}.(bc)^{9x-10c}$.

116. $[(35a^5)^m]^n.[(7a^3)^m]^n$.

PRODOTTO DI UN POLINOMIO E DI UN MONOMIO.

Esempio 1°. $3ab^2xy^2(2a^2x^3-3b^3x+2a^2y^2+5xy) =$
$= 3ab^2xy^2.2a^2x^3 - 3ab^2xy^2.3b^3x + 3ab^2xy^2.2a^2y^2 + 3ab^2xy^2.5xy =$
$= 6a^3b^2x^4y^2 - 9ab^5x^2y^2 + 6a^3b^2xy^4 + 15ab^2x^2y^3$.

Esempio 2°. $\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-\frac{1}{4}a^2b+\frac{3}{5}ab^2-4ab\right)=$

$$=\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-\frac{1}{4}a^2b\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(+\frac{3}{5}ab^2\right)+\left(-\frac{2}{3}a^2b^3\right)\left(-4ab\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\right)a^4b^4-\left(\frac{2}{3}.\frac{3}{5}\right)a^3b^5+\left(\frac{2}{3}.4\right)a^3b^4=\frac{1}{6}a^4b^4-\frac{2}{5}a^3b^5+\frac{8}{3}a^3b^4.$$

Esempio 3°. $(3x^3+7x^2-2x+4).2a^2x =$
$= 3x^3.2a^2x + 7x^2.2a^2x - 2x.2a^2x + 4.2a^2x = 6a^2x^4 + 14a^2x^3 - 4a^2x^2 + 8a^2x$.

Esempio 4°. $\left(-2a^4x^3y^2+\frac{1}{3}a^2x^3y^3-\frac{3}{4}a\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=$

$$=(-2a^4x^3y^2)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)+\left(\frac{1}{3}a^2x^3y^3\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)+\left(-\frac{3}{4}a\right)\left(-\frac{3}{5}ax^2\right)=$$

$$=\left(2.\frac{3}{5}\right)a^5x^5y^2-\left(\frac{1}{3}.\frac{3}{5}\right)a^3x^5y^3+\left(\frac{3}{4}.\frac{3}{5}\right)a^2x^2=$$

$$=\frac{6}{5}a^5x^5y^2-\frac{1}{5}a^3x^5y^3+\frac{9}{20}a^2x^2.$$

---

* Quando gli esponenti sono letterali, si applichino le regole esattamente come se gli esponenti fossero numeri scritti nel sistema decimale.

117. $(-8abc^2)(14a^2b-3a^2c-2b^2c+4b^2c^2)$.
118. $3abcd(4a^2bc-3ab^2d+7bc^2d-8bcd^2)$.
119. $(-4a^2bx^2y)(11a^2x^3-4b^3x+5a^2y^3-3b^3y)$.
120. $(-9a^2xy)(-6a^2x^2y+4ax^2y^2-7a^2xy^2)$.
121. $\frac{4}{5}a^3bc\left(\frac{3}{5}a^3b^2-\frac{7}{4}a^6b^3-\frac{2}{3}a^2b\right)$.
122. $-a+b-c$ si moltiplichi per a.
123. $a+3b-4c$ si moltiplichi per $-2a$.
124. a^3+3a^2+4a si moltiplichi per $-{}^1/_2a$.
125. $3a^3-5a^2-6a+7$ si moltiplichi per $-3a^2$.

RIDUZIONE DEI TERMINI SIMILI.

Si faccia la riduzione dei termini simili nei seguenti polinomi: *

126. $a^3b^5-2a^2b^6+2ab^7-3a^3b^5+4a^2b^6-b^8$.
127. $-3ab^7+5a^2b^6-4b^8-7a^4b^4-3ab^7+2b^8$.
128. $-5a^4b^4-3a^2b^6+4ab^7+11a^4b^4$. 129. $4a-5b+2c-a+3a-7b+2c+a$.
130. $8a^2b-5ab^2-4a^2b-ab^2+c$. 131. $a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab+a^2-b^2$.
132. $4a^3+2a^2b-3ab^2-4a^3+6a^2b+2ab^2+a^3-7a^2b+6ab^2$.
133. $a^2-\frac{ab}{4}+b^2-\frac{a^2}{4}+ab+b^2-a^2+ab-\frac{b^2}{4}$. **
134. $\frac{3}{4}a^2+a^2b^2+\frac{4}{5}a^2-3a^2b^2-\frac{a^2}{10}+7a^2b^2$.
135. $6a^2-4a+3b-4+12a^2-3a+b-1$.
136. ${}^3/_4a^2b^3c^4-{}^4/_5a^3b^2c-{}^4/_3a^2b^3c^4+{}^2/_5a^3b^2c+{}^2/_5a^3b^2c$.

Dovendo sommare o sottrarre o moltiplicare fra loro i polinomi, è utile far prima in ciascuno di essi la riduzione dei termini simili. Poi è spesso utile dare all'operazione una disposizione simile a quella che si dà in Aritmetica, come si vede nei seguenti esempi.

---

* Conviene abituarsi a far sempre in ogni polinomio la riduzione dei termini simili. Ciò facilita e semplifica molto i calcoli che poi si hanno da eseguire sui polinomi stessi. È pure bene abituarsi a fare questa riduzione *a memoria* scrivendone direttamente il risultato. Ciò riesce più facile se, fissato il 1° termine, si scorrono coll'occhio tutti gli altri, sottolineando i termini simili a quello considerato, e facendone contemporaneamente la riduzione. Poi si fa il medesimo col 1° termine che non è stato sottolineato, e così di seguito finchè siano sottolineati tutti i termini. Sottolineando similmente i termini simili, e diversamente i termini non simili, si potrà con facilità evitare le omissioni, e verificare, quando occorra, l'esattezza del risultato.

** È la stessa cosa scrivere p.e. $\frac{a}{4}$ oppure $\frac{1}{4}a$; così pure scrivere $\frac{3}{4}a^2b$ oppure $\frac{3a^2b}{4}$; scrivere $\frac{14}{3}a^2b$, oppure $\frac{14a^2b}{3}$, oppure $4\frac{2}{3}a^2b$. Giova ricordare che, per convenzione, è p.e. $4\,{}^1/_3=4+{}^1/_3$; e che $4\,{}^1/_3$ si considera come un numero solo, e non come la somma indicata di due numeri. Perciò sarà p.e $4\,{}^1/_3a^2b=(4\,{}^1/_3)a^2b=(4+{}^1/_3)a^2b$, e non eguale a $4+({}^1/_3a^2b)$. Analogamente per gli altri casi.

Esempio 1°.

Si sommino i polinomi: $5a^3b^2-8a^2b+6b^2-5$; $-3a^3b^2-2a^2b+7-b^2$; $2a^2b-6a^3b^2+1$. In ciascuno di essi non vi sono termini simili da ridurre. Scriveremo i polinomi in modo che i termini simili siano in colonna.

	$5a^3b^2-8a^2b+6b^2-5$
	$-3a^3b^2-2a^2b-b^2+7$
	$-6a^3b^2+2a^2b\quad+1$
Somma *(colla riduzione eseguita dei termini simili)*	$-4a^3b^2-8a^2b+5b^2+3.$

Esempio 2°.

Da $4xy^2-5xy+2y^2-1$ *si sottragga* $3xy+5-7xy^2+y^2$. Scriveremo i termini del sottraendo, col segno cambiato, in colonna coi termini del minuendo. Dopo ciò rimarrà a fare solamente la riduzione dei termini simili.

Minuendo	$+4xy^2-5xy+2y^2-1$
Sottraendo coi segni cambiati	$+7xy^2-3xy-y^2-5$
Resto *(colla riduzione eseguita dei termini simili)*	$+11xy^2-8xy+y^2-6.$

Esempio 3°.

Moltiplicando		$2a^3-3a^2b+5ab^2-2b^3$	
Moltiplicatore		$3a^2+2ab-b^2$	
Prod. del molt.do per	$3a^2$	$6a^5-9a^4b+15a^3b^2-6a^2b^3$	prodotto prima della riduzione dei termini simili *
» » »	$+2ab$	$+4a^4b-6a^3b^2+10a^2b^3-4ab^4$	
» » »	$-b^2$	$-2a^3b^2+3a^2b^3-5ab^4+2b^5$	
Prodotto totale ridotto		$6a^5-5a^4b+7a^3b^2+7a^2b^3-9ab^4+2b^5.$	

Esempio 4°.

Moltiplicando		$2a^3x+3a^2x^2-2x^4$
Moltiplicatore		$5a^3x-2ax^3+3x^4$
Prod. del molt.do per	$5a^3x$	$10a^6x^2+15a^5x^3\quad-10a^3x^5$
» »	$-2ax^3$	$-4a^4x^4-6a^3x^5\quad+4ax^7$
» »	$+3x^4$	$+6a^3x^5+9a^2x^6\quad-6x^8$
Prodotto totale ridotto		$10a^6x^2+15a^5x^3-4a^4x^4-10a^3x^5+9a^2x^6+4ax^7-6x^8.$

Esempio 5°.

Moltiplicando		$x^4y+x^3y^2-xy^4-y^5$
Moltiplicatore		$x^3y-x^2y^2+xy^3$
Prodotto del molt.do per	x^3y	$x^7y^2+x^6y^3\quad-x^4y^5-x^3y^6$
» »	$-x^2y^2$	$-x^6y^3-x^5y^4\quad+x^3y^6+x^2y^7$
» »	$+xy^3$	$+x^5y^4+x^4y^5\quad-x^2y^7-xy^8$
Prodotto totale ridotto		$x^7y^2\quad-xy^8.$

* Se i termini simili dei prodotti parziali si scrivono in colonna, resta facilitata la riduzione dei termini simili del prodotto.

Adottando la disposizione indicata, si eseguiscano le seguenti operazioni:

137. $(5ax-3by+4cz)+(-2ax+4by-3cz)+(-ax+7by-cz)+(9ax-11by)$.
138. $(5x^3-2x+y-15+y^2)+(3x^3+4y-y^2+xy-x^2)+(4x^3-3xy)+(1-2xy)$.
139. $(x^3+2x^2y-4xy^2+5y^3)+(7x^3-12x^2y+15xy^2-13y^3)+$
$+(-4x^3+5x^2y-7xy^2+9y^3)+(-2x^3+11x^2y-12xy^2+3y^3)$.
140. $(12a^5b^3-5a^4b^2-8a^3b^4)+(-7a^5b^3+8a^4b^2+5a^3b^4)+(-15a^5b^3+12a^4b^2)$.
141. $(7a^2-4abx+2b^2x^2)+(6a^2+3abx-4b^2x^2)+(-8a^2-7abx+3b^2x^2)$.
142. $(a^3-{}^3/_4a^2x+{}^1/_3ax^2-{}^5/_8x^3)+(a^3+{}^1/_2a^2x+{}^1/_4ax^2+{}^2/_3x^3)$.
143. $(x^2-11x+7)+(5x^2+x-9)+(4x^2+3x+5)+(-4x^2+3x+9)$.
144. Da $5a-3b+4c-d$ si sottragga $3a-7b+2c+7d$.
145. » $3a^2-2ab+b^2-3c^2$ » $a^2-5ab+3b^2-2c^2$.
146. » $4m^2-6mn+n^2+7$ » $2m^2+4mn+6n^2+4$.
147. » $7x^3+2x^2-5x+4$ » $5x^3+6x^2-2x-6$.
148. » $5x^2-10xy+5y^2-7$ » $4x^2-8xy+4y^2-9$.
149. » $3x^2y-3xy^2+y^3+3d$ » $x^2y+2xy^2+3y^3+4d$.
150. » ${}^3/_4a^3b^2+{}^5/_6a^2b+8{}^1/_2ab$ » ${}^2/_3a^2b-{}^5/_6a^3b^2+{}^4/_9ab$.
151. » ${}^1/_2a^2x+{}^1/_4ax^2+{}^2/_3x^3$ » $-{}^3/_4a^2x+{}^1/_3ax^2-{}^5/_8x^3$.
152. Dal 1° dei quattro polinomi seguenti si tolga la somma degli altri tre. *

$5a^2-3ab+b^2-3ac+2bc-2c^2$ $\qquad 2a^2+5ab-3b^2+2ac-4bc+3c^2$
$4a^2-7ab+5b^2-4ac-5bc+c^2$ $\qquad 2a^2+9ab-8b^2+3ac+3bc+2c^2$.

153. Dalla somma dei due primi polinomi dell'esercizio precedente si tolga la somma degli altri due.
154. Dalla somma del 1° e del 3° dei quattro polinomi dell'esercizio 152 si tolga la somma degli altri due.
155. $(a^3b^3-a^2b^4+ab^5)(a^2b^2+ab^3)$. **156.** $(a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5)(a^5b^2-a^7)$.
157. $(2a^3b^2-6a^2b^3+6ab^4-2b^5)(3a^2b^2-6ab^3+3b^4)$.
158. $(2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)(x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4)$.
159. $(5a^4b^3-15a^3b^4+15a^2b^5-5ab^6)(4a^3b+12a^2b^2+12ab^3+4b^4)$.
160. $(a+x)(a+2x)(a+3x)(a+4x)$. **
161. $(2a+x)(3a+2x)(4a+3x)(5a+4x)$.
162. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$. *** **163.** $(a^m+b^n)(a^n-b^m)$.
164. $(a^m+b^p-2c^n)(2a^m-3b)$.

PRODOTTI NOTEVOLI.

Facendo uso dei teoremi sui prodotti notevoli, si eseguiscano le seguenti operazioni:

165. $(3a-2b^2c)(3a+2b^2c)$. **166.** $(4a^2n-3abn^2)^2$. **167.** $({}^1/_3ab^2+2a^3bc)^2$.
168. $\left(\frac{4}{5}ab-xy\right)^2$. **169.** $(b-8ab^2cd)^2$. **170.** $\left(1+\frac{1}{3}a^3nx^2\right)^2$.
171. $(2a-3bc)^3$. **172.** $(2ab+4bc^2)^3$. **173.** $(3m-2m^3n^4)^3$.
174. $\left(a+\frac{1}{2}xy^2\right)^3$. **175.** $\left(1+\frac{1}{3}a\right)^3$. **176.** $\left(\frac{3}{4}b^2c-\frac{1}{2}m^2x\right)^3$.

---

* Basta cambiare il segno a tutti i termini dei polinomi sottraendi.
** Si moltiplica il 1° polinomio per il 2°; il prodotto ottenuto per il 3°; e così di seguito.
*** Si applica la regola esattamente come se gli esponenti fossero numeri scritti nel sistema decimale.

Si semplifichino le seguenti espressioni: *

177. $(a^2-ab+b^2)^2+(a^2+ab-b^2)^2-(a^2-ab+b^2)(a^2+ab-b^2)$.
178. $(x^3-3x^2+3x-1)^2-(x-1)^2(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)$.
179. $(ab-b^2)^2(a^2-ab)^2-(a-b)^4$.
180. $(a-b)^3+(a-c)^3+(b-c)^3-3(a-b)(a-c)(b-c)$.
181. $(a^2b-ab^2)^3-(ab^2-b^3)^3+(b^3-a^3)^3$.
182. $(3ab-2b^2)^3+(2b^2-3a^2)^3+(3a^2-2ab)^3$.
183. $(x-{}^1/_2)^2(x+1)-(x+{}^1/_2)(x-1)^2+(x+2)^3$.
184. $(2x-1)^3-6(2x-1)^2x+12(2x-1)x^2-24x^3$.

Si verifichino le seguenti eguaglianze: **

185. $(a-b)(b-c)(c-a)=bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$.
186. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=(2a)^2$.
187. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.
188. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a-b)^2(a+b)+3(a+b)^2(a-b)=(2a)^3$.
189. $(x^2+py^2)(z^2+pu^2)=(xz+pyu)^2+p(yz-xu)^2$.
190. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$.
191. $x^2+2(x-1)(y-1)+y^2=(x+y-2)^2+2(x+y-1)$.
192. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$.
193. $(a^2+b^2)^4=[4ab(a^2-b^2)]^2+[(a^2-b^2)^2-4a^2b^2]^2$. ***

Divisione.

DIVISIONE DEI MONOMI.

194. $4x^2y^3:2xy^2$. **195.** $6x^3y^2z:3xy^2$. **196.** $x^3y^2z:xyz$.
197. $5x^4y^3:(-x^2y)$. **198.** $(-8x^5yz^4):4x^4y$. **199.** $12x:(-4)$.
200. $(-21x^2y^3z):(-3xy^3)$. **201.** ${}^2/_3a^2m^3n:(-{}^1/_3amn)$.
202. $-{}^4/_5a^3bc^2:(-{}^2/_5abc)$.

MASSIMO COMUN DIVISORE E MINIMO COMUN MULTIPLO DEI MONOMI.

Si trovi il *M.C.D.* ed il *m.c.m.* di ciascuno dei seguenti gruppi di monomi:
203. $7a^3b^4c^2d$, $11a^4b^3cd^2$, $3a^3b^4d^2e$, $9a^5b^2c^3e^2$.
204. $4a^4b^4c^4$, $3a^6b^5c^4d^3$, $2a^4b^5c^6d^7$. **205.** $16x^4y^3z^2$, $24x^4y^6z^3$, $32x^2y^2z^5$.
206. $30x^7y^2z^4$, $45x^6y^4z^3$, $60x^5y^5z^5$, $90x^4y^6z^7$.

DIVISIONE DI UN POLINOMIO PER UN MONOMIO.

207. $(x^2+xy):x$. **208.** $(4xy^2-6x^2y):2xy$.
209. $(16a^2b^3x-8a^3cx^2-16axy^3+24a^2x^2y^2):2ax$.
210. $(4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7):4ax$.
211. $(60x^3y^3z^2-48x^2y^4z^2+36x^2y^2z^4):4xyz^2$.
212. $(15a^4b-12a^3b^2-9a^3b^3+6a^4b^2):3ab$.
213. $(8a^4b^2-6a^3b^3+4a^2b^4-2a^2b^2):(-2a^2b^2)$.
214. $(-112xy^3+24x^2y^2-8x^3y):(-4xy)$.

---

* *Semplificare un'espressione* significa eseguire tutte le operazioni indicate, e fare tutte le possibili riduzioni di termini simili.

** Per verificare un'eguaglianza, basta eseguire tutte le operazioni indicate, e tutte le possibili riduzioni su ciascuno dei due membri dell'eguaglianza. Se l'eguaglianza è vera, le due espressioni che così si ottengono devono essere identiche.

*** Si eleva alla 4ª potenza elevando due volte, successivamente, al quadrato.

215. $\left(\frac{1}{2}a^3b^2-\frac{1}{3}a^2b^3+\frac{1}{4}ab^4\right):\frac{3}{4}ab^2.$

216. $(x^{m+2}y^n+2x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}):x^my^n.$ *

SUL METTERE IN EVIDENZA UN FATTORE.

217. In $65a^2bc+70ab^2c-75abc^2$ si metta in evidenza il fattore $5ab$.

218. In $-60a^2bx^2y+56ab^2xy^2-52ab^2x^2y$ si metta in evidenza il fatt. $2xy$.

219. In $-44a^4bx^5y+16a^2b^4x^3y-20a^4bx^2y^4$ » » $-a^2x^2$.

220. In $54a^4x^3y^2-36a^2x^3y^3+63a^4x^2y^3$ » » $-9axy$.

221. In $15a^2b^3c-9a^2b+6abc$ » » $3ab$.

222. In $2m^3n^4p+5mnp^2-7m^3n^2p^4$ » » $-mnp$.

In ciascuno dei seguenti polinomi si metta in evidenza il *M.C.D.* dei termini dei polinomi:

223. $25a^2+30a^4-35a^6$. **224.** $12x^2y-18xy^2+24xy$.

225. $24a^2b^3c^5d^6-6a^4b^2c^7d^9-36a^3b^2c^9d^{11}-6a^2b^2c^2d^2$.

226. $21m^3n^2p^2-15m^2n^3p^2+9m^2n^2p^3-m^2n^2p^2$.

227. $84x^5y^4-108x^4y^5+420x^6y^3-228x^7y^6$.

228. $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5$.

229. $-44ax^n+286a^2x^{n+1}-66a^3x^{n+2}$. **230.** $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$.

Si mette talora in evidenza un monomio il quale non divide tutti i termini del polinomio. In questi casi, si introducono monomi che non sono interi.

Esempio 1º. *Nel polinomio* $15a^2bc-12ab^2c^4+7abc-20a^2b^3c$ *si metta in evidenza il fattore* $3ab^2c$.

Si avrà: $3ab^2c\left(\frac{15a^2bc}{3ab^2c}-\frac{12ab^2c^4}{3ab^2c}+\frac{7abc}{3ab^2c}-\frac{20a^2b^3c}{3ab^2c}\right)=$

$=3ab^2c\left(\frac{5a}{b}-4c^3+\frac{7}{3b}-\frac{20}{3}ab\right).$

Esempio 2º. *Nel polinomio* $17x^4y^3z^2-12xy^2z^3-10x^2yz^2$ *si metta in evidenza il fattore* $-4xyz^2$.

Si avrà: $-4xyz^2\left(-\frac{17x^4y^3z^2}{4xyz^2}+\frac{12xy^2z^3}{4xyz^2}+\frac{10x^2yz^2}{4xyz^2}\right)=$

$=-4xyz^2\left(-\frac{17}{4}x^3y^2+3yz+\frac{5}{2}x\right).$

231. In $a^3x^3y-3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-b^3xy^3$ si metta in evidenza $-abxy$.

232. In $60a^3b^3c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^2c^4-20abc^6$ si metta in evidenza $4a^2b^2c^2$.

233. In $2a^2b^2-3ab^3+4a^3b-b^4$ si metta in evidenza $-3ab^3$.

234. In $-3x^4y+5x^3y^2-6x^2y^3-xy^4+4y^5$ si metta in evidenza $-2x^2y^3$.

235. In $4m^5n^2+{}^2/_9m^4n^5-{}^6/_7m^3n^6$ si metta in evidenza ${}^2/_3m^3n^4$.

SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI IN FATTORI. **

REGOLA 1ª. (§ 79).

Esempio 1º. $12a^2b^2m^3+4a^2b^2m^2n+8a^2b^2mp=4a^2b^2m(3m^2+mn+2p)$.

---

* Si opera sugli esponenti letterali come se fossero numeri scritti nel sistema decimale.

** Negli esempi che risolveremo, indicheremo (come negli esempi precedenti) molti passaggi assai facili. Lo faremo per rendere famigliare all'alunno l'uso dei teoremi e delle regole precedenti. È però bene che l'allievo si abitui a fare *a memoria* il maggior numero possibile di operazioni, pervenendo al risultato finale più rapidamente che gli sarà possibile.

Esempio 2°. $\frac{14}{3}a^3b^2m-\frac{2}{3}a^2b+\frac{10}{3}a^3bmn=\frac{2}{3}a^2b(7abm-1+5amn)$.

236. $py+qy-ry$. **237.** $ap+mp+np-pq-p+p^2$.

238. $11x+nx-mx+x+(m-1)x+x^2$.

239. $(3p-2q)(x-y)+(5p+3q)(x-y)$.

240. $(x+y)(x-y)+(x-y)^2$. **241.** $25a^2+30a^4-35a^6$.

242. $24a^2b^3c^5d^6-6a^4b^2c^7d^9-36a^3b^2c^9d^{11}-6a^2b^2c^2d^2$.

REGOLA 2ª. (§ 80). ***Esempi:***

1°. $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

2°. $a^8-b^8=(a^4)^2-(b^4)^2=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

3°. $a^4-1=a^4-1^4=(a^2+1^2)(a^2-1^2)=(a^2+1)(a+1)(a-1)$.

4°. $(3a+2b)^2-16c^2=(3a+2b)^2-(4c)^2=(3a+2b+4c)(3a+2b-4c)$.

5°. $75a^5b^7xy-27abx^7y^9$. Mettendo in evidenza il *M.C.D.* che è $3abxy$, si ottiene:

$$75a^5b^7xy-27abx^7y^9=3abxy(25a^4b^6-9x^6y^8)=3abxy[(5a^2b^3)^2-(3x^3y^4)^2]=$$
$$=3abxy(5a^2b^3+3x^3y^4)(5a^2b^3-3x^3y^4).$$

6°. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=$
$$=[(a^2+ab+b^2)+(a^2-ab+b^2)][(a^2+ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)]=$$
$$=(a^2+ab+b^2+a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2-a^2+ab-b^2)=$$
$$=(2a^2+2b^2)2ab=4ab(a^2+b^2).$$

7°. $8m^3-125n^3=(2m)^3-(5n)^3=(2m-5n)[(2m)^2+(2m)(5n)+(5n)^2]=$
$$=(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2).$$

8°. $128m^4x^8y^2-4m^4x^3y^7$. Mettendo in evidenza il *M.C.D.* che è $4m^4x^3y^2$, si ottiene:

$$128m^4x^8y^2-4m^4x^3y^7=4m^4x^3y^2(32x^5-y^5)=4m^4x^3y^2[(2x)^5-y^5]=$$
$$=4m^4x^3y^2(2x-y)[(2x)^4+(2x)^3y+(2x)^2y^2+(2x)y^3+y^4]=$$
$$=4m^4x^3y^2(2x-y)(16x^4+8x^3y+4x^2y^2+2xy^3+y^4).$$

9°. $x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3=(x^2-y^5)[(x^2)^2+x^2y^5+(y^5)^2]=$
$$=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

10°. $a^9-b^9=(a-b)(a^8+a^7b+a^6b^2+a^5b^3+a^4b^4+a^3b^5+a^2b^6+ab^7+b^8)$.

O meglio:

$$a^9-b^9=(a^3)^3-(b^3)^3=(a^3-b^3)[(a^3)^2+a^3b^3+(b^3)^2]=(a^3-b^3)(a^6+a^3b^3+b^6)=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6).$$

243. x^2-9. **244.** $4m^2-9n^2$. **245.** $5a^2-45m^2$. **246.** $a^2y^2-b^2z^2$.

247. a^2-4x^2. **248.** $16x^2y^2-81a^2b^2c^2$. **249.** $4a^3y^4-ab^2y^2z^2$.

250. $16m^2x^4-\frac{4}{25}c^6$. **251.** x^2-1. **252.** $1-z^2$. **253.** $x^2-\frac{1}{9}$.

254. $4a^4b^2-{}^9/_{25}$. **255.** x^4-81. **256.** x^4-16. **257.** a^6-b^6. **258.** a^6-64.

259. $(a+b)^2-(a-b)^2$. **260.** $(3a-4b)^2-25b^2$. **261.** $a^{6m}-b^4$.

262. $a^8b^{16}-x^{16}y^8$. **263.** $a^{2m}-b^{2n}$. **264.** ${}^1/_{25}-x^{4n}$. **265.** $a^{2m}-a^{2n}$.

266. $a^{4m}-a^{4n}$. **267.** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{y^2}$. **268.** $\frac{x^2}{4}-p^2$. **269.** $2a^5-32ab^4$.

270. $3m^2n-75m^4n$. **271.** $x^{5m}-9x^{3m}y^{4n}$. **272.** $a^{2m}b^{7n}-{}^4/_{25}b^n$.

273. $81a^4x^6-16x^2$. **274.** $\frac{16}{81}a^6-a^2$. **275.** $a^5b^5-x^5y^5$. **276.** $a^7x^7-y^7$

277. $m^9-n^{18}y^{18}$. **278.** a^5-1. **279.** $1-a^5$. **280.** $2abx^5-64abm^5n^5$

281. $\frac{8}{27}a^6b^3-\frac{1}{8}a^3$. **282.** $x^{32}-y^{32}$.

REGOLA 3ª. (§ 81).

Esempio 1º. $4x^4y^2-12x^3y^2+9x^2y^2$. Mettiamo in evidenza il $M.C.D.$ che è x^2y^2, ed avremo: $4x^4y^2-12x^3y^2+9x^2y^2=x^2y^2(4x^2-12x+9)=$ $=x^2y^2[(2x)^2-2(2x)3+3^2]=x^2y^2(2x-3)^2$.

Esempio 2º. $7a^3b^2+42a^2b^3+63ab^4$. Mettiamo in evidenza il $M.C.D.$ che è $7ab^2$, ed otterremo: $7a^3b^2+42a^2b^3+63ab^4=7ab^2(a^2+6ab+9b^2)=$ $=7ab^2[a^2+2.a(3b)+(3b)^2]=7ab^2(a+3b)^2$.

Esempio 3º. $x^2-y^2-2yz-z^2=x^2-(y^2+2yz+z^2)=x^2-(y+z)^2=$ $=[x+(y+z)][x-(y+z)]=(x+y+z)(x-y-z)$.

Osservazione. Come si vede dall'es. 3º, alcune volte, affinchè il polinomio dato si presenti sotto forma conveniente, conviene chiudere in parentesi alcuni suoi termini. In tali casi si ricordi la regola del § 37.

283. $a^2+2ab+b^2-c^2$. **284.** $a^2-2ab+b^2-c^2$. **285.** $x^2+2x+1-y^2$.
286. y^2-x^2+2x-1. **287.** $m^2-n^2+2np-p^2$. **288.** $m^2-n^2-2np-p^2$.
289. $9a^3-12a^2p+4ap^2$. **290.** $a^5p^2+6a^3p+9a$. **291.** a^3-2a^2+a.
292. $16a^4b^2+16a^2bc+4c^2$. **293.** $4a^4b^2c^2-12a^3b^3c+9a^2b^4$.
294. $45x^4y+150x^3y^3+125x^2y^5$. **295.** $\frac{4}{9}x^2y^2-\frac{1}{3}x^3y^3+\frac{1}{16}x^4y^4$.
296. $3a^2x^3y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xyz^2$.

REGOLA 4ª. (§ 82).

Esempio 1º. $81x^4y-81x^3y^2+27x^2y^3-3xy^4$. Mettendo in evidenza il $M.C.D.$ che è $3xy$, il polinomio diventa:

$$3xy(27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3)=3xy[(3x)^3-3(3x)^2y+3(3x)y^2-y^3]= \\ =3xy(3x-y)^3$$

Esempio 2º. $8+60a+150a^2+125a^3=2^3+3.2^2.(5a)+3.2.(5a)^2+(5a)^3=$ $=(2+5a)^3$.

Esempio 3º. $27m^3-27m^2+9m-1=(3m)^3-3(3m)^2.1+3.(3m).1^2-1^3=$ $=(3m-1)^3$.

297. $64a^6b^3+96a^4b^2c+48a^2bc^2+8c^3$.
298. $8a^6b^3c^3-36a^5b^4c^2+54a^4b^5c-27a^3b^6$.
299. $27x^5y+27x^4y^3+9x^3y^5+x^2y^7$. **300.** $a^3b^3+3a^2b^2xy+3abx^2y^2+x^3y^3$.
301. $\frac{8}{27}x^3y^3-\frac{2}{3}x^4y^4+\frac{1}{2}x^5y^5-\frac{1}{8}x^6y^6$.

REGOLA 5ª. (§ 83).

Esempio 1º. $m^2+(x+y)m+xy=m^2+mx+my+xy=$ $=m(m+x)+y(m+x)=(m+x)(m+y)$.

Esempio 2º. $a^5-a^4b-ab^4+b^5$. Mettendo in evidenza il $M.C.D.$ dei due primi termini che è a^4, ed il $M.C.D.$ dei due ultimi che è b^4, si ha:

$$a^5-a^4b-ab^4+b^5=a^4(a-b)-(ab^4-b^5)=a^4(a-b)-b^4(a-b)= \\ =(a-b)(a^4-b^4)=(a-b)(a^2+b^2)(a^2-b^2)= \\ =(a-b)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=(a^2+b^2)(a-b)^2(a+b).$$

Esempio 3º. $m^5+2m^4n+m^3n^2+m^2n^3+2mn^4+n^5$. Mettendo in evidenza il $M.C.D.$ dei primi tre termini che è m^3, ed il $M.C.D.$ degli altri termini che è n^3, il polinomio diventa:

$$m^3(m^2+2mn+n^2)+n^3(m^2+2mn+n^2)=(m^2+2mn+n^2)(m^3+n^3)= \\ =(m+n)^2(m^3+n^3)=(m+n)^2(m+n)(m^2-mn+n^2)=(m+n)^3(m^2-mn+n^2).$$

Esempio 4º. $21mx-35my-6nx+10ny$.

Si ha: $21mx-35my-6nx+10ny=(21mx-35my)-(6nx-10ny)$; e,

mettendo in evidenza il fattor comune $7m$ nei due primi termini, ed il fattor comune $2n$ negli altri due, si ha: $7m(3x-5y)-2n(3x-5y)=(7m-2n)(3x-5y)$.

302. $x^2+ax+bx+ab$. **303.** $x^2+(a-b)x-ab$. *

304. $a^4+a^3-a^2-a$. **305.** $(x-1)^4+(x-1)^3-(x-1)^2-(x-1)$. **

Talvolta un polinomio soddisferebbe alle condizioni richieste da qualcuna delle precedenti regole se avesse qualche termine di più, oppure se qualche suo termine avesse un coefficiente diverso da quello che ha. In tali casi, si può molte volte raggiungere lo scopo aggiungendo e togliendo al polinomio un termine opportunamente scelto.

Esempio 1°. *Si abbia* $a^4+a^2b^2+b^4$. Aggiungendo e togliendo a^2b^2, si ha:

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=[(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2]-(ab)^2=$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab).$$

Esempio 2°. $3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$. Il trinomio x^2+2x-3 non è un quadrato, ma i suoi due primi termini sono i due primi termini del trinomio x^2+2x+1, che è eguale a $(x+1)^2$. Al trinomio x^2+2x-3 aggiungiamo e togliamo 4, ed otterremo:

$$3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3+4-4)=3(x^2+2x+1-4)=3[(x+1)^2-2^2]=$$
$$=3[(x+1)+2][(x+1)-2]=3(x+3)(x-1).$$

306. $x^2+6x-16$ (si aggiunga e si tolga 25).

307. $m^2-8m+15$ (si aggiunga e si tolga 1).

308. $a^2-10ab+9b^2$ (si aggiunga e si tolga $16b^2$).

309. $8b^2-24bxy+16x^2y^2$ (si aggiunga e si tolga b^2).

310. $12a^2bc+3a^4b^2+9c^2$ (si aggiunga e si tolga a^4b^2).

311. $x^4-2x^2(y^2+z^2)+y^4-2y^2z^2$ (si aggiunga e si tolga z^4).

Frazioni

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE ALGEBRICA A PIÙ SEMPLICE ESPRESSIONE.

Esempio 1°. *Si riduca a più semplice espressione la frazione:* $\frac{20am^5n-12am^3n^2}{70am^4n^2-42am^2n^3}$. Mettendo in evidenza $2am^2n$ che è il *M.C.D.* del numeratore e del denominatore, e sopprimendolo, si ha: $\frac{2am^2n(10m^3-6mn)}{2am^2n(35m^2n-21n^2)}=\frac{10m^3-6mn}{35m^2n-21n^2}$. Mettendo ora in evidenza $2m$ che è il *M.C.D.* dei termini del numeratore, e $7n$ che è il *M.C.D.* dei termini del denominatore, si ha: $\frac{10m^3-6mn}{35m^2n-21n^2}=\frac{2m(5m^2-3n)}{7n(5m^2-3n)}$. E sopprimendo il fattore $5m^2-3n$ comune al numeratore ed al denominatore, si ha $\frac{2m}{7n}$ che è equivalente alla frazione data.

---

* Si cominci a togliere la parentesi.

** Questo esercizio non differisce dal precedente se non in questo che in luogo di a, vi è $x-1$

Esempio 2°. *Si riduca a più semplice espressione la frazione:* $\frac{(9a^2-6ab+b^2)(a^4-ab^3)}{(3a^2-ab)(a^2b+ab^2+b^3)(3ab-b^2)}$. Il 1° fattore del numeratore è eguale a $(3a-b)^2$. Se poi, nel 2° fattore, si mette in evidenza a, il numeratore diventa: $(3a-b)^2(a^3-b^3)a$. Osservando poi che è $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, il numeratore si può scrivere così: $(3a-b)(3a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)a$. Se nel denominatore si mette in evidenza a comune a tutti i termini del 1° fattore, e poi b comune ai termini del 2° e del 3° fattore, il denominatore si potrà scrivere così: $a(3a-b).b(a^2+ab+b^2).b(3a-b)$; e la frazione data prende la forma $\frac{(3a-b)(3a-b)(a-b)(a^2+ab+b^2)a}{a(3a-b)b(a^2+ab+b^2)b(3a-b)}$. Sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si ha infine $\frac{a-b}{b^2}$ che è equivalente alla frazione data.

Esempio 3°. *Si riduca a più semplice espressione la frazione:* $\frac{(6x-15y)m-2(4x-10y)n}{(12x^2-60xy+75y^2)(3m-4n)}$. Nel numeratore si può mettere in evidenza il fattore 3 comune a tutti i termini di $6x-15y$, e poi il fattore 2 comune ai termini di $4x-10y$; e si ottiene: $(2x-5y)3m-2(2x-5y)2n$. In questo polinomio si può mettere in evidenza il fattore $2x-5y$, ed allora si ottiene: $(2x-5y)(3m-4n)$, che è il numeratore della frazione data. Mettendo in evidenza 3 comune a tutti i termini del 1° fattore del denominatore, questo prenderà la forma $3(4x^2-20xy+25y^2)(3m-4n)$, ossia $3(2x-5y)^2(3m-4n)$. La frazione data si potrà scrivere così: $\frac{(2x-5y)(3m-4n)}{3(2x-5y)^2(3m-4n)}$. E sopprimendo i fattori comuni al numeratore e denominatore, si ottiene la frazione $\frac{1}{3(2x-5y)}$, che è equivalente alla frazione data.

Osservazione. Prima di eseguire qualsiasi calcolo sopra le frazioni, è sempre utile ridurle, se si può, a più semplice espressione.

312. $\frac{14a^2bc^2}{7abcd}$. **313.** $\frac{12acx^2}{4a^2c^2x}$. **314.** $\frac{-32x^2yz}{-64xyz^2}$. **315.** $\frac{25a^4b^3c^2}{5a^2b^4c^3d}$.

316. $\frac{ax^3-a^4}{2am+3an}$. **317.** $\frac{12x^2-2xy}{16x^2}$. **318.** $\frac{b+b^2}{a+ab}$. **319.** $\frac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}$.

320. $\frac{ax+x^2}{ab^2+b^2x}$. **321.** $\frac{14a^2-7ax}{10ay-5xy}$. **322.** $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2}$.

323. $\frac{3x^4y^3+9a^2x^2y^3}{4x^5y^2+12a^2x^3y^2}$. **324.** $\frac{a^2-2a+1}{a-1}$. **325.** $\frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$.

326. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$. **327.** $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2m^3}$. * **328.** $\frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2}$.

329. $\frac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$. **330.** $\frac{12a^5b^5-48a^3b^7}{16a^5b^5-32a^4b^6}$. **331.** $\frac{(a+b)^2.(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)^2}$.

332. $\frac{a^3-b^3}{(a+b)^2-ab}$. ** **333.** $\frac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3}{ab^3-a^3b}$. ***

---

* Si tolga prima la parentesi del numeratore.

** Si tolga prima la parentesi del denominatore.

*** Si veda la nota * § 81.

334. $\frac{(a^2+b^2-c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2+4abc}$. **335.** $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$.

336. $\frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$. * **337.** $\frac{35+5x+7y+xy}{5+y}$.

338. $\frac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$. **339.** $\frac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}$. **

RIDUZIONE DI PIÙ FRAZIONI AL MEDESIMO DENOMINATORE.

Esempio 1°. Si riducano al medesimo denominatore le frazioni: $\frac{3a^2b^3x}{5m^2np}$, $\frac{2a}{15mn^2p^2}$, $\frac{4abx}{25mnp^2}$. Il *m.c.m.* dei denominatori è $75m^2n^2p^2$; e questo potrà essere il denominatore comune cercato. Dividendo ora $75m^2n^2p^2$ per ciascuno dei denominatori delle frazioni, si ottiene rispettivamente: $15np$, $5m$, $3mn$. Moltiplicando il numeratore della 1ª frazione per $15np$, quello della 2ª per $5m$, e quello della 3ª per $3mn$, e dando ai prodotti il denominatore comune $75m^2n^2p^2$, si ottengono le frazioni $\frac{45a^2b^3npx}{75m^2n^2p^2}$, $\frac{10am}{75m^2n^2p^2}$, $\frac{12abmnx}{75m^2n^2p^2}$, rispettivamente equivalenti alle frazioni date.

Esempio 2°. Si riducano al medesimo denominatore le frazioni: $\frac{2a}{m+n}$, $\frac{5ab}{m^2-n^2}$, $\frac{1}{3m-3n}$. Ricordando (§ 80) che $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$, potremo scrivere le tre frazioni date così: $\frac{2a}{m+n}$, $\frac{5ab}{(m+n)(m-n)}$, $\frac{1}{3(m-n)}$. Il denominatore comune potrà essere $3(m+n)(m-n)=3(m^2-n^2)$. Dividendo questo denominatore comune per ciascuno dei denominatori dati, si ottiene rispettivamente $3(m-n)$, 3, $(m+n)$. Moltiplicando ora il numeratore della 1ª frazione per $3(m-n)$, quello della 2ª per 3, e quello della 3ª per $(m+n)$, e dando ai prodotti il denominatore comune $3(m^2-n^2)$, si ottengono le frazioni $\frac{6a(m-n)}{3(m^2-n^2)}$, $\frac{15ab}{3(m^2-n^2)}$, $\frac{m+n}{3(m^2-n^2)}$, equivalenti alle frazioni date.

Esempio 3°. Si riducano al medesimo denominatore le frazioni $\frac{x}{2x-2y}$, $\frac{6xy}{3x^3-6x^2y+3xy^2}$, $\frac{3x}{y-x}$. La 1ª frazione si può scrivere così: $\frac{x}{2(x-y)}$. Mettendo $3x$ a fattor comune nel denominatore della 2ª, questa si potrà scrivere così: $\frac{2.3x.y}{3x(x^2-2xy+y^2)}$; e sopprimendo il fattore $3x$ comune al numeratore ed al denominatore, si ha $\frac{2y}{x^2-2xy+y^2}$, ossia (§ 81) $\frac{2y}{(x-y)^2}$.

Cambiando il segno (§ 84, 2°) al numeratore ed al denominatore della 3ª frazione, essa diventa $\frac{-3x}{x-y}$. Le tre frazioni date si possono dunque scrivere così: $\frac{x}{2(x-y)}$, $\frac{2y}{(x-y)^2}$, $\frac{-3x}{x-y}$.

---

* Si faccia uso della regola 5ª § 83.

** Invece di $51ab$ si metta $30ab+21ab$.

Il *m.c.m.* dei denominatori è $2(x-y)^2$, e questo può essere il denominatore comune cercato. Dividendo $2(x-y)^2$ per $2(x-y)$, poi per $(x-y)^2$, poi per $x-y$, si ottengono rispettivamente i quoti $x-y$, 2, $2(x-y)$. Si moltiplica il numeratore di $\frac{x}{2(x-y)}$ per $x-y$, quello di $\frac{2y}{(x-y)^2}$ per 2, quello di $\frac{-3x}{x-y}$ per $2(x-y)$, ed ai prodotti ottenuti si dà per denominatore $2(x-y)^2$. Si ottengono così le frazioni $\frac{x(x-y)}{2(x-y)^2}$, $\frac{4y}{2(x-y)^2}$, $\frac{-6x(x-y)}{2(x-y)^2}$, rispettivamente equivalenti alle frazioni date.

340. $\frac{3a}{4b}$, $\frac{5a}{6c}$, $\frac{2c}{3b}$. **341.** $\frac{7b}{3a}$, $\frac{11ab}{12c}$, $\frac{5ac}{8b}$. **342.** $\frac{3a}{7x^2}$, $\frac{5b}{14y^2}$, $\frac{8ab}{21xy}$.

343. $\frac{a^2}{a+b}$, $\frac{ab}{a-b}$, $\frac{3a^2-2ab}{a^2-b^2}$. **344.** $\frac{ax}{a-x}$, $\frac{2a^2x^2}{a^2+ax+x^2}$, $\frac{2a^2+x^2}{a^3-x^3}$.

345. $\frac{a+1}{a-1}$, $\frac{a-1}{a+1}$, $\frac{a^2+1}{a^2-1}$, $\frac{a^2-1}{a^2+1}$.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI.

Avvertenze. *1ª.* Quando si hanno da eseguire calcoli con espressioni intere ed espressioni frazionarie, è sempre lecito dare alle espressioni intere per denominatore $+1$, e poi trattare le frazioni così ottenute come si trattano le altre frazioni. Ciò semplifica in molti casi le regole e le dimostrazioni intorno alle frazioni.

2ª. È utile ricordare che il tratto orizzontale della frazione tiene anche il posto di una parentesi. Perciò scrivere p.e. $a^2-\frac{3bc-d}{4m}$ è lo stesso che scrivere $a^2-\frac{(3bc-d)}{4m}$; e quindi si avrà p.e. $a^2-\frac{3bc-d}{4m}=\frac{4a^2m}{4m}-\frac{3bc-d}{4m}=$ $=\frac{4a^2m-(3bc-d)}{4m}=\frac{4a^2m-3bc+d}{4m}$. E non si potrà avere:

$$a^2-\frac{3bc-d}{4m}=\frac{4a^2m}{4m}-\frac{3bc-d}{4m}=\frac{4a^2m-3bc-d}{4m}.$$

3ª. In ogni calcolo con frazioni, conviene ridurre la frazione che dà il risultato finale alla più semplice espressione a cui si sa ridurre. È da notare che, secondo il diverso scopo cui essa deve servire, talvolta si considera come più semplice la frazione in cui il numeratore ed il denominatore sono ridotti sotto forma di prodotti di fattori; altre volte si considera come più semplice la frazione in cui il numeratore ed il denominatore sono polinomi.

Esempio 1º. $\frac{ab}{a-b}+\frac{2b^3}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a+b}$.

Riduciamo prima le frazioni al medesimo denominatore. Questo può essere a^2-b^2. Moltiplicando il numeratore ed il denominatore della 1ª per $a+b$, e quelli della 3ª per $a-b$, si ottiene l'espressione equivalente:

$$\frac{ab(a+b)}{a^2-b^2}+\frac{2b^3}{a^2-b^2}-\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab(a+b)+2b^3-ab(a-b)}{a^2-b^2}=$$

$=\frac{a^2b+ab^2+2b^3-a^2b+ab^2}{a^2-b^2}=\frac{2ab^2+2b^3}{a^2-b^2}$. Mettendo nel numeratore in evi-

denza il fattore $2b^2$, si ha: $\frac{2b^2(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2b^2(a+b)}{(a-b)(a+b)}$. E sopprimendo il fattore $a+b$ comune al numeratore ed al denominatore, si ha infine: $\frac{2b^2}{a-b}$ che è il risultato cercato.

Esempio 2°. $a+b-\frac{a^2-b^2}{a+2b}$.

L'espressione data si può scrivere così: $\frac{a+b}{1}-\frac{a^2-b^2}{a+2b}$. Prendiamo per denominatore comune $a+2b$, e moltiplichiamo ambi i termini di $\frac{a+b}{1}$ per $a+2b$, ed otterremo $\frac{(a+b)(a+2b)}{a+2b}-\frac{a^2-b^2}{a+2b}$, che è equivalente all'espressione data.

Facendo la somma algebrica dei numeratori, e dando ad essa il denominatore comune, si ha: $\frac{(a+b)(a+2b)-(a^2-b^2)}{a+2b}$. Eseguendo le operazioni indicate al numeratore, si ha: $\frac{a^2+ab+2ab+2b^2-a^2+b^2}{a+2b}=\frac{3ab+3b^2}{a+2b}$. E mettendo in evidenza il fattore $3b$ comune ai termini del numeratore, si ha: $\frac{3b(a+b)}{a+2b}$, che è il risultato cercato.

Esempio 3°. $\frac{3}{1-2x}-\frac{7}{1+2x}-\frac{4-20x}{4x^2-1}$.

Poichè il prodotto dei due primi denominatori è eguale a $1-4x^2$, cambiamo (§ 84, 2°) il segno ai due termini della 3ª frazione, ed otterremo: $\frac{3}{1-2x}-\frac{7}{1+2x}-\frac{20x-4}{1-4x^2}$.

Moltiplichiamo i due termini di $\frac{3}{1-2x}$ per $1+2x$; i due termini di $\frac{7}{1+2x}$ per $1-2x$, ed otterremo $\frac{3(1+2x)}{1-4x^2}-\frac{7(1-2x)}{1-4x^2}-\frac{20x-4}{1-4x^2}$. E facendo la somma algebrica dei numeratori, e dando al totale per denominatore $1-4x^2$, si ha: $\frac{3(1+2x)-7(1-2x)-(20x-4)}{1-4x^2}$. Eseguendo le operazioni indicate al numeratore, si ha successivamente: $\frac{3+6x-7+14x-20x+4}{1-4x^2}=$ $=\frac{20x-20x-4+4}{1-4x^2}=\frac{0}{1-4x^2}=0$ (osserv. 1ª § 68). L'espressione data è eguale a zero.

Esempio 4°. $\frac{bc}{(c-a)(a-b)}-\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}$.

Osservo anzitutto che nel denominatore della 1ª frazione vi è il fattore $a-b$, e nel denominatore della 2ª vi è il fattore $b-a$. Nella 2ª frazione cambio il segno (§ 84, 2°) al numeratore ed al denominatore. E, ricordando (teor. § 42) che per cambiare il segno al prodotto $(b-a)(b-c)$ basta cambiare il segno ad un fattore, p.e. a $b-a$, l'espressione data può scriversi:

$$\frac{bc}{(c-a)(a-b)}-\frac{-ac}{(a-b)(b-c)}+\frac{ab}{(b-c)(c-a)}.$$

Prendendo per denominatore comune il prodotto $(a-b)(b-c)(c-a)$, e moltiplicando i due termini della 1ª frazione per $b-c$, i due termini della 2ª per $c-a$, ed i due termini della 3ª per $a-b$, si ottiene:

$$\frac{bc(b-c)}{(c-a)(a-b)(b-c)}-\frac{-ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Facendo la somma algebrica dei numeratori e dandovi per denominatore il denominatore comune, si ottiene: $\frac{bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Eseguendo le operazioni indicate al numeratore, si ottiene: $\frac{b^2c-bc^2+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. Al numeratore di questa frazione, aggiungiamo e togliamo abc; e cambiando l'ordine in cui sono scritti i termini del numeratore, la frazione prende la forma:

$$\frac{a^2b-abc-a^2c+ac^2-ab^2+b^2c+abc-bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Mettendo, nei primi quattro termini del numeratore, in evidenza il fattor comune a, e, negli altri quattro termini, il fattor comune $-b$, si ha: $\frac{a(ab-bc-ac+c^2)-b(ab-bc-ac+c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. E mettendo nel numeratore in evidenza il fattore $ab-bc-ac+c^2$, si ha: $\frac{(a-b)(ab-bc-ac+c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

Nel 2° fattore del numeratore mettiamo in evidenza il fattore b comune ai due primi termini, ed il fattore $-c$ comune ai due ultimi termini, ed otterremo: $\frac{(a-b)[b(a-c)-c(a-c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. E mettendo in evidenza il fattore $a-c$ nel numeratore, si ottiene: $\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$; ossia (sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore) $\frac{a-c}{c-a}$. E poichè in $a-c$ si può mettere in evidenza il fattore comune -1, si può scrivere: $a-c=-1(-a+c)=-1(c-a)$. E l'ultima frazione ottenuta si potrà scrivere così: $\frac{a-c}{c-a}=\frac{-1(c-a)}{c-a}$. E sopprimendo il fattore $c-a$ comune al numeratore ed al denominatore, si ottiene -1. Dunque l'espressione data è eguale a -1.

346. $\frac{a}{5}+\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}+\frac{2a}{5}$. **347.** $\frac{2a}{3x}-\frac{3a}{4x}-\frac{5a}{6x}-\frac{7a}{12x}$.

348. $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{3}$. **349.** $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$. **350.** $n+\frac{1}{1+n}+\frac{1+n^2}{1-n}$.

351. $\frac{2a}{a+x}+\frac{3x}{a-x}+\frac{3x^2+a^2}{a^2-x^2}$. **352.** $\frac{9x+7}{5}+\frac{6x+5}{4}+\frac{9x-8}{8}$.

353. $\frac{4x-5}{7}+\frac{2x+6}{9}+\frac{4x+8}{11}$. **354.** $3b-\frac{ab+b^2}{2a}$. **355.** $7x-\frac{3ax-x^2}{3a-x}$.

356. $a+b-\frac{a^2-4b^2}{a+2b}$. **357.** $a+x-\frac{2ax-x^2}{a+x}$. **358.** $1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$.

359. $1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}$. **360.** $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. **361.** $1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

362. $\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}$. **363.** $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\frac{x}{x-1}$. **364.** $\frac{ax}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}$.

365. $\frac{ax-a}{x+1}-\frac{ax+a}{x-1}$. **366.** $\frac{3a}{(a-2x)^2}+\frac{2a+x}{(a+x)(a-2x)}-\frac{5}{a+x}$.

367. $\frac{2ax+x^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2+5ax}{(a+x)^2}-\frac{x}{a-x}$. **368.** $\frac{5}{1+5a}-\frac{3}{1-a5}+\frac{10(5a^2+2a)}{1-25a^2}$.

369. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2}$.

370. $\frac{3a-6b}{a+b}-\frac{5a-6b}{a-b}-\frac{4a-5b}{a+b}+\frac{7a-8b}{a-b}$. *

371. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

372. $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

Esempio 1°. $\left(m-\frac{n^2}{m}\right)\left(n+\frac{m^2}{n}\right)$.

Riduciamo prima in una sola frazione ciascuno dei due fattori, ed avremo successivamente:

$$\left(m-\frac{n^2}{m}\right)\left(n+\frac{m^2}{n}\right)=\left(\frac{m}{1}-\frac{n^2}{m}\right)\left(\frac{n}{1}+\frac{m^2}{n}\right)=\left(\frac{m^2}{m}-\frac{n^2}{m}\right)\left(\frac{n^2}{n}+\frac{m^2}{n}\right)=$$
$$=\frac{m^2-n^2}{m}\cdot\frac{n^2+m^2}{n}.$$

Eseguendo la moltiplicazione secondo la regola, e ricordando che (teor. 1° § 58) è: $(m^2-n^2)(m^2+n^2)=m^4-n^4$, si ha: $\frac{m^2-n^2}{m}\cdot\frac{m^2+n^2}{n}=\frac{m^4-n^4}{mn}$, che è il risultato cercato.

Esempio 2°. $\left(x+\frac{xy}{x-y}\right)\left(y-\frac{xy}{x+y}\right)$.

Riducendo prima in una sola frazione ciascuno dei due fattori, si ha: $\left(\frac{x(x-y)}{x-y}+\frac{xy}{x-y}\right)\left(\frac{y(x+y)}{x+y}-\frac{xy}{x+y}\right)=\frac{x(x-y)+xy}{x-y}\cdot\frac{y(x+y)-xy}{x+y}$. Ed eseguendo le operazioni indicate nei numeratori, si ha: $\frac{x^2-xy+xy}{x-y}\cdot\frac{xy+y^2-xy}{x+y}=\frac{x^2}{x-y}\cdot\frac{y^2}{x+y}=\frac{x^2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$. Questo è il risultato cercato.

Esempio 3°. $\frac{2}{7c}-\frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{7c}-a-b\right)$.

Si potrebbe cominciare dal ridurre in una sola frazione l'espressione chiusa in parentesi, e poi eseguire le operazioni indicate. Ma ci è più comodo trascrivere così l'espressione data: $\frac{2}{7c}-\frac{2}{a+b}\left[\frac{a+b}{7c}-(a+b)\right]$. E togliendo la pa-

---

* Il risultato si trova più presto se si comincia a riunire insieme le frazioni aventi il medesimo denominatore.

rentesi quadra (corollario 1° del § 54), si ottiene l'espressione equivalente: $\frac{2}{7c}-\frac{2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{7c}+\frac{2}{a+b}\cdot(a+b)$. E sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si ha: $\frac{2}{7c}-\frac{2}{7c}+2=2$, che è il risultato cercato.

Esempio 4°. $1-\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}+\frac{a-b}{a+b}\right)$.

Ci è più comodo moltiplicare prima $\frac{a+b}{a-b}$ per ciascuno dei termini chiusi entro le parentesi, e poi eseguire le operazioni indicate. Così facendo, avremo: $1-\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{a+b}$. E sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore di ciascuna espressione frazionaria, si ha: $1-\frac{a}{a-b}+\frac{a+b}{a}-1=-\frac{a}{a-b}+\frac{a+b}{a}$. E riducendo queste due frazioni al medesimo denominatore e sommandole, si ha: $-\frac{a^2}{a(a-b)}+\frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=$ $=\frac{-a^2+(a+b)(a-b)}{a(a-b)}=\frac{-a^2+a^2-b^2}{a(a-b)}=\frac{-b^2}{a(a-b)}=-\frac{b^2}{a(a-b)}$, che è il risultato cercato.

Esempio 5°. $\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{3am}{4bn}\cdot\frac{bc+bm}{a^2+am}\cdot\frac{a^2-m^2}{c^2-m^2}$.

Mettendo in evidenza i fattori b ed a, la 3ª frazione si potrà scrivere così: $\frac{b(c+m)}{a(a+m)}$. La 4ª frazione poi si può scrivere così: $\frac{(a+m)(a-m)}{(c+m)(c-m)}$; e l'espressione data prende la forma: $\frac{c-m}{a-m}\cdot\frac{3am}{4bn}\cdot\frac{b(c+m)}{a(a+m)}\cdot\frac{(a+m)(a-m)}{(c+m)(c-m)}$. E sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, si ottiene: $\frac{3m}{4n}$, che è il risultato cercato.

Esempio 6°. $\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^m\cdot\left(\frac{z-t}{r+s}\right)^m\cdot\left(\frac{a-b}{xy}\right)^m\cdot\left(\frac{r+s}{z-t}\right)^m$.

Poichè i fattori sono elevati tutti alla medesima potenza, ci è comodo applicare il teor. 3° del § 46, ed avremo:

$$\left(\frac{x+y}{a-b}\right)^m\cdot\left(\frac{z-t}{r+s}\right)^m\cdot\left(\frac{a-b}{xy}\right)^m\cdot\left(\frac{r+s}{z-t}\right)^m=\left(\frac{x+y}{a-b}\cdot\frac{z-t}{r+s}\cdot\frac{a-b}{xy}\cdot\frac{r+s}{z-t}\right)^m=$$

$$=\left\{\frac{(x+y)(z-t)(a-b)(r+s)}{(a-b)(r+s)xy(z-t)}\right\}^m.$$

E sopprimendo i fattori comuni al numeratore e denominatore, si ottiene $\left(\frac{x+y}{xy}\right)^m$, che si può scrivere così: $\frac{(x+y)^m}{x^my^m}$ od anche così: $\frac{1}{x^my^m}(x+y)^m$. Questo è il risultato cercato.

Osservazione. Facciano bene attenzione i principianti a non scrivere $(x+y)^m=x^m+y^m$. Per comprendere la profonda differenza che passa fra $(x+y)^m$ ed x^m+y^m, basta che ricordino che è p.e. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, e non $(x+y)^2=x^2+y^2$. Similmente che è $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, e non $(x+y)^3=x^3+y^3$.

Le potenze dei binomi o dei polinomi non contemplate nei teoremi dei §§ 60, 61, 62, 63, 64, si indichino come si è detto nel § 43, senza dar loro altra forma. Perciò si scriva semplicemente $(a+b)^5$, $(a-b)^m$, ecc.

Si ricordi ancora che quando gli esponenti sono letterali, si applicano le regole esattamente come se fossero numeri scritti nel sistema decimale.

373. $\frac{2x}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{8}$. **374.** $\frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{6a}{x+1}$. **375.** $\frac{a^2-b^2}{a} \cdot \frac{1}{a+b}$.

376. $\frac{15x-30}{2x} \cdot \frac{3x^2}{5x-10}$. **377.** $\frac{(x-1)^2}{y^3} \cdot \frac{(x+1)y^2}{x-1}$.

378. $\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)+1\right]\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)-1\right]$. **379.** $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$.

380. $\frac{a^2-x^2}{a} \cdot \frac{a^2+x^2}{ax}$. **381.** $\frac{a^2x^2}{y^2} \cdot \frac{xy}{a(x+y)} \cdot \frac{x^2-y^2}{axy}$.

382. $\frac{2a}{2b-c} \cdot \left(\frac{b+c}{3}-\frac{c}{2}\right)$. **383.** $\frac{a+x}{(m+n)^3} \cdot \frac{x^2-y^2}{12} \cdot \frac{(m+n)^2}{m-n} \cdot \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$.

384. $\frac{ax+x^2}{2b-cx} \cdot \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$. **385.** $\left(a^2-x+\frac{2x^2}{a^2+x}\right)(a^2+x)$.

386. $\left(1+x+\frac{3+x^3}{1-x}\right)\left(1-x^2\right)$. **387.** $\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$.

388. $(a^2-1)\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-1\right)$. **389.** $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)$.

390. $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)$. **391.** $\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$.

392. $\left[\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right] \cdot \frac{a-b}{2b}$.

393. $\frac{a^{8m-7n} \cdot b^{6p-5q}}{c^{4r-3s} \cdot d^{2t-n}} \cdot \frac{a^{9n-7m} \cdot b^{9q-3p}}{c^{r+9s} \cdot d^{5t+9n}}$. **394.** $\frac{m^{4a+b} \cdot m^{6a-3b}}{m^{2a-6b} \cdot m^{4a-7b}} \cdot \frac{m^{13b-7a}}{m^{14b-13a}}$.

395. $\frac{x^{m+3n} \cdot y^{7m-8n}}{x^{4m-7n} \cdot y^{3m-11n}} \cdot \frac{x^{2n-6n} \cdot y^{5m+6n}}{x^{6m-17n} \cdot y^{2m+4n}}$. **396.** $\frac{(2ab)^5 \cdot (3ab)^2 \cdot (5a)^4}{(3b)^3 \cdot (4ab)^6}$.

397. $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{5c}{6x}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2$. **398.** $\left(\frac{a+b}{z-x}\right)^m \cdot \left(\frac{z+x}{a+b}\right)^m \cdot \left(\frac{z-x}{a-b}\right)^m$.

399. $\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-b}{a+b}\right)^4$. **400.** $\frac{(2ab)^5 \cdot (3ab)^2 \cdot (5a)^4}{(3b)^3 \cdot (4ab)^5}$.

401. $\left(\frac{a^9b^{28}c^{47}}{d^{10}c^{29}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{d^9c^{26}}{a^8b^{25}c^{42}}\right)^{19}$. **402.** $\left(\frac{4x^n}{y^p}\right)^m \cdot \left(\frac{25y^{p+1}}{x^{n-1}}\right)^m$.

DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

Esempio 1º. $\frac{3m^2n-12mn^2}{4m+3n} : (m^2-4mn)$.

L'espressione si può immaginare scritta così: $\frac{3m^2n-12mn^2}{4m+3n} : \frac{m^2-4mn}{1}$; e questa (pel teor. § 89) è eguale a $\frac{3m^2n-12mn^2}{4m+3n} \cdot \frac{1}{m^2-4mn}$. Mettendo in evidenza il fattore $3mn$ nel numeratore della 1ª frazione, ed m nel denominatore della 2ª, si ha: $\frac{3mn(m-4n)}{4m+3n} \cdot \frac{1}{m(m-4n)}$. E sopprimendo i fattori

comuni al numeratore ed al denominatore, si ottiene $\frac{3n}{4m+3n}$, che è il risultato cercato.

Esempio 2°. $(x^2-y^2-z^2+2yz):\left(\frac{x+y-z}{x+y+z}\right)$.

Si ha: $(x^2-y^2-z^2+2yz):\left(\frac{x+y-z}{x+y+z}\right)=\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{1}:\frac{x+y-z}{x+y+z}=$ $=\frac{x^2-y^2-z^2+2yz}{1}\cdot\frac{x+y+z}{x+y-z}=\frac{x^2-(y^2+z^2-2yz)}{1}\cdot\frac{x+y+z}{x+y-z}$.

E (pel teor. 3° § 61) quest'espressione è eguale a $\frac{x^2-(y-z)^2}{1}\cdot\frac{x+y+z}{x+y-z}$. Pel teor. 1° § 58, è $x^2-(y-z)^2=[x+(y-z)][x-(y-z)]=(x+y-z)(x-y+z)$.

Cosicchè l'espressione prende la forma $\frac{(x+y-z)(x-y+z)}{1}\cdot\frac{x+y+z}{x+y-z}=$ (sopprimendo il fattore $x+y-z$ comune al numeratore ed al denominatore) $=(x-y+z)(x+y+z)=[(x+z)-y][(x+z)+y]=$ (pel teor. 1° § 58) $=(x+z)^2-y^2=x^2+2xz+z^2-y^2$, che è il risultato cercato.

Esempio 3°. $\left(1+\frac{x}{y}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{y}\right):\frac{y}{x^2+y^2}$.

Riducendo in una sola frazione prima $1+\frac{x}{y}$ e poi $1-\frac{x}{y}$, si ha: $1+\frac{x}{y}=\frac{y}{y}+\frac{x}{y}=\frac{x+y}{y}$; ed $1-\frac{x}{y}=\frac{y}{y}-\frac{x}{y}=\frac{y-x}{y}$. Perciò l'espressione data si può scrivere così: $\frac{y+x}{y}\cdot\frac{y-x}{y}:\frac{y}{x^2+y^2}$. Pel teor. § 89, questa espressione equivale a $\frac{y+x}{y}\cdot\frac{y-x}{y}\cdot\frac{x^2+y^2}{y}=\frac{(y+x)(y-x)(y^2+x^2)}{y^3}=$ (pel teorema 1° § 58) $=\frac{(y^2-x^2)(y^2+x^2)}{y^3}=\frac{y^4-x^4}{y^3}$, che è il risultato cercato.

Esempio 4°. $\left(a-\frac{b^2}{2a}\right)\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):\left(1-\frac{a}{a+b}\right)$.

Sappiamo che è: $a-\frac{b^2}{2a}=\frac{2a^2}{2a}-\frac{b^2}{2a}=\frac{2a^2-b^2}{2a}$. Poi è $a-\frac{a^2+b^2}{a+b}=$ $=\frac{a(a+b)}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a(a+b)-a^2-b^2}{a+b}=\frac{a^2+ab-a^2-b^2}{a+b}=\frac{ab-b^2}{a+b}=$ $=\frac{b(a-b)}{a+b}$. Inoltre riducendo $1-\frac{a}{a+b}$ in una sola frazione, si ha $1-\frac{a}{a+b}=$ $=\frac{a+b}{a+b}-\frac{a}{a+b}=\frac{a+b-a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$. Sostituendo questi valori di $a-\frac{b^2}{2a}$, di $a-\frac{a^2+b^2}{a+b}$, e di $1-\frac{a}{a+b}$ nell'espressione data, essa prende la forma: $\frac{2a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b(a-b)}{a+b}:\frac{b}{a+b}=\frac{2a^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b(a-b)}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b}$. Sopprimendo i fattori b ed $a+b$, comuni al numeratore ed al denominatore, si ha: $\frac{(2a^2-b^2)(a-b)}{2a}$, che è il risultato cercato.

Esempio 5°. $\left(\frac{a^2}{b^3}-\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$.

Cominciamo a ridurre il dividendo in una sola frazione. Basta molti-care i due termini di $\frac{a^2}{b^3}$ per a, poi i due termini di $\frac{1}{a}$ per b^3, e sommare. Si ha allora: $\frac{a^2}{b^3}-\frac{1}{a}=\frac{a^3}{ab^3}-\frac{b^3}{ab^3}=\frac{a^3-b^3}{ab^3}$. Similmente, per ridurre in una sola frazione il divisore, basta moltiplicare i due termini di $\frac{a}{b^2}$ per a, poi i due termini di $\frac{1}{b}$ per ab, poi i due termini di $\frac{1}{a}$ per b^2, e sommare. Si ottiene allora $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{a^2}{ab^2}+\frac{ab}{ab^2}+\frac{b^2}{ab^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{ab^2}$. Sostituendo questi valori del dividendo e del divisore nell'espressione data, questa prende la forma: $\frac{a^3-b^3}{ab^3}:\frac{a^2+ab+b^2}{ab^2}=\frac{a^3-b^3}{ab^3}\cdot\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2}=$ *
$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab^3}\cdot\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2}=$ ** $\frac{a-b}{b}$, che è il risultato cercato.

Esempio 6°. $\frac{6a^2b^2}{m+n}:\left\{\frac{3a(m-n)}{7(x+y)}:\left[\frac{4(x-y)}{21ab^2}\cdot\frac{4(m^2-n^2)}{x^2-y^2}\right]\right\}$.

Cominciamo a trovare il valore dell'espressione chiusa entro la grappa; e per trovarlo, ci conviene cercar prima il valore dell'espressione chiusa entro la parentesi quadra. Pel § 88 si ha evidentemente: $\frac{4(x-y)}{21ab^2}\cdot\frac{4(m^2-n^2)}{x^2-y^2}=$
$=\frac{4(x-y)\cdot 4(m+n)(m-n)}{21ab^2(x+y)(x-y)}$; e sopprimendo $x-y$ che è fattore comune al numeratore ed al denominatore, si ha: $\frac{16(m+n)(m-n)}{21ab^2(x+y)}$. L'espressione chiusa entro la grappa prende allora la forma: $\frac{3a(m-n)}{7(x+y)}:\frac{16(m+n)(m-n)}{21ab^2(x+y)}=$
$=\frac{3a(m-n)}{7(x+y)}\cdot\frac{21ab^2(x+y)}{16(m+n)(m-n)}=$ *** $\frac{9a^2b^2}{16(m+n)}$. Sostituendo questo valore nell'espressione data, si ha: $\frac{6a^2b^2}{m+n}:\frac{9a^2b^2}{16(m+n)}=\frac{6a^2b^2}{m+n}\cdot\frac{16(m+n)}{9a^2b^2}=\frac{32}{3}$, che è il risultato cercato.

403. $\frac{3x}{2x-2}:\frac{2x}{x-1}$. **404.** $\frac{4a+2}{3a}:\frac{2a+1}{5a}$. **405.** $\frac{(x+y)^2}{x-y}:\frac{x+y}{(x-y)^2}$.

406. $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}:\frac{a-b}{c+d}$. **407.** $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)$.

408. $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$. **409.** $\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)$.

410. $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$. **411.** $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}$.

412. $\frac{x^4-y^4}{a^3-b^3}:\frac{x-y}{a^2+ab+b^2}$. **413.** $\frac{a^2-x^2}{4ax}:\frac{a-x}{3x}$. **414.** $\frac{a+x}{(m+n)^2}:\frac{m+n}{a-x}$.

---

* Sostituendo (§ 59) ad a^3-b^3 il suo valore $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
** Sopprimendo i fattori ab^2 ed a^2+ab+b^2 comuni al numeratore ed al denominatore.
*** Sopprimendo i fattori comuni al numeratore ed al denominatore.

415. $\frac{x^2-x}{x-3}:\frac{x^2-5x}{x-3}$. **416.** $\frac{3x^2}{a^3-x^3}:\frac{x}{a-x}$. **417.** $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2}:\frac{x^2+ax}{x-a}$.

418. $\left(1-\frac{a^3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right)$. **419.** $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$.

420. $\left[a+\frac{b-a}{1+ab}\right]:\left[1-\frac{1+ab}{a(b-a)}\right]$. **421.** $\left(a-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right):\left(1-\frac{a}{a+b}\right)$.

422. $\frac{8-2a^4}{3ab}:(2+a^2)$. **423.** $4m^2p^3:\frac{2m^3x}{p^2-px}$. **424.** $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)$.

425. $\left(\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)$.

FRAZIONI CON TERMINI FRAZIONARI.

Esempio 1º. $$\frac{x^2-3ax+\frac{12a^3}{x+3a}-2a^2}{3x-\frac{2x^2}{x+3a}-6a}.$$

Riduciamo prima il numeratore in una sola frazione. A tal fine possiamo immaginarlo scritto così: $\frac{x^2}{1}-\frac{3ax}{1}+\frac{12a^3}{x+3a}-\frac{2a^2}{1}$. Moltiplichiamo pel denominatore della terza frazione i due termini di tutte le altre, ed otterremo:

$$\frac{x^2(x+3a)}{x+3a}-\frac{3ax(x+3a)}{x+3a}+\frac{12a^3}{x+3a}-\frac{2a^2(x+3a)}{x+3a}=$$
$$=\frac{x^2(x+3a)-3ax(x+3a)+12a^3-2a^2(x+3a)}{x+3a}.$$

Ed eseguendo le operazioni indicate nel numeratore, e facendo poi la riduzione dei termini simili, si ottiene: $\frac{x^3+3ax^2-3ax^2-9a^2x+12a^3-2a^2x-6a^3}{x+3a}=$ $=\frac{x^3-11a^2x+6a^3}{x+3a}$. Questo è il numeratore dell'espressione data. Riduciamo similmente il denominatore, in una sola frazione, ed avremo:

$$3x-\frac{2x^2}{x+3a}-6a=\frac{3x}{1}-\frac{2x^2}{x+3a}-\frac{6a}{1}=\frac{3x(x+3a)}{x+3a}-\frac{2x^2}{x+3a}-\frac{6a(x+3a)}{x+3a}=$$
$$=\frac{3x(x+3a)-2x^2-6a(x+3a)}{x+3a}=\frac{3x^2+9ax-2x^2-6ax-18a^2}{x+3a}=$$

$=\frac{x^2+3ax-18a^2}{x+3a}$. Questo è il denominatore dell'espressione data, la quale si potrà perciò scrivere così: $\frac{\frac{x^3-11a^2x+6a^3}{x+3a}}{\frac{x^2+3ax-18a^2}{x+3a}}=$ (per la regola del § 90)

$=\frac{(x^3-11a^2x+6a^3)(x+3a)}{(x+3a)(x^2+3ax-18a^2)}$; e sopprimendo il fattore $x+3a$ comune al numeratore ed al denominatore, si ottiene $\frac{x^3-11a^2x+6a^3}{x^2+3ax-18a^2}$, che è il risultato cercato.

Esempio 2°. $\dfrac{1+\dfrac{a-x}{a+x}}{1-\dfrac{a-x}{a+x}} : \dfrac{1+\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$.

Cominciamo a ridurre separatamente in una sola frazione ciascun termine della frazione dividendo e ciascun termine della frazione divisore, ed avremo:

$$1+\frac{a-x}{a+x}=\frac{a+x}{a+x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{a+x+a-x}{a+x}=\frac{2a}{a+x}.$$

$$1-\frac{a-x}{a+x}=\frac{a+x}{a+x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)-(a-x)}{a+x}=\frac{a+x-a+x}{a+x}=\frac{2x}{a+x}.$$

$$1+\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2+x^2}+\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\frac{a^2+x^2+a^2-x^2}{a^2+x^2}=\frac{2a^2}{a^2+x^2}.$$

$$1-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2+x^2}-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\frac{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)}{a^2+x^2}=\frac{a^2+x^2-a^2+x^2}{a^2+x^2}=$$
$$=\frac{2x^2}{a^2+x^2}.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione data, questa prende la forma: $\dfrac{\dfrac{2a}{a+x}}{\dfrac{2x}{a+x}} : \dfrac{\dfrac{2a^2}{a^2+x^2}}{\dfrac{2x^2}{a^2+x^2}}$. Troviamo prima, per mezzo della regola del § 90, il valore della frazione dividendo, e poi il valore della frazione divisore, ed avremo: $\dfrac{\dfrac{2a}{a+x}}{\dfrac{2x}{a+x}}=\dfrac{2a(a+x)}{2x(a+x)}=\dfrac{a}{x}$. Similmente si ha: $\dfrac{\dfrac{2a^2}{a^2+x^2}}{\dfrac{2x^2}{a^2+x^2}}=\dfrac{2a^2(a^2+x^2)}{2x^2(a^2+x^2)}=\dfrac{a^2}{x^2}$.

Sostituendo questi valori nell'espressione data, essa diventa: $\dfrac{a}{x}:\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{a}{x}\cdot\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{ax^2}{xa^2}=\dfrac{x}{a}$, che è il risultato cercato.

Esempio 3°. Si trovi il valore di $\dfrac{y-x+1}{x-y+1}$, *posto che sia* $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$ *ed* $y=\dfrac{a(b+1)}{ab+1}$. Il valore di y si può scrivere così: $y=\dfrac{ab+a}{ab+1}$. Sostituiamo questi valori di x e di y nell'espressione data. Essa allora prenderà la forma: $\dfrac{\dfrac{ab+a}{ab+1}-\dfrac{a+1}{ab+1}+1}{\dfrac{a+1}{ab+1}-\dfrac{ab+a}{ab+1}+1}$. Riduciamo separatamente in una sola frazione il numeratore ed il denominatore, ed avremo: $\dfrac{ab+a}{ab+1}-\dfrac{a+1}{ab+1}+1=\dfrac{ab+a}{ab+1}-\dfrac{a+1}{ab+1}+$
$+\dfrac{ab+1}{ab+1}=\dfrac{(ab+a)-(a+1)+(ab+1)}{ab+1}=\dfrac{ab+a-a-1+ab+1}{ab+1}=\dfrac{2ab}{ab+1}$.

Pel denominatore, si ha: $\dfrac{a+1}{ab+1}-\dfrac{ab+a}{ab+1}+1=\dfrac{a+1}{ab+1}-\dfrac{ab+a}{ab+1}+\dfrac{ab+1}{ab+1}=$
$=\dfrac{(a+1)-(ab+a)+(ab+1)}{ab+1}=\dfrac{a+1-ab-a+ab+1}{ab+1}=\dfrac{2}{ab+1}$.

Sostituendo questi valori del numeratore e del denominatore, si ottiene:

$$\frac{\frac{2ab}{ab+1}}{\frac{2}{ab+1}};$$ e questa frazione è eguale (regola § 90) a $\frac{2ab(ab+1)}{2(ab+1)}=ab$. Questo è il risultato cercato.

Esempio 4º. $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Questa espressione rappresenta una differenza in cui il minuendo è 1, ed il sottraendo è una frazione che ha per numeratore 1, e per denominatore $1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Cominciamo a trovare il valore di questo denominatore. Esso è una differenza di cui il minuendo è 1, ed il sottraendo è $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Questo sottraendo è una frazione in cui il numeratore è 1, ed il denominatore è $1+\frac{1}{x}$. Cominciamo a trovare il valore di questo denominatore. Evidentemente è: $1+\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$. Sostituendo questo valore di $1+\frac{1}{x}$ nell' espressione data, si ha: $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Troviamo ora il valore di $\frac{1}{\frac{x+1}{x}}$. Pel § 90 si ha: $\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x}{x+1}$.

Ponendo questo valore nella (2), si ha: $$1-\frac{1}{1-\frac{x}{x+1}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Il valore del denominatore è: $1-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-x}{x+1}=\frac{1}{x+1}$.

Sostituendo questo valore nella (3), si ottiene: $1-\frac{1}{\frac{1}{x+1}}$. Ora si ha:

$\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{x+1}{1}=x+1$. E così l'espressione data diventa: $1-(x+1)=$ $=1-x-1=-x$. Questo è il risultato cercato.

Osservazione. Per calcolare il valore delle espressioni algebriche della forma di quella dell'esempio 4°, si comincia a trovare il valore dell'ultima espressione frazionaria che si trova in basso a destra, e lo si sostituisce nell'espressione data. Sull'espressione che così si ottiene si opera come si era operato sull'espressione data; e si continua così finchè si ottiene un'espressione intera, od una frazione a termini interi.

426. $\dfrac{b}{a-\dfrac{ac}{b+c}}$. **427.** $\dfrac{1-\dfrac{a^3}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a}{x^3}}$. **428.** $\dfrac{a+\dfrac{b-a}{1+ba}}{1-a\dfrac{b-a}{1+ba}}$.

429. $\dfrac{\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x-1}{3}}{\dfrac{13}{6}(x+1)-\dfrac{x}{3}-2\dfrac{1}{2}}$. **430.** $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$. **431.** $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}}{\dfrac{e}{f}+\dfrac{g}{h}}$.

432. $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}$. **433.** $\dfrac{x-a}{x-\dfrac{(x-b)(x-c)}{x+a}}$. **434.** $\dfrac{\dfrac{y^2}{d}-\dfrac{y^3}{a+b}}{\dfrac{y^3}{a+b}-\dfrac{y^4}{dh^2}}$.

435. $\dfrac{\dfrac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{(a+x)^2}{x^2+xy+y^2}}$. **436.** $\dfrac{\dfrac{x^2}{2a^2}-4+\dfrac{6a^2}{x^2}}{\dfrac{x}{2a}-\dfrac{3a}{x}}$. **437.** $\dfrac{\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{a}{x+a}}{\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}}$.

438. $\dfrac{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}}{\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}}$. **439.** $\dfrac{x-\dfrac{x-a}{ax+1}}{1-x\dfrac{a-x}{ax+1}}$. **440.** $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}$.

441. $\dfrac{3abc}{bc+ca+ab}-\dfrac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$. **442.** $\dfrac{\dfrac{m^2+n^2}{n}+m}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}}\cdot\dfrac{m^2-n^2}{m^3-n^3}$.

443. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$. **444.** $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$. **445.** $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

446. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$. **447.** $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{3-x}}}$. **448.** $\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$.

449. $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$. **450.** $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

Equazioni

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI 1° GRADO AD UN'INCOGNITA.

Dovendo, per la risoluzione delle equazioni, far uso delle proprietà fondamentali delle equazioni (§ 102, 103), sarà bene che i principianti ricordino le seguenti avvertenze:

1ª. Per aumentare o diminuire un polinomio di un numero, basta aumentare o diminuire di questo numero un solo dei suoi termini.

2ª. Per moltiplicare o dividere un polinomio per un numero, bisogna moltiplicare o dividere per questo numero ciascun termine del polinomio.

3ª. Il tratto orizzontale che separa il numeratore d'una frazione dal denominatore, tiene anche le veci d'una parentesi. Perciò, se il numeratore è un polinomio, nell'atto in cui si sopprime il denominatore, bisogna sostituire il tratto orizzontale con una parentesi; ossia bisogna chiudere il primitivo numeratore in parentesi. Dopo ciò si toglierà la parentesi, eseguendo le operazioni indicate, ed avendo l'avvertenza di cambiare il segno a tutti i termini del numeratore se la frazione era preceduta dal segno —.

Esempio 1º. *Si risolva l'equazione:* $\frac{7x+2}{4}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{8}+5.$

Moltiplicandone tutti i termini per 4.2.8, che è il prodotto dei denominatori, ed eseguendo le operazioni indicate, si ha successivamente:

$$\frac{7x+2}{4}.4.2.8-\frac{7}{2}.4.2.8=\frac{3x}{8}.4.2.8+5.4.2.8, \quad \text{ossia}$$

$(7x+2).2.8-7.4.8=3x.4.2+5.4.2.8,$ ossia $112x+32-224=24x+320.$

E trasportando i termini incogniti nel 1º membro, e i termini noti nel 2º, e facendo poi la riduzione dei termini simili, si ha successivamente:

$$112x-24x=320-32+224, \quad \text{ossia} \quad 88x=512.$$

Osservando ora che 88 e 512 sono divisibili per 8, possiamo ancora dividere ambi i membri per 8, ed otterremo: $11x=64$. Dividendone ambi i membri per 11, otteniamo l'equazione $x=\frac{64}{11}$, ossia $x=5\frac{9}{11}$, che è equivalente alla proposta, e ci dà immediatamente il valore di x.

Risposta. L'equazione ha per radice $x=5\frac{9}{11}$.

Osservazione 1ª. Invece di moltiplicare tutti i termini dell'equazione data pel prodotto 4.2.8 dei denominatori, avremmo fatto meglio se avessimo moltiplicato tutti i termini per 8 che è il m.c.m. dei denominatori. Avremmo in questo caso ottenuto successivamente $\frac{7x+2}{4}.8-\frac{7}{2}.8=\frac{3x}{8}.8+5.8$, ossia $(7x+2).2-7.4=3x+5.8$, ossia $14x+4-28=3x+40$, ossia $14x-24=$ $=3x+40$; e quindi $14x-3x=40+24$, ossia $11x=64$; da cui $x=5\frac{9}{11}$.

Osservazione 2ª. Dall'esempio precedente si vede che, per far scomparire il denominatore di ciascuna frazione, si divide il multiplo comune ai deno-

minatori pei singoli denominatori, ed i quoti così ottenuti si moltiplicano pei corrispondenti numeratori. Conviene abituarsi a fare queste operazioni *a memoria;* e questo si ottiene facilmente se il multiplo comune ai denominatori lo si scrive scomposto in fattori, come abbiam fatto noi scrivendo p.e. 4.2.8 invece di 64. Basterà allora immaginare soppressi quei fattori il cui prodotto forma il denominatore d'una frazione, e moltiplicare il numeratore corrispondente pel prodotto dei rimanenti fattori.

Bisognerà ancora ricordare che i termini interi dell'equazione resteranno moltiplicati per l'intero multiplo comune dei denominatori.

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $\frac{3x+1}{2}+\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-x\right)-\frac{1}{2}x\right]\frac{1}{2}=1.$

Cominciamo a togliere le parentesi, principiando dalle parentesi più interne, ed avremo successivamente:

$$\frac{3x+1}{2}+\left[\frac{1}{12}-\frac{x}{3}-\frac{x}{2}\right]\frac{1}{2}=1, \quad \text{ossia} \quad \frac{3x+1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{x}{6}-\frac{x}{4}=1.$$

E moltiplicando tutti i termini per 24, si ottiene:

$$(3x+1)12+1-4x-6x=24, \quad \text{ossia} \quad 36x+12+1-4x-6x=24.$$

E trasportando tutti i termini noti nel 2° membro, si ha:

$$36x-4x-6x=24-12-1, \quad \text{ossia} \quad 26x=11.$$

E dividendo ambi i membri per 26, si ha: $x={}^{11}/_{26}$. Questa equazione è equivalente all'equazione data, e ci dà immediatamente il valore di x.

Risposta. L'equazione ***ha*** *per radice* $x={}^{11}/_{26}$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $\frac{x}{a-2}+\frac{x+2}{a+2}=2x-\frac{2a^2x}{a^2-4}\ \ldots\ (1)$

Il m.c.m. dei denominatori è a^2-4, ossia $(a+2)(a-2)$. Esso non contiene incognite; e, se è diverso da zero, moltiplicando tutti i termini dell'equazione per $(a+2)(a-2)$, otterremo (teor. § 103) un'equazione intera, ed equivalente all'equazione data.

Ora $(a+2)(a-2)$ è diverso da zero se sono contemporaneamente diversi da zero $a+2$ ed $a-2$. Ora $a+2$ è diverso da zero se a è diverso da -2; ed $a-2$ è diverso da zero se a è diverso da $+2$. Dunque $(a+2)(a-2)$, è diverso da zero se a è diverso da ± 2.

In tale ipotesi, potremo moltiplicare tutti i termini della (1) per $(a+2)(a-2)$, ed otterremo l'equazione equivalente:

$$x(a+2)+(x+2)(a-2)=2x(a^2-4)-2a^2x, \quad \text{ossia}$$
$$ax+2x+ax+2a-2x-4=2a^2x-8x-2a^2x.$$

Trasportando i termini incogniti nel 1° membro, ed i termini noti nel 2°, e facendo poi la riduzione dei termini simili, otterremo:

$$ax+2x+ax-2x-2a^2x+8x+2a^2x=4-2a, \quad \text{ossia} \quad 2ax+8x=4-2a.$$

E dividendo tutti i termini per 2, si avrà:

$$ax+4x=2-a, \quad \text{ossia} \quad (a+4)x=2-a.$$

Se $a+4$ è diverso da zero, ossia se a è diverso da -4, potremo dividere ambi i membri pel coefficiente dell'incognita, ed avremo l'equazione $x=\frac{2-a}{a+4}$ che è equivalente alla proposta, e ci dà immediatamente il valore di x.

Osservazione. Bisogna però ricordare che, secondo le ipotesi fatte, a può avere qualsiasi valore, tranne i valori $a=\pm 2$ ed $a=-4$.

Risposta. Se a è diverso da ± 2 e da -4, sarà $x=\frac{2-a}{a+4}$.

451. $5x+50=4x+56.$ **452.** $16x-11=7x+70.$ **453.** $3x+10=5x-70.$

454. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+2+\frac{2}{3}=0.$ **455.** $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}=2+\frac{3x-1}{13}.$

456. $\frac{2}{7}x+15-\frac{3}{5}x+29=0.$ **457.** $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x.$

458. $\frac{1}{2}(27-x)=\frac{9}{2}+\frac{1}{10}(7x-54).$

459. $\frac{1}{6}(8-x)+x-1\frac{2}{3}=\frac{1}{2}(x+6)-\frac{x}{3}.$

460. $\frac{3x+1}{13}+\frac{2x-5}{3}=\frac{4x-1}{5}+\frac{2-x}{2}.$ **461.** $\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}.$

462. $\frac{4x-8}{10}-\frac{20-x}{4}+\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=6\frac{1}{6}.$ *

463. $\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0.$

464. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4\frac{8}{9}.$

465. $\frac{5x}{3}+2x+6\left(x-\frac{x}{3}-\frac{4x}{9}\right)=450000.$

466. $21-\frac{2}{5}(3x+4)-\frac{5}{6}(7x-1)=8+\frac{9}{10}(3x-1)-\frac{5}{3}(5x-2).$

467. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3).$

468. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=9\frac{3}{4}.$

469. $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}.$

470. $\left[\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{3}\right]-\left[x-\frac{1}{3}(2x-1)\right]=0.$

471. $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0.$

472. $2\frac{7}{8}-\left[3\frac{7}{8}-\left(4\frac{1}{4}-4\frac{3}{8}x\right)\right]=6\frac{7}{8}-\left(7\frac{5}{8}-3\frac{5}{8}x\right).$

473. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x-1\right]-1\right)-1\right]-1\right\}-1=0.$

474. $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}[x+2]+4\right)+6\right]+8\right\}=1.$

475. $4x+\frac{1}{2}(x-2)-2\left[2x-\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{18}\left\{16-\frac{1}{2}(x+4)\right\}\right)\right]=\frac{2}{3}(x+2).$

476. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c.$ **477.** $\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1.$

478. $a(x-b)=b(a-x)-(a+b)x.$ **479.** $\frac{2x+a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{3ax+(a-b)^2}{ab}.$

---

* Quando nell'equazione vi è qualche frazione con termini frazionari, si cominci a ridurre separatamente questa frazione in un'altra frazione equivalente che abbia i termini interi.

480. $\frac{3a+bx}{3a-bx}=\frac{7a+3b-2bc}{7a-3b-2bc}$. **481.** $\frac{9a-11x}{3a-2c}=\frac{9a+11x}{3a+2c}$.

482. $2x+m-n=\frac{p+q}{p-q}(m+n)$.

483. $\frac{2}{3}[a-(b-x)]-\frac{3}{4}[x-(b-a)]-\frac{4}{5}[b-(a+x)]=\frac{5}{6}[x+a-b]$.

484. $2a^2b-(a-b)x=2b(b^2+2a^2)-(a+b)x$.

485. $(a+b-c)x-(a-b-c)x-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)-(a-b+c)x$.

486. $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{c+a}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x$.

487. $\frac{x-b^2+2ac}{a+c}-\frac{x-a^2+2bc}{b+c}=\frac{x-c^2-2ab}{a-b}$.

488. $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ac}-1=abc-x(a+b+c)$.

489. $3x-\left(\frac{x}{3}+\frac{5a}{6}\right)=\frac{2a}{5}-\frac{a}{3}-\left(\frac{a}{2}-\frac{5x}{3}\right)$.

490. $x-\frac{a}{5}-\left(2x-\frac{a}{10}\right)=3x-\frac{a}{4}+4x-\frac{37a}{20}$.

491. $\frac{x}{ab}+\frac{x}{bc}+\frac{x}{ca}-1=abc-x(a+b+c)$.

492. $\frac{1-x}{1-a}-\frac{1-x}{1-a^2}+\frac{1-x}{1-a+a^2-a^3}-2=2-\frac{1-x}{1+a}-\frac{1-x}{1+a^2}-\frac{1-x}{1+a+a^2+a^3}$.

RISOLUZIONE ALGEBRICA DEI PROBLEMI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

Per facilitare la risoluzione dei problemi di 1° grado ad una incognita, possono giovare le seguenti norme pratiche: *

1°. Si rappresenti con una lettera, p.e. con x, l'incognita del problema; e, supponendo di conoscerne già il vero valore, si indichino le operazioni che si farebbero sull'incognita e sui dati del problema se si volesse verificare se i valori dell'incognita soddisfano o non al problema. Alcune volte, così facendo, si ottengono due espressioni che il problema dice essere eguali fra loro; oppure si ottiene un'espressione che deve essere eguale ad un numero dato. Scrivendo l'eguaglianza, si ha l'equazione cercata.

Osservazione. Il più delle volte il problema non dice *esplicitamente* quali espressioni devono essere eguali fra loro. In questi casi è utile modificarne un poco l'enunciato in modo da fare comparire l'espressione « *eguale a.....* ».

2°. Si ponga molta attenzione a determinare *con precisione* il significato dell'incognita, evitando in ciò tutte le espressioni *vaghe ed indeterminate.* Si dirà perciò p.e.: *Sia x il numero delle ore impiegate per fare il lavoro,* e non: *Sia x il tempo impiegato, ecc.;* così pure p.e.: *Sia x il numero dei metri di lavoro eseguito,* e non: *Sia x il lavoro fatto, ecc.*

---

* Il lettore troverà molte altre utili indicazioni e molti esempi opportunamente svolti nella pregevole opera *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici* (Torino-Paravia 1893) del chiarissimo prof. Rodolfo Bettazzi.

3°. Alcuni problemi contengono varie incognite, e fra queste vi sono delle relazioni note, e tali che, se il valore d'una incognita fosse conosciuto, si potrebbe con tutta facilità trovare il valore delle altre. In questi casi, *si può* procedere così: Si chiama x il valore d'una incognita; e poi, supponendo di conoscere il valore di x, si scrive il valore delle altre. Ciò fatto sarà facile trascrivere e risolvere il problema per mezzo d'una sola equazione di 1° grado ad una sola incognita; e si ottiene così il valore di x. Trovato questo valore, si troverà poi facilmente il valore delle altre incognite.

4°. Si mettano bene in chiaro tutte le condizioni espresse dal problema, ed anche quelle che il problema lascia sottintese.

Osservazione. Molte volte, alcune relazioni esistenti fra l'incognita ed i dati del problema (relazioni necessarie per la risoluzione del problema) non sono date esplicitamente; ma bisogna ricavarle da proposizioni scientifiche, che si suppongono note. Ciò succede in molti problemi che riguardano la fisica, la meccanica, la geometria, ecc.

5°. Se varie grandezze dello stesso genere sono riferite a diverse unità di misura, si faccia uso del *principio di omogeneità,* cioè si riferiscano tutte alla medesima unità di misura. *

Osservazione. Si possono adoperare indifferentemente frazioni ordinarie e frazioni decimali: è tuttavia più comodo far uso, in un medesimo problema, di sole frazioni ordinarie, oppure di sole frazioni decimali. È però da notarsi che d'ordinario, quando si possono usare i valori esatti delle quantità di cui si tratta, non conviene far uso di valori approssimati. Così p.e. non converrà alla frazione $^1/_3$ sostituire il valore approssimato 0,333; e così in luogo di $^7/_8 = 0,0875$ non converrà far uso del valore approssimato 0,08.

6°. Talora la risoluzione del problema riesce assai semplificata introducendo, in luogo dell'incognita del problema, un'altra incognita la quale abbia con quella del problema certe relazioni naturali od anche convenzionali, per modo che, trovato che sia il valore di questa *incognita ausiliaria,* sia poi facile trovare il valore dell'incognita del problema.

PROBLEMA 1°. Si trovi un numero il quale dia il medesimo risultato sia moltiplicandolo per 3, sia aumentandolo di 3.

Risoluzione. Sia x il numero cercato. Moltiplicandolo per 3, otterremo $3x$; ed aumentandolo di 3, otterremo $x+3$. Dovendo questi due risultati essere eguali, avremo: $3x = x+3$.

Quest'equazione è la trascrizione algebrica del problema; e risolvendola, avremo risolto il problema. Dall'equazione si ricava immediatamente: $3x - x = 3$, ossia $2x = 3$, ossia $x = {}^3/_2 = 1\,{}^1/_2$. Questo valore è unico.

Risposta. Il valore cercato è unico, ed è $1\,{}^1/_2$.

PROBLEMA 2°. Ad una serata di beneficenza la tassa personale d'ingresso è di lire 5 pei primi posti, e di lire 3 pei secondi posti. Si distribuirono in tutto 350 biglietti, e si incassarono 1518 lire. Quante persone erano nei primi posti, e quante nei secondi posti?

Risoluzione. Comincio ad osservare che, essendosi distribuiti 350 biglietti, le persone che presero parte alla serata furono 350. Il problema domanda due numeri, e quindi è un problema con due incognite. Ma è facile scorgere che quando si conosca uno dei due numeri cercati, si trova facilmente il

* Il *principio di omogeneità* fu enunciato esplicitamente, per la prima volta, da Francesco Viète (1540-1603).

valore dell'altro. Chiamiamo p.e. x il numero delle persone che occuparono i primi posti. Poichè, in tutto, eranvi 350 persone, il numero di quelle che occuparono i secondi posti sarà $350-x$. Quelle dei primi posti avranno pagato fra tutte lire $5x$, e quelle dei secondi posti lire $3.(350-x)$. L'incasso totale fu di 1518 lire; dunque si avrà l'equazione $5x+3.(350-x)=1518$.

Questa è la trascrizione algebrica del problema.

Risolvendo l'equazione, si ottiene: $5x+1050-3x=1518$, ossia
$2x=1518-1050$, ossia $2x=468$; da cui $x=234$.

Le persone dei primi posti erano 234; quelle dei secondi posti erano $350-234=116$. Poichè l'equazione ci dà un unico valore di x, ne segue che il problema ammette una sola soluzione.

Risposta. *Nei primi posti vi erano* 234 *persone; nei secondi posti* 116.

PROBLEMA 3°. *Si scomponga il numero* 20 *in quattro parti tali che si ottenga sempre il medesimo risultato, sia aumentando la prima parte di* 1, *sia diminuendo la seconda di* 2, *sia moltiplicando la terza per* 3, *sia dividendo la quarta per* 4.

Risoluzione. I numeri da cercarsi (ossia le incognite) sono quattro, cioè le quattro parti in cui deve essere scomposto il numero dato. È però facile vedere che, quando di queste parti se ne conosce una, si trovano facilmente le altre. Risolviamo dunque il problema come se vi fosse una sola incognita.

Sia p.e. x il valore della 1ª parte. Aumentandola di 1, si otterrà $x+1$. Ora dal problema si sa che $x+1$ è eguale al risultato che si ottiene quando si tolgono 2 unità alla 2ª parte; dunque aggiungendo 2 unità ad $x+1$, si deve ottenere la 2ª parte, la quale sarà perciò eguale ad $(x+1)+2=x+3$.

Così pure $x+1$ è eguale al prodotto che si ottiene moltiplicando la 3ª parte per 3; questa 3ª parte sarà perciò eguale ad $(x+1):3=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$.

Inoltre $x+1$ è eguale al quoto che si ottiene dividendo la 4ª parte per 4; questa 4ª parte sarà perciò eguale ad $(x+1).4=4x+4$.

Sommando insieme le quattro parti, si ottiene il numero dato, cioè 20. Dunque il problema si trascriverà per mezzo della seguente equazione:

$$x+(x+3)+\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)+(4x+4)=20, \quad \text{ossia}$$

$$x+x+3+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}+4x+4=20, \quad \text{ossia}$$

$$6x+\frac{x}{3}=20-3-\frac{1}{3}-4, \quad \text{ossia} \quad \left(6+\frac{1}{3}\right)x=13-\frac{1}{3}, \quad \text{ossia} \quad \frac{19}{3}x=\frac{38}{3},$$

$$\text{ossia} \quad 19x=38, \quad \text{ossia} \quad x=2.$$

Essendo la 1ª parte eguale a 2, la 2ª sarà $2+3=5$, la 3ª sarà $(2+1):3=1$, la 4ª sarà $4.2+4=12$. Poichè il valore di x è unico, unico sarà pure il modo con cui si può operare la proposta divisione del numero dato.

Risposta. *Le parti sono rispettivamente* 2, 5, 1, 12.

PROBLEMA 4°. *Al* 1° *di agosto la durata della notte è i* $^3/_5$ *di quella del giorno. Quante ore ha la notte, e quante il giorno?*

Risoluzione. Anche quì due sono i numeri che si cercano; però quando si conoscesse la durata del giorno, si troverebbe poi facilmente quella della notte. Cerchiamo dunque di conoscere la durata del giorno.

A tal fine, chiamiamo x il numero d'ore che dura il giorno; il numero d'ore che dura la notte sarà $^3/_5 x$. Quì bisogna ricordare la condizione sot

tintesa che la durata del giorno più quella della notte è eguale a 24 ore. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione: $x+{}^3/_5x=24$, ossia ${}^8/_5x=24$, ossia $8x=24.5$, ossia $8x=120$, da cui si ha $x=15$.

La durata del giorno è di 15 ore; quella della notte di ore $15.{}^3/_5=9$. Il valore di x è unico; sarà quindi anche unico il valore di ${}^3/_5x$.

Risposta. *Il giorno ha* 15 *ore, la notte ne ha* 9.

PROBLEMA 5°. *Dei tre angoli di un triangolo, il secondo è i* ${}^5/_6$ *del primo, ed il terzo supera il secondo di* 36°. *Qual è il valore di ciascun angolo?*

Risoluzione. Gli angoli cercati sono tre; ma, quando si conoscesse il valore del primo, si troverebbe subito il valore degli altri due. Chiamiamo dunque x il valore del primo angolo: quello del secondo sarà ${}^5/_6\,x$, e quello del terzo ${}^5/_6x+36^\circ$. Quì bisogna ricordare la condizione (che si suppone nota) che la somma dei tre angoli di un triangolo deve essere eguale a 180°. Avremo dunque il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$x+{}^5/_6x+{}^5/_6x+36^\circ=180^\circ$, ossia $(1+{}^5/_6+{}^5/_6)x=180^\circ-36^\circ$, ossia $\frac{16}{6}x=144^\circ$, ossia $16x=144^\circ\cdot6=864^\circ$; da cui $x=\frac{864^\circ}{16}=54^\circ$.

Il primo angolo è eguale a 54°; e quindi il secondo sarà $54^\circ\times{}^5/_6=45^\circ$, ed il terzo sarà $45^\circ+36^\circ=81^\circ$.

Poichè il valore di x è unico, sarà pure unico il valore di ${}^5/_6x$, ed unico il valore di ${}^5/_6x+36^\circ$. Il problema ammette quindi un'unica soluzione.

Risposta. *Il primo angolo è di* 54°, *il secondo di* 45°, *il terzo di* 81°.

PROBLEMA 6°. *Una macchina tipografica stampa* 10725 *fogli ogni* 5 *ore; un'altra ne stampa* 354 *ogni* 8 *minuti. In quanto tempo, fra tutte e due, stamperanno* 50000 *fogli?*

Risoluzione. Pel principio di omogeneità, bisogna che il lavoro di ciascuna macchina sia riferito alla medesima unità di tempo. Scegliamo p.e. il minuto, e cerchiamo anzitutto quanti fogli stampa ciascuna macchina in un minuto.

Poichè la 1ª macchina stampa 10725 fogli in 5 ore, ossia in 300 minuti, in un minuto stamperà fogli $\frac{10725}{300}$. Similmente la 2ª che stampa 354 fogli ogni 8 minuti, in 1 minuto stamperà fogli $\frac{354}{8}$.

Sia x il numero dei minuti impiegati fra tutte e due per stampare 50000 fogli. In x minuti, la 1ª stamperà fogli $\frac{10725}{300}x$, e la 2ª fogli $\frac{354}{8}x$. Fra tutte e due, in x minuti, stamperanno fogli $\frac{10725}{300}x+\frac{354}{8}x$. Ma questo numero deve essere eguale a 50000. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$\frac{10725}{300}x+\frac{354}{8}x=50000, \quad \text{ossia} \quad \left(\frac{10725}{300}+\frac{354}{8}\right)x=50000, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{10725.8+354.300}{300.8}x=50000, \quad \text{cioè} \quad \frac{192000}{2400}x=50000, \quad \text{ossia}$$

$\frac{1920}{24}x=50000$, ossia $1920x=50000.24$, cioè $1920x=1200000$; da cui $x=\frac{1200000}{1920}=625$.

Essendo unico il valore di x, sarà unica la soluzione del problema.

Risposta. *Impiegheranno* 625 *minuti, cioè* 10 *ore e* 25 *minuti.*

PROBLEMA 7°. *Una macchina consuma* 5 m^3 *di carbone ogni* 10 *ore; un'altra ne consuma* 200 dm^3 *all'ora; una terza* 150 dm^3 *ogni due ore. Per quanto tempo può durare la provvista di* 620 m^3 *di carbone?*

Risoluzione. La quantità di carbone è espressa ora in m^3 ed ora in dm^3; ci è necessario adoperare sempre la stessa unità di misura, p.e. il dm^3. Di ciascuna macchina conosciamo il consumo, ogni 10 ore per la 1ª, ogni ora per la 2ª, ogni due ore per la 3ª. Ci conviene cercare qual'è il consumo di ciascuna macchina durante il medesimo tempo, p.e. durante 1 ora. Chiamando x il numero delle ore impiegate per consumare fra tutte e tre l'intera provvista di carbone, ragioneremo così:

Poichè la 1ª macchina consuma 5 m^3 (ossia 5000 dm^3) ogni 10 ore, in 1 ora consumerà $5000:10=500$ dm^3 di carbone; ed in x ore consumerà dm^3 $500x$.

Se la 2ª consuma 200 dm^3 di carbone all'ora, in x ore consumerà dm^3 $200x$.

La 3ª infine che consuma 150 dm^3 di carbone ogni due ore, in 1 ora ne consumerà dm^3 $150:2=75$; ed in x ore ne consumerà $75x$.

Tutte e tre insieme in x ore consumeranno dm^3 $500x+200x+75x$.

Ma in x ore devono consumare l'intera provvista che è di 620 m^3 (ossia 620000 dm^3) di carbone. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$500x+200x+75x=620000$, ossia $775x=620000$, ossia $x=800$ ore.

Il valore di x è unico; perciò il problema ammette un'unica soluzione.

Risposta. *La provvista sarà consumata in* 800 *ore.*

PROBLEMA 8°. *Un colonnello, disponendo i suoi soldati in quadrato, vede che gliene sopravvanzano* 50; *ma, per comporre un quadrato che abbia un soldato di più per ogni lato, gliene mancherebbero* 41. *Di quanti uomini si compone il reggimento?*

Risoluzione. L'incognita del problema è il numero dei soldati del reggimento; però in questo caso è più comodo scegliere un'altra incognita.

Chiamando x il numero di soldati messi su ogni lato del 1° quadrato, il numero dei soldati impiegati a formare questo quadrato sarà x^2. Poichè, dopo formato il quadrato, sopravvanzano 50 soldati, il numero dei soldati del reggimento sarà x^2+50.

Nel 2° caso, il numero dei soldati messi su ogni lato del quadrato sarebbe $x+1$, ed il quadrato conterrebbe $(x+1)^2$ soldati. Ma, per compiere un tal quadrato, ne mancano 41; dunque il reggimento contiene solamente $(x+1)^2-41$ soldati.

Abbiamo già visto che esso ne contiene x^2+50; e dovendo le due espressioni $(x+1)^2-41$ ed x^2+50 essere eguali, avremo il nostro problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$(x+1)^2-41=x^2+50, \quad \text{ossia} \quad x^2+2x+1-41=x^2+50, \quad \text{ossia}$$
$$x^2-x^2+2x=50+41-1, \quad 2x=90, \quad \text{ossia} \quad x=45.$$

Nel 1° quadrato vi erano 45 soldati per ogni lato; perciò il quadrato conteneva $45^2=2025$ soldati; ed il reggimento, $2025+50=2075$.

Essendo unico il valore di x, unica sarà la soluzione del problema.

Risposta. *Il reggimento conteneva* 2075 *soldati.*

PROBLEMA 9°. *Un becco di gas consuma* 4 m^3 *di gas ogni* 15 *ore; ed un altro, che si accende* 4 *ore dopo, ne consuma* 200 dm^3 *ogni* 39 *mi-*

nuti. Trascorso un certo tempo, ne hanno consumato tutti e due la medesima quantità. Quanto gas ha consumato ciascuno dei due becchi?

Risoluzione. Ci è comodo prendere per incognita del problema il tempo in cui sta acceso il 1° becco; conosciuto questo, sarà poi facile trovare la quantità di gas consumata. Anzi tutto però bisogna riferire le diverse quantità di gas alla medesima unità di misura, p.e. al dm³; ed i diversi tempi alla medesima unità di tempo, p.e. al minuto; e poi cercare quanto gas consuma ogni becco nella medesima unità di tempo, cioè in un minuto.

Sia p.e. x il numero dei minuti in cui sta acceso il 1° becco. Poichè esso consuma 4 m³ (ossia 4000 dm³) ogni 15 ore (ossia ogni 900 minuti), in 1 minuto consumerà dm³ $\frac{4000}{900}=\frac{40}{9}$; ed in x minuti consumerà dm³ $\frac{40}{9}x$.

Il 2°, che si accende 4 ore dopo (ossia 240 minuti dopo), starà acceso 240 minuti meno del 1°, ossia minuti $x—240$. Poichè esso consuma 200 dm³ ogni 39 minuti (ossia $\frac{200}{39}$ dm³ ogni minuto), in minuti $x—240$ ne consumerà dm³ $\frac{200}{39}(x—240)$.

Trascorsi gli x minuti, il 1° avrà consumato $\frac{40}{9}x$ dm³ di gas, ed il 2° dm³ $\frac{200}{39}(x—240)$. Dovendo questo consumo essere eguale pei due becchi, avremo il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$\frac{200}{39}(x-240)=\frac{40}{9}x, \quad \text{ossia} \quad 9.200(x-240)=39.40x, \quad \text{ossia}$$

$$1800x-432000=1560x, \quad \text{ossia} \quad 240x=432000; \quad \text{da cui} \quad x=1800.$$

Il 1° becco starà acceso 1800 minuti, ossia 30 ore; il 2° 30—4=26 ore. Poichè il 1° consuma 4 m³ di gas in 15 ore, in 30 ore consumerà m³ 8.

Essendo unico il valore di x, unica sarà pure la soluzione del problema.

Risposta. *Ciascuno dei due becchi avrà consumato* 8 *m³ di gas.*

PROBLEMA 10°. *A possiede* 4000 *lire, ed il suo avere diminuisce di* 80 *lire all'anno; mentre B, che ha presentemente lire* 2500, *vede che il suo avere aumenta regolarmente di* 70 *lire all'anno. Fra quanti anni l'avere di B sarà eguale ai* $^5/_8$ *dell'avere di A?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni richiesto. Dopo x anni, l'avere di A sarà diminuito di $80x$ lire; e poichè presentemente A possiede lire 4000, dopo x anni possederà lire $4000—80x$.

Dopo gli x anni l'avere di B sarà aumentato di $70x$ lire; e B possederà lire $2500+70x$.

Ma, dopo questo tempo, l'avere di B deve eguagliare i $^5/_8$ dell'avere di A; avremo dunque il problema trascritto per mezzo dell'equazione:

$$2500+70x={}^5/_8(4000-80x), \quad \text{ossia} \quad 2500+70x={}^5/_8\times4000-{}^5/_8\times80x,$$

$$\text{ossia} \quad 2500+70x=2500-50x, \quad \text{ossia} \quad 70x+50x=2500-2500,$$

$$\text{ossia} \quad 20x=0; \quad \text{da cui} \quad x={}^0/_{20}=0.$$

Poichè il valore di x è unico, unica pure sarà la soluzione del problema.

Risposta. *L'avere di B sarà i* $^5/_8$ *di quello di A dopo zero anni; ossia lo è presentemente.* Ed infatti è appunto $2500={}^5/_8\times4000$.

PROBLEMA 11°. *Si trovino* 5 *numeri interi consecutivi tali che il quadruplo del numero di mezzo sia eguale alla somma degli altri.*

Risoluzione. Se x è il minore dei cinque numeri cercati, questi saranno rispettivamente x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$; il numero di mezzo sarà $x+2$; ed il problema potrà esser trascritto per mezzo dell'equazione:

$$4(x+2)=x+(x+1)+(x+3)+(x+4), \quad \text{ossia} \quad 4x+8=4x+8,$$
$$\text{ossia} \quad (4-4)x=8-8, \quad \text{ossia} \quad 0x=0, \quad \text{ossia} \quad x={}^0/_0.$$

Il simbolo ${}^0/_0$ è indizio di indeterminazione.

Risposta. *Il problema è indeterminato; ossia qualsiasi numero intero può essere il 1° dei cinque numeri cercati.*

PROBLEMA 12°. *Un padre ha 35 anni, ed il figlio 11. Fra quanti anni l'età del padre sarà eguale a quella del figlio?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni richiesto. Dopo x anni, l'età del padre sarà $35+x$, e quella del figlio $11+x$. Dovendo, dopo x anni, le due età essere eguali, si avrà il problema trascritto per mezzo dell'equazione:

$$11+x=35+x, \quad \text{ossia} \quad x-x=35-11, \quad \text{ossia} \quad 1.x-1.x=35-11,$$
$$\text{ossia} \quad (1-1)x=24, \quad \text{ossia} \quad 0.x=24; \quad \text{da cui} \quad x={}^{24}/_0=\infty.$$

Risposta. *Il simbolo ${}^{24}/_0$ ci dice che occorrerebbe un numero infinito di anni; cioè che il problema è impossibile.*

Osservazione. L'equazione ottenuta è l'esatta trascrizione del problema; ed essendo assurda, ci indica che anche il problema è assurdo. Poichè sappiamo che se due numeri sono eguali fra loro il loro quoto è l'unità, possiamo anche dire che le due età saranno eguali quando sarà $\frac{35+x}{11+x}=1$. Sappiamo inoltre che una frazione si accosta all' unità quando ai due termini si aggiunge un medesimo numero. Ora, ai due termini della frazione $\frac{35}{11}$ si aggiunge ogni anno un'unità; perciò, ogni anno la frazione si accosta all'unità; e col crescere indefinito di x, la frazione $\frac{35+x}{11+x}$ si accosta indefinitamente all' unità. Per acquistare il valore 1, bisognerebbe (se esistesse) aggiungere ai due termini di $\frac{35}{11}$ un numero x infinitamente grande. Intendiamo di dire tutto ciò quando diciamo che è $x=\infty$.

PROBLEMA 13°. *In un convito di 45 persone, gli uomini pagarono lire 5 ciascuno, e le donne lire 3 ciascuna. Sapendosi che si pagarono lire 210 in tutto, si domanda quanti erano gli uomini, e quante le donne.*

Risoluzione. Sia x il numero degli uomini; il numero delle donne sarà $45-x$. Gli uomini avranno pagato complessivamente lire $5x$; e le donne lire $3(45-x)$. Poichè la spesa totale fu di 210 lire, avremo l'equazione:

$$5x+3(45-x)=210, \quad \text{ossia} \quad 5x+135-3x=210,$$
$$\text{ossia} \quad 2x=75; \quad \text{da cui} \quad x={}^{75}/_2=37\,{}^1/_2.$$

Il numero degli uomini sarebbe $37\,{}^1/_2$, e quello delle donne $7\,{}^1/_2$. Ma ciò non può essere; dunque:

Risposta. *Il problema è impossibile.*

Osservazione. La soluzione $x=37\,{}^1/_2$ soddisfa all'equazione, ma non al problema; perchè questo conteneva la condizione non trascrivibile in equazione, che il numero cercato dovesse essere positivo ed intero. Variando opportunamente i dati numerici, si potrebbe togliere l'impossibilità del problema

PROBLEMA 14°. *Il mio avere aumenta regolarmente di 200 lire all'anno ed ho presentemente 3180 lire. Fra quanti anni il mio avere sarà tale che il suo doppio aumentato dei suoi ${}^4/_5$ dia una somma eguale a 7224 lire?*

Risoluzione. Sia x il numero d'anni cercato. Dopo x anni il mio avere sarà aumentato di $200x$ lire, e sarà eguale a lire $3180+200x$; ed i suoi $^4/_5$ saranno eguali a lire $(3180+200x)\frac{4}{5}$. Cosicchè avremo il problema trascritto per mezzo della seguente equazione:

$$(3180+200x).2+(3180+200x)\frac{4}{5}=7224 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ossia $6360+400x+2544+160x=7224$, ossia $560x=-1680$; da cui $x=-3$. Il problema non ammette soluzione.

Nella equazione (1) cambiamo il segno *a tutti e soli i termini contenenti l'incognita*, ed otterremo l'equazione:

$$(3180-200x)2+(3180-200x)\frac{4}{5}=7224 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Poichè la (1) ha per soluzione $x=-3$, pel teor. § 114, la (2) avrà per soluzione $x=3$.

Osservando ora che il mio avere presentemente è di 3180 lire, e che dopo x anni avrò lire $3180-200x$, si scorge subito che il mio avere diminuisce di 200 lire all'anno. Formulando allora il dettato del problema sulla equazione (2), avremo il seguente problema:

Problema modificato. *Il mio avere* **diminuisce** *regolarmente di* 200 *lire all'anno; ed ho presentemente* 3180 *lire. Fra quanti anni il mio avere sarà tale che il suo doppio aumentato dei suoi* $^4/_5$ *dia una somma eguale a* 7224 *lire?*

Questo problema ammetterà la risposta: *Dopo* 3 *anni.*

Osservazione. Quando la quantità di cui si cerca il valore ammette, nel caso di cui si tratta, un doppio senso, spesso si può ottenere un problema modificato lasciando inalterato tutto il dettato del problema, e cambiando solo il senso della domanda. Es. Nel problema precedente, la domanda è *Fra quanti anni ecc.;* perciò una soluzione positiva accenna ad un tempo futuro, ed una soluzione negativa accenna ad un tempo passato: ed il problema si poteva anche modificare così:

Problema. *Il mio avere aumenta regolarmente di* 200 *lire all'anno; ed ho presentemente* 3180 *lire.* ***Quanti anni fa*** *il mio avere era tale che il suo doppio aumentato dei suoi* $^4/_5$ *dava una somma eguale a* 7224 *lire?*

PROBLEMA 15°. *In un convitto la pensione è di L.* 15 *mensili; si paga inoltre per ogni alunno una sopratassa di entrata di L.* 50. *Voglio collocare i miei tre figli in quel convitto, e posso spendere solamente L.* 60 *in tutto. Per quanto tempo li potrò mantenere in convitto?*

Risoluzione. Sia x il numero dei mesi durante i quali posso tenere i figli in convitto. Poichè per ogni alunno si pagano L. 15 mensili, per 3 alunni e per x mesi, si pagheranno L. $15.3.x$. La sopratassa d'entrata pei 3 figli sarà di L. 50.3; ed in tutto spenderò L. $15.3.x+50.3$.

Ma voglio spendere solamente L. 60. Avremo quindi il problema trascritto per mezzo della seguente equazione: $15.3x+50.3=60$ . . . (1)
ossia $45x=-90$, ossia $x=-2$.

Questo risultato ci indica che il problema è impossibile; perchè, nel caso nostro, il numero dei mesi non può avere un doppio senso.

Cambiamo nella (1) il segno al solo termine contenente la x, ed otterremo l'equazione: $-15.3x+50.3=60$ . . . . (2)

La (2) ha la soluzione $x=2$; ma essa non è trascrivibile in linguaggio ordinario. Proviamo allora a cambiare il segno a tutti i termini della (2), ed otterremo l'equazione: $15.3x - 50.3 = -60$ . . . . (3)

La (3) è equivalente alla (2), ed al pari della (2) ammette la soluzione $x=2$. Ma neppure la (3) è trascrivibile in linguaggio ordinario. Dunque:

Risposta. *Conservando i medesimi dati numerici, il problema non è affatto modificabile.*

Osservazione. Ogni problema che non dia luogo alla soluzione $x=\infty$, si può sempre trasformare in un altro problema più generale, il quale ammetterà soluzione. Basta a tal fine dare al problema la forma seguente: *Si trovi un numero che ecc.* Es. Il problema precedente si potrebbe esprimere così: *Si trovi un numero il cui triplo moltiplicato per* 15 *e poi aumentato del triplo di* 50 *dia per risultato il numero* 60. E la risposta sarebbe: *Il numero cercato è* —2.

PROBLEMI.

493. Si divida il numero 46 in due parti tali che $^1/_7$ della prima più $^1/_3$ della seconda sia eguale a 10.

494. Si chiede un numero che superi di 98 i $^5/_7$ di se stesso.

495. Aggiungendo 7 $^1/_3$ ai $^{23}/_4$ d'un numero, oppure togliendo 1 $^2/_3$ dai suoi $^{15}/_2$, si ottiene lo stesso risultato. Qual'è questo numero?

496. Si pianta un palo nell'alveo d'un fiume in modo che $^1/_4$ della sua lunghezza sia nella terra, $^1/_3$ nell'acqua, e 10 metri fuor d'acqua. Dicasi la lunghezza del palo e la profondità del fiume.

497. Si dividano 100 lire fra tre persone in modo che la 3ª abbia 5 lire meno della 2ª, e questa 10 lire più della 1ª.

498. Un'aritmetica chinese contiene il seguente quesito: In una stalla vi sono dei fagiani e dei conigli, i quali hanno tutti insieme 100 piedi e 36 teste. Si domanda quanti fagiani vi sono e quanti conigli.

499. Un padre ed i suoi due figli hanno fra tutti 60 anni. L'età del primogenito è tripla di quella del fratello; e quella del padre è doppia della somma dell'età dei due figli. Qual'è l'età di ciascuno?

500. Un ozioso, dal suo 18mo anno fino alla morte, dormì per $^3/_8$ della sua vita; $^1/_{16}$ lo consumò in mangiare e bere, $^1/_4$ nel passeggiare, $^1/_{16}$ nello star seduto, e $^3/_{16}$ nel giuocare; 2 soli anni dedicò al lavoro. Si domanda di quanti anni morì?

501. Spendo 1920 lire nella compera di un cavallo, d'una vettura e di un biroccino. Il prezzo del biroccino è la quinta parte di quello del cavallo; e la vettura costa il doppio del cavallo. Quanto costa il cavallo, quanto la vettura e quanto il biroccino?

502. Cerca l'età del mio fratellino sapendo che si ottiene lo stesso risultato, o moltiplicandola per 7, od aggiungendovi 7.

503. Dovendosi eleggere uno dei candidati *A* e *B*, votano 2143 persone, viene eletto *A* con una maggioranza di 193 voti. Quanti voti otten ciascuno?

504. Venere parlò un giorno in questa maniera ad Ero che costernato le e venuto dappresso: « Qual cordoglio ti aggrava, o mio figlio? » E rispose: « Le Muse affollandosi nel mio giardino m'involarono dal se le poma che io aveva colte sull' Elicona. Clio me ne prese il quin

Euterpe il duodecimo, Talia l'ottavo, Melpomene il ventesimo, Tersicore il quarto, Erato il settimo, Polimnia 30, Urania 120, Calliope 300. Io ne vengo a te quasi con le mani vuote, le Dee non mi lasciarono che 50 poma. » Quante poma aveva Ero dapprincipio? (Dal greco).

505. A Pietroburgo, nel principio di gennaio, la notte supera il giorno di 13 ore. Quanto dura il giorno e quanto la notte?

506. Si sa che vicino ai poli il sole non sorge d'inverno per un certo tempo, e per un tempo eguale non tramonta d'estate. Cerchisi la durata della notte continua al 77° grado di latitudine, sapendo che il tempo in cui nelle 24 ore il sole sorge e tramonta la supera di 45 giorni.

507. « O gentile Pitagora, degno rampollo delle Muse d'Elicona, dimmi un po' quanti giovani hai tu in casa pronti a discendere ad un tuo cenno nell' arringo della scienza, ed a combattere con ardore per il premio dovuto alla vittoria? » gli chiese un giorno Policrate. « Te lo dico subito » gli rispose Pitagora. « Una metà coltiva la matematica; un quarto si dedica allo studio della natura; un settimo ascolta con rigoroso silenzio le mie parole, custodendo entro di sè la dottrina acquistata; oltre di ciò ho tre donne, fra cui primeggia Teano. Tanti sono i Sacerdoti che io educo alle Muse » (Dal greco).

508. Un ragazzo che custodiva un piccolo numero di pecore fu avvicinato da un altro della sua età che per burla gli chiese la metà delle sue pecore. « Se io avessi sei volte, più $^2/_3$, più $^3/_4$, più $^5/_6$ il numero delle pecore che possiedo, e te pure, avrei in tutto cento capi da custodire » gli rispose l'altro. Quante pecore aveva egli?

509. Sul sepolcro di Diofanto, celebre matematico greco, si leggeva la seguente iscrizione: « Questo grandioso monumento racchiude le spoglie di Diofanto; sulla fredda pietra l'Aritmetica incise l'età. Un sesto della sua vita gli fu concesso dal suo Dio di passare nella fanciullezza; un duodecimo dopo gli si coprirono del primo pelo le guance; un settimo dopo prese moglie; cinque anni più tardi gli nacque un figliuolino, il quale fu colto dalla morte quando aveva la metà degli anni del padre. Questi, addolcendo il suo dolore coll'arte dei numeri, visse ancora quattro anni ». Di quale età morì Diofanto? (Dal greco).

510. Sessanta persone spesero 318 lire in un pranzo; si domanda quanti uomini e quante donne vi erano, sapendo che quelli pagarono 6 lire ciascuno, e queste 4 lire ciascuna.

511. Onorato, che si esercita al tiro, riceve 3 lire per ogni colpo giusto, e ne paga una per ogni colpo fallito. Ora, dopo aver sparati 100 colpi, egli non ha nulla da ricevere e nulla da dare. Quante volte tirò giusto?

512. Un numero consta di sei cifre, di cui la 1ª a sinistra è 4; se questa si trasporta nel 1° posto a destra, il numero risultante è i $^2/_3$ del primo. Si trovi il primo numero.

513. La somma delle tre cifre componenti un numero è 13. La cifra delle unità vale tre volte quella delle centinaia; ed aumentando il numero di 396, si ottiene per somma lo stesso numero colle cifre scritte in ordine inverso. Si cerchi il numero.

514. Si chiede quanti salti dovrà fare un cane per raggiungere una lepre che ne ha già fatto 60, sapendo che mentre il cane fa 6 salti la lepre ne fa 9, e che 7 di questi valgono soltanto 3 di quelli.

515. Della mia paga giornaliera, io spendo la metà nel vitto, ed un terzo

in altre spese. Dopo 40 giorni posso mettere in serbo 30 lire. Qual'è la mia paga giornaliera?

516. Si trovi quel numero i cui $^2/_7$ aumentati dei 291 millesimi del numero stesso danno per risultato 0,0027.

517. Si divida il numero 200 in due parti tali che dividendo la prima per 16 e la seconda per 10, la differenza dei quoti sia 6.

518. La differenza di due numeri è 496; il loro quoto è 4, ed il resto della loro divisione è 60. Quali sono questi due numeri?

519. Una donna greca recatasi al tempio di Giove pregava il nume a raddoppiarle il danaro che aveva portato seco. Esaudita nella sua domanda, gli offrì in ringraziamento due dramme. Col rimanente danaro andò al tempio di Apollo, fece la stessa domanda, fu esaudita, e offrì in ringraziamento due dramme. Dopo ciò, numerando il suo danaro, lo trovò con suo piacere doppio di quello che era dapprincipio. Quanto danaro aveva seco?

520. Una persona ha L. 1300 distribuite in tre sacchetti di colori rispettivamente bianco, rosso e nero. Nel bianco c'è il doppio di quanto trovasi nel rosso, e nel nero la quarta parte di quanto vi è nei due sacchetti bianco e rosso. Qual somma si trova in ciascun sacchetto?

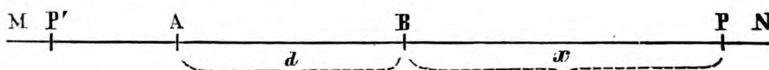
521. Due treni partono l'uno all'incontro dell'altro da due città distanti fra di loro km. 141, e la velocità dell'uno è i $^3/_4$ di quella dell'altro. Sapendosi che il 1° parte alle 10 antim. e l'altro alle 7 antim., e che si incontrano alle 3 pom., si domanda con quale velocità cammina ciascun treno.

522. Con due recipienti A e B che contengono eguali quantità di vino, si fanno le seguenti operazioni: dal 1° si tolgono 3 litri di vino e si versano nell'altro; indi si prende la metà del vino contenuto nel 2° e si versa nel 1°; e poi i $^3/_5$ del vino contenuto nel 1° e si versano nel 2°. Dopo quest'ultima operazione si trova che il 1° recipiente contiene 14 litri meno del 2°. Quanto vino v'era dapprima in ciascun recipiente?

523. Una contadina portò a vendere al mercato un certo numero di uova. Dapprima ne vendette la metà, più mezzo uovo, senza romperne alcuno; indi la metà del residuo, più un mezzo uovo; e così fece cinque volte di seguito, dopo di che rimase con un uovo solo. Quante uova portò al mercato?

DISCUSSIONE DEI PROBLEMI DI 1° GRADO AD UNA INCOGNITA.

PROBLEMA 1°. *Due mobili percorrono la retta MN con velocità costante andando da M verso N. La velocità del 1° è di v metri al minuto, e quella del 2° di v' metri al minuto.* * *In un certo istante si trovano il 1° in A ed il 2° in B. Si domanda in quale punto della retta MN i due mobili si incontreranno.*



Risoluzione. Sia d la distanza AB. Sia P il punto d'incontro, e sia $BP=x$ metri. Avremo trovato il punto P se troveremo il valore di x. Per mettere il problema in equazione, ci è comodo introdurre nelle nostre considerazioni una nuova grandezza, cioè *il tempo*. Poichè i mobili si trovano in

* Dicendo che la velocità è di v metri al minuto, si intende dire che il mobile percorre v metri al minuto.

un dato istante l'uno in A e l'altro in B, e poi in un altro istante si trovano contemporaneamente in P, è segno che mentre il 1° mobile percorre lo spazio $AP = AB + BP = d + x$, il 2° percorre lo spazio $BP = x$.

Poichè il 1° percorre v metri al minuto, per percorrere $d+x$ metri impiegherà $\frac{d+x}{v}$ minuti; ed il 2°, che percorre v' metri al minuto, per percorrere x metri impiegherà $\frac{x}{v'}$ minuti.

Poichè il tempo impiegato dal 1° mobile a percorrere lo spazio $AP = d + x$ è eguale al tempo impiegato dal 2° mobile a percorrere lo spazio $BP = x$, avremo l'equazione: $\frac{x}{v'} = \frac{d+x}{v}$ . . . . (1)

e moltiplicandone ambi i membri pel prodotto vv', si ottiene:
$xv = (d+x)v'$, ossia $xv = dv' + xv'$, ossia $x(v-v') = dv'$ . . . (1')

Discussione. Cominciamo ad osservare che la (1) fu scritta nell'ipotesi che v e v' fossero ambedue diversi da zero; perchè, se fossero eguali a zero, non si sarebbe potuto dividere x per v', nè $d+x$ per v. Ciò del resto concorda con la natura del problema; poichè, se la velocità è *zero*, è segno che lo spazio percorso ogni minuto è nullo, ossia che il mobile sta fermo; ed allora non siamo più nel caso considerato dal problema. Escluderemo quindi dalla nostra considerazione i valori $v=0$, $v'=0$. Allora, essendo v, v' diversi da *zero*, tale sarà pure il prodotto vv', e la (1') sarà equivalente alla (1).

Sappiamo che le velocità si sogliono chiamare positive, se lo spazio è percorso in un senso; negative se è percorso nel senso contrario. Perciò potremo convenire di chiamare positive le velocità quando lo spazio è percorso andando da M verso N; negative quando è percorso andando da N verso M.

Nel nostro caso, siccome supponiamo che i mobili vadano sempre da M verso N, le velocità v, v' saranno sempre positive. La distanza d è poi essenzialmente positiva e maggiore di zero.

Conveniamo inoltre di chiamare positivo lo spazio x quando il punto P è alla destra di B, e negativo quando il punto P è alla sinistra di B.

Se $v-v'$ è diverso da zero, potremo dividere ambi i membri della (1') per $v-v'$, ed otterremo $x = \frac{dv'}{v-v'}$ . . . . (2)

Ma se $v-v'=0$, non potremo ciò fare, e dovremo fermar la nostra considerazione sulla (1').

Dunque le formole che dobbiamo discutere sono: la (2) quando $v-v'$ è diverso da zero, e la (1') quando è $v-v'=0$.

Cerchiamo ora quale relazione deve esistere fra le velocità dei due mobili affinchè x sia positivo, negativo o nullo.

Essendo per ipotesi d, v' diversi da zero e positivi, tale sarà dv', e quindi x non potrà mai essere nullo. Esso poi sarà positivo o negativo secondochè tale sarà $v-v'$. Basterà quindi cercare quali relazioni devono esistere fra d, v, v' affinchè x sia positivo o negativo.

1° Caso. $v-v'$ diverso da zero. Affinchè x sia positivo, dovrà essere positivo $v-v'$, ossia essere $v > v'$. Essendo unico il valore del prodotto dv', sarà pure unico il valore del resto $v-v'$, e quindi sarà unico il valore del quoto $\frac{dv'}{v-v'}$, ossia il valore di x. Perciò il problema ha una sola soluzione.

Risposta. *Se è $v > v'$, il punto P esiste alla destra di B, ed è unico.*

Osservazione. Ciò è conforme alla natura del problema; poichè siccome il mobile che è ora in A ha velocità maggiore di quello che è ora in B, certamente finirà per incontrare o presto o tardi l'altro mobile, e lo incontrerà in un punto P alla destra di B.

Affinchè sia x negativo, dovrà essere negativo $v-v'$, ossia dovrà essere $v < v'$. Se osserviamo che la (2) si può scrivere:

$$x = \frac{dv'}{v-v'} = \frac{dv'}{-(v'-v)} = -d\frac{v'}{v'-v}$$

vediamo che il valore numerico di x è eguale al prodotto di d per la frazione $\frac{v'}{v'-v}$. Questa frazione è maggiore dell'unità, perchè il numeratore v' è maggiore del denominatore $v'-v$. Dunque il valore numerico di x è maggiore di d. Da ciò segue che la soluzione negativa $x = -d\frac{v'}{v'-v}$ indica un incontro in un punto P' posto alla sinistra non solo di B, ma anche di A. Il valore numerico di x è, come nel caso precedente, unico.

Risposta. *Se è $v < v'$, il punto P esiste alla sinistra di B e di A, ed è unico.*

Osservazione. Questa soluzione ci dice che i due mobili si incontrarono già in un punto P' prima di giungere l'uno in B e l'altro in A, e che non si incontreranno più; cosa che appare evidente, essendochè il mobile che è in B va più veloce di quello che è in A.

2º Caso. *$v-v'$ eguale a zero.* La (1') prende la forma $0.x = dv'$; e la formola risolutiva dell'equazione dà $x = \frac{dv'}{0} = \infty$, il che è indizio di impossibilità.

Risposta. Se è $v = v'$, il punto cercato dovrebbe trovarsi ad una distanza infinita da B; e quindi non esiste. Ne segue che il problema è impossibile.

Osservazione. Questo risultato è conforme alla natura del problema; poichè, se i mobili presentemente sono uno in A e l'altro in B, e procedono verso N con eguale velocità, non si incontreranno mai.

PROBLEMA 2º. *Si conduca una tangente comune esternamente a due cerchi dati.*

Risoluzione. Siano O, O' i centri dei due cerchi dati; R ed R' i rispettivi raggi; ed OO' la retta che passa pei centri dei due cerchi. Posso considerare come risolto il problema se trovo il punto M in cui la tangente cercata incontra la retta dei centri: poichè, allora, tirando da M la tangente ad uno dei due cerchi, questa sarà anche tangente all'altro cerchio, e sarà la tangente cercata. Per trovare M basta trovare la distanza che esso ha da uno dei due centri p.e. da O'. Poniamo dunque $x = O'M$. Sarà allora, chiamando d la distanza OO', $OM = d + x$.

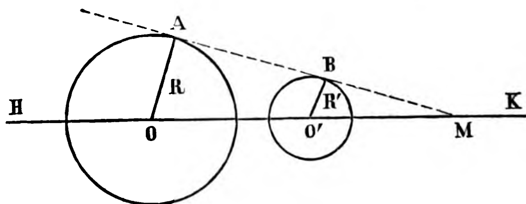


Fig. 1.

Sia poi ABM la tangente cercata; e siano A e B i punti di contatto di essa coi due cerchi. Tirando i raggi OA, $O'B$, si ottengono i due triangoli AOM e $BO'M$ i quali hanno l'angolo in M in comune, e l'angolo in A eguale all'angolo in B perchè ambedue retti. I due triangoli sono dunque simili, ed avranno perciò i lati omologhi proporzionali. In particolare avremo:

$$O'M : O'B = OM : OA.$$

Poichè si ha $O'M = x$, $OM = d + x$, $O'B = R'$, $OA = R$, sostituendo questi valori nella proporzione precedente, si ha: $x : R' = (d+x) : R$; da cui $xR = (d+x)R'$, ossia $xR = dR' + xR'$; da cui

$$x(R - R') = dR' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Se $R - R'$ è diverso da zero, potremo dividere ambi i membri della (1) per $R - R'$, ed avremo l'equazione equivalente $x = \frac{dR'}{R - R'}$ . . . . (2)

Ma se $R - R' = 0$, non potremo ciò fare, e dovremo fermarci a considerare l'equazione (1). Le formole che dobbiamo discutere saranno perciò: la (2) pel caso di $R - R'$ diverso da zero, e la (1) pel caso di $R - R' = 0$.

Discussione. Conveniamo di contare la lunghezza x da O' verso K quando x è positivo, da O' verso H quando x è negativo. Cominciamo ad osservare che, per la natura del problema, i tre numeri d, R, R' sono sempre essenzialmente positivi e maggiori di zero; epperciò il prodotto dR' sarà positivo e diverso da zero, e quindi il valore di x non potrà mai essere *zero*. Ci rimane quindi a cercare quali relazioni devono esistere fra d, R, R' affinchè x sia positivo, oppure sia negativo.

1° Caso. $R - R'$ diverso da zero. Essendo positivo il numeratore della (2), x sarà positivo o negativo secondochè tale sarà il denominatore $R - R'$. In ogni caso però, essendo unico il valore di dR', ed unico il valore di $R - R'$, il valore del quoto $\frac{dR'}{R - R'}$, ossia di x, esisterà e sarà unico.

Riguardo alla posizione del punto M, possiamo osservare che:

1°. *Se x è positivo*, M è alla destra di O' *(fig. 1)*. Inoltre M deve evidentemente essere esterno al cerchio O'; ed affinchè ciò accada, deve essere $x \geqq R'$. Ora $x = \frac{dR'}{R - R'} = \frac{d}{R - R'} R'$; e quindi sarà $x \geqq R'$ secondochè sarà $\frac{d}{R - R'} \geqq 1$.

Se $\frac{d}{R - R'} > 1$, ossia $d > R - R'$ (per un noto teorema di geometria) ciascuno dei due cerchi ha punti fuori dell'altro; ed essendo poi $x > R'$, il punto M è fuori del cerchio O'.

Se $\frac{d}{R - R'} = 1$, ossia $d = R - R'$, (per un noto teorema di geometria) i due cerchi sono tangenti internamente; ed essendo $x = R'$, il punto M è sul cerchio O' nel punto di contatto dei due cerchi.

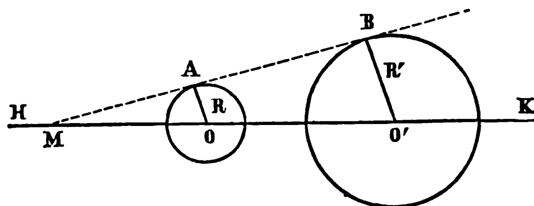


Fig. 2.

2°. *Se x è negativo*, M è alla sinistra di O' (*fig. 2*). Esso poi deve essere esterno a ciascuno dei due cerchi.

Osserviamo intanto che M sarà non solo alla sinistra di O', ma anche di O. Infatti la (2) può anche scriversi così: $x = \frac{dR'}{R-R'} = \frac{dR'}{-(R'-R)} =$ $= -d\frac{R'}{R'-R}$; da cui si vede che il valore numerico di x è il prodotto della distanza d per la frazione $\frac{R'}{R'-R}$. Ma, in questa frazione, è evidentemente $R' > R'-R$: dunque la frazione è maggiore dell' unità; e perciò il valore numerico di $-d\frac{R'}{R'-R}$, ossia di x, è maggiore di d.

Affinchè poi M sia esterno a ciascuno dei due cerchi, deve essere in valore assoluto $x \geqq d+R$, ossia $\frac{dR'}{R'-R} \geqq d+R$, ossia * $dR' \geqq (d+R)(R'-R)$, ossia $dR' \geqq dR' + RR' - dR - R^2$, ossia ** $0 \geqq RR' - R^2 - dR$, ossia ancora $0 \geqq R(R'-R-d)$.

Essendo $R > 0$, affinchè possa essere $0 \geqq R(R'-R-d)$, deve essere $0 \geqq R'-R-d$, cioè *** $d \geqq R'-R$.

Se è $d > R'-R$, ciascuno dei due cerchi ha punti fuori dell'altro. Essendo poi $x > d+R$, il punto M è fuori dei due cerchi.

Se è $d = R'-R$, i due cerchi sono tangenti internamente. Essendo poi $x = d+R$, il punto M è sul cerchio O, e nel punto di contatto dei due cerchi.

2º Caso. $R-R'=0$. La (1) prenderà la forma $0.x = dR'$ la cui formola risolutiva sarà $x = \frac{dR'}{0} = \infty$. Ciò ci dice che il punto M d'incontro della tangente colla retta dei centri è a distanza infinita dal punto O; ossia che le due rette non si incontreranno (*fig.* 3). Esse quindi saranno parallele.****

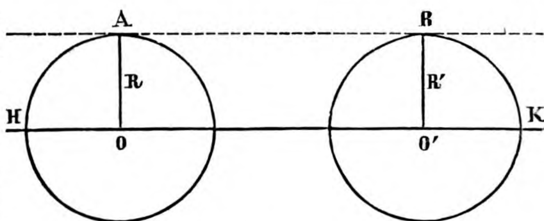


Fig. 3.

Riassumendo si ha:

Risposta. *Se è $R > R'$, il punto M è alla destra di O'. Esso poi è fuori del cerchio O', oppure sul cerchio O', secondochè è $d > R-R'$, oppure $d = R-R'$.*

---

* Moltiplicando ambi i membri pel numero positivo $R'-R$.

** Sopprimendo il termine dR' comune ai due membri.

*** Aggiungendo d ad ambi i membri.

**** Il simbolo $x = {}^m/_0 = \infty$ in questioni numeriche è sempre indizio di impossibilità, poichè non esiste un numero infinitamente grande. In questioni geometriche, alcune volte, è indizio di impossibilità; altre volte invece indica una soluzione particolare del problema. P.e. se $x = \infty$ indica che l'incontro di due rette, o d'una retta e d'un piano, oppure di due piani, avviene a distanza infinita, ciò significa che le due rette, o la retta ed il piano, od i due piani sono paralleli. Se $x = \infty$ fosse il valore della tangente trigonometrica di un angolo o di un arco, sarebbe indizio che vi sono infiniti angoli ed infiniti archi aventi quella tangente; e che il più piccolo di questi angoli è l'angolo retto, e che il più piccolo di questi archi è il quadrante.

Se è $R < R'$, il punto M è alla sinistra non solo di O' ma anche di O. Esso poi è fuori del cerchio O, oppure sul cerchio O, secondochè è $d > R' - R$, oppure $d = R' - R$.

Se è $R = R'$, la tangente e la retta dei centri sono parallele.

Osservazione. Nella risoluzione di questo problema abbiamo messo per ipotesi che R ed R' fossero diversi da zero, ossia che ciascuno dei due cerchi non si riducesse ad un punto; perchè se fosse $R = 0$, oppure $R' = 0$, non potremmo più scrivere la proporzione $x : R' = (d + x) : R$ che ci servì per la risoluzione del problema. Abbiamo inoltre supposto che fosse $d > 0$.

Possiamo ora considerare che cosa avviene se è $d = 0$. In questo caso la proporzione $x : R' = (d + x) : R$ diverrebbe $x : R' = x : R$, la quale non può sussistere se non è anche $R = R'$. In tal caso la (1) prende la forma $x.0 = 0.R'$, ossia $x.0 = 0$, la cui formola risolutiva è $x = 0/_0$, il che è simbolo di indeterminazione.

Per interpretarne il significato geometrico, osserviamo che, essendo $d = 0$, il centro O coincide col centro O'; epperciò qualunque retta passante per O può chiamarsi la retta dei centri. Inoltre, essendo ancora $R = R'$, i due cerchi sono eguali, ed avendo il centro in comune coincidono, e qualunque tangente ad uno dei cerchi è anche tangente all'altro. Inoltre sopra ogni retta passante per O, vi sono infiniti punti da cui si può tirare una tangente comune ai due cerchi coincidenti.

PROBLEMI.

524. Due operai fanno rispettivamente a metri e b metri di lavoro al giorno, ed il 1° ha già fatto m metri più del 2°. Fra quanto tempo avranno fatto lo stesso numero di metri di lavoro?

525. Si scomponga ciascuno dei due numeri a e b in due parti, per modo che la 1ª parte di a contenga m volte la 1ª parte di b, e che la 2ª parte di b contenga m volte la 2ª parte di a.

526. Si divida il numero m in due parti tali che la 1ª divisa per a, meno la 2ª divisa per b, dia per risultato d.

527. Sulla base di un triangolo si trovi un punto tale che la somma delle distanze da esso agli altri due lati sia m.

528. Parallelamente alle basi d'un trapezio si conduca un segmento che abbia gli estremi sopra gli altri due lati, ed abbia una lunghezza data m.

529. Le lunghezze di due lati d'un triangolo sono a, b. Si trovi sul 1° lato un punto tale che, tirando da esso la parallela al 2° lato, il segmento di questa parallela che sarà interno al triangolo abbia la lunghezza l. Entro quali limiti può variare l?

530. Un corpo che fa m metri ogni a minuti, parte da un luogo A; t minuti prima, parte nella medesima direzione da un luogo situato d metri più avanti, un secondo corpo che fa n metri ogni b minuti. Quando si raggiungeranno i due corpi? Quale relazione deve sussistere fra le quantità $a, m, t, d, b, n,$ affinchè la soluzione sia possibile?

531. Un corpo che fa m metri ogni a minuti, parte da un luogo A; t minuti dopo, parte nella medesima direzione da un luogo situato d metri più indietro, un secondo corpo che fa n metri ogni b minuti. Quando si raggiungeranno i due corpi? Quale relazione deve sussistere fra le quantità $a, m, t, d, b, n,$ affinchè la soluzione sia possibile?

Equazioni di 1° grado a due incognite.

532. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

533. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$

534. $\begin{cases} 3x + 5y = 20 \\ 2x - 10y = 0 \end{cases}$

535. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y = 1 \\ \frac{1}{5}x + 2y = -1 \end{cases}$

536. $\begin{cases} 2\frac{3}{7}x - \frac{3}{4}y = 116 \\ 1\frac{3}{5}x - y = 40 \end{cases}$

537. $\begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 6,3 \\ \frac{x}{3} + \frac{53y}{56} = 39,2 \end{cases}$

538. $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x = 1\frac{1}{3}y + 4\frac{5}{12} \\ 4\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}y - 21\frac{7}{12} \end{cases}$

539. $\begin{cases} \frac{13+x}{7} + \frac{3x-8y}{3} = x + y - 5\frac{1}{3} \\ \frac{11-x}{2} + \frac{4x+8y-2}{9} = 8 - (y - x) \end{cases}$

540. $\begin{cases} \frac{1}{3}(3x-2y) + 1 + \frac{1}{8}(11y-10) = \frac{1}{7}(4x-3y+5) + \frac{1}{5}(45-x) \\ 45 - \frac{1}{3}(4x-2) = \frac{1}{18}(55x+71y+1) \end{cases}$

541. $\begin{cases} \frac{5y}{6} - \frac{4y-19}{3} = \frac{x}{6} + \frac{20-2y}{3} \\ \frac{x+5y}{6} + 5 = \frac{2y+21}{3} \end{cases}$

542. $\begin{cases} 10\{x + 9(y - 8[x+7])\} = 6 \\ 5\{x + 4(y - 3[x+2])\} = 1 \end{cases}$

543. $\begin{cases} 2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \frac{x-4}{6} = 29 \end{cases}$

544. $\begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9 \\ \frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5 \end{cases}$

545. $\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10 \end{cases}$

546. $\begin{cases} 5(x-2) = y + 2 \\ x + 5 = 3(y-5) \end{cases}$

547. $\begin{cases} 2(2x+3y) = 3(2x-3y) + 10 \\ 4x - 3y = 4(6y-2x) + 3 \end{cases}$

548. $\begin{cases} \frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8 \\ \frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4 \end{cases}$

549. $\begin{cases} \frac{7y+13-5x}{4} + y = 2x - \frac{3y+2(x-8)}{3} \\ \frac{2x+5y}{6} - \frac{3x-4(3-2y)}{5} + x = 4 - \frac{15+2y-4x}{3} \end{cases}$

550. $\begin{cases} \left(20 - \frac{4x-5y}{9}\right) : \frac{29-x}{6} = 3 \\ \frac{3x-4y}{7} - x - 16 = x + 2y - \frac{9x+3y-1}{13} \end{cases}$

551. $\begin{cases} (x+5)(y+7)=(x+1)(y-9)+112 \\ 2x+10=3y+1 \end{cases}$

552. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 \\ bx-ay=0 \end{cases}$ 553. $\begin{cases} x+y=a+b \\ bx+ay=2ab \end{cases}$ 554. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1 \end{cases}$

555. $\begin{cases} (a+c)x-by=bc \\ x+y=a+b \end{cases}$ 556. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=c \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=0 \end{cases}$ 557. $\begin{cases} x+y=c \\ ax-by=c(a-b) \end{cases}$

558. $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \\ a(x-y)+b(x+y)=1 \end{cases}$ 559. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=0 \\ \dfrac{x+y-b}{a}+\dfrac{x-y-a}{b}=0 \end{cases}$

560. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2 \end{cases}$ 561. $\begin{cases} ax=by+\dfrac{a^2+b^2}{2} \\ (a-b)x=(a+b)y \end{cases}$

562. $\begin{cases} ax+by=2(a^2-b^2) \\ \dfrac{y}{a-b}-\dfrac{x}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{cases}$ 563. $\begin{cases} (a+2b)x-(a-2b)y=6ac \\ (a+3c)y-(a-3c)x=4ab \end{cases}$

564. $\begin{cases} \dfrac{a}{a+c}x-y=\dfrac{a-c}{b}-\dfrac{a}{a+c}y \\ \dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{b}{ac} \end{cases}$

RISOLUZIONE DI ALCUNI PROBLEMI PER MEZZO DI UN SISTEMA DI DUE EQUAZIONI DI 1° GRADO CON DUE INCOGNITE.

PROBLEMA 1°. *Si trovino due numeri conoscendone la somma a e la differenza b.*

Risoluzione. Sia x il numero maggiore, ed y il minore; si avrà il sistema (1).

$$(1)\quad \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni, si ha: $2x=a+b$; da cui $x=\dfrac{a+b}{2}$. Sottraendo invece la 2ª equazione dalla 1ª, si ha: $2y=a-b$; da cui $y=\dfrac{a-b}{2}$.

Essendo unico il valore di a, ed unico quello di b, unico sarà il valore di x, ed unico quello di y; ed il problema avrà una ed una sola soluzione.

Risposta. *I due numeri cercati sono:* $x=\dfrac{a+b}{2}$, $y=\dfrac{a-b}{2}$.

Osservazione. Se fosse p.e. $a=15$, $b=11$, sarebbe $x=\dfrac{15+11}{2}=13$, $y=\dfrac{15-11}{2}=2$.

Se fosse $a=20$, $b=12$, sarebbe $x=\frac{20+12}{2}=16$, $y=\frac{20-12}{2}=4$.

Se fosse $a=17$, $b=10$, sarebbe $x=\frac{17+10}{2}=13\frac{1}{2}$, $y=\frac{17-10}{2}=3\frac{1}{2}$.

Se fosse $a=14$, $b=18$, sarebbe $x=\frac{14+18}{2}=16$, $y=\frac{14-18}{2}=-2$.*

PROBLEMA 2°. *Se avessi comperato 5 metri di meno di stoffa a lire 2 di più al metro, avrei speso 29 lire di più. Ma se avessi comperato 2 metri di più di stoffa a lire 3 di meno al metro, avrei speso 37 lire di meno. Quanti metri di stoffa ho comperato ed a qual prezzo?*

Risoluzione. Se x è il numero dei metri comperati, ed y il prezzo di ciascun metro, io ho speso yx lire. Ma se avessi comperato 5 metri di meno a lire 2 di più al metro, avrei comperato $x-5$ metri a lire $y+2$ al metro, ed avrei speso $(y+2)(x-5)$ lire. Ma in questo caso avrei speso 29 lire di più di quanto ho speso; sarà dunque $(y+2)(x-5)=yx+29$.

Analogamente sarà $(y-3)(x+2)=yx-37$.

Il problema resta quindi trascrivibile per mezzo del sistema (A):

$$(A)\begin{cases}(y+2)(x-5)=yx+29 & \dots (1)\\ (y-3)(x+2)=yx-37 & \dots (2)\end{cases} \qquad (A')\begin{cases}2x-5y=39\\ -3x+2y=-31\end{cases}$$

Ordinando le due equazioni, si ha:

Dalla (1), $yx+2x-5y-10=yx+29$, ossia $2x-5y=39$.

Dalla (2), $yx-3x+2y-6=yx-37$, ossia $-3x+2y=-31$.

Ed allora il sistema (A) si trasforma nel sistema equivalente (A').

Risolvendo il sistema (A'), si ottiene $x=7$, $y=-5$. Ora il prezzo d'una merce non può essere negativo. Dunque la soluzione negativa $y=-5$ ci dice che il problema è impossibile. Proviamo a modificare (se è possibile) il problema in modo da avere la soluzione positiva $x=7$, $y=5$.

Nel sistema (A), che è la immediata trascrizione del problema, proviamo a cambiare il segno a tutti i coefficienti di y, ed avremo il sistema (B):

$$(B)\begin{cases}(-y+2)(x-5)=(-y)x+29\\ (-y-3)(x+2)=(-y)x-37\end{cases} \qquad (B')\begin{cases}(y-2)(x-5)=yx-29\\ (y+3)(x+2)=yx+37\end{cases}$$

Questo sistema (B) ha per soluzione $x=7$, $y=5$; ma non è trascrivibile in linguaggio ordinario, perchè il prezzo y d'una merce non può essere negativo. Cambiamo perciò il segno a tutti i termini delle due equazioni del sistema (B), ricordando anche che per cambiare il segno ad un prodotto, basta cambiare il segno ad un solo fattore; ed avremo il sistema (B'), il quale ha per soluzione $x=7$, $y=5$; inoltre, esso è trascrivibile in linguaggio ordinario, e corrisponde al seguente:

Problema modificato. *Se avessi comperato 5 metri di meno di stoffa a lire 2 di meno al metro, avrei speso 29 lire di meno. Ma se avessi comperato*

---

* Talora, di alcune quantità che si suppongono note il problema accenna appena l'esistenza. Per mettere in equazione il problema è necessario esprimere esplicitamente il valore di queste quantità. ESEMPIO 1°. Il problema precedente spesso si enuncia così: *Si trovino due numeri di cui si conosce la somma e la differenza.* Per risolverlo si dica così: *Sia x il numero maggiore, y il minore; sia a la somma conosciuta, e b la differenza conosciuta.* Si avrà allora $x+y=a$, $x-y=b$, ecc. ESEMPIO 2°. *Due numeri la cui somma è a stanno fra loro in un dato rapporto. Si trovino i due numeri.* Per mettere questo problema in equazione, si può ragionare così: *Sia x il numero maggiore, ed y il minore; e sia m il rapporto del maggiore al minore. Il numero m è conosciuto, ed avremo:* $\frac{x}{y}=m$, $x+y=a$, ecc.

2 metri di più di stoffa a lire 3 di più al metro, avrei speso 37 lire di più. Quanti metri di stoffa ho comperato ed a qual prezzo?

PROBLEMA 3°. *Un tale ha due botti, ed in ognuna di esse una certa quantità di vino. Per averne una quantità eguale in ambedue, versa dalla 1ª nella 2ª tanto quanto vi era già in questa; indi dalla 2ª nella 1ª tanto quanto ha la 1ª; e da questa nella 2ª tanto quanto ha la 2ª. Alla fine trova in ogni botte 80 litri. Quanti litri di vino v'erano dapprincipio in ciascuna botte?*

Risoluzione. Sia x il numero dei litri che ha la 1ª botte, ed y il numero dei litri che ha la 2ª.

Se verso nella 2ª botte quanto vi è già in essa, dopo questa prima operazione vi sarà nella 2ª botte il doppio di prima, ossia $2y$ litri; e nella 1ª botte vi saranno gli x litri che v'erano, meno gli y tolti, ossia litri $x-y$.

Se ora nella 1ª botte verso quanto vi è già, avrò nella 1ª botte il doppio di ciò che vi è, cioè litri $2(x-y)$; e nella 2ª botte vi saranno i $2y$ litri di prima, meno gli $x-y$ litri tolti, cioè litri $2y-(x-y)=3y-x$.

E così per la 3ª operazione.

Ci è utile disporre così la soluzione del problema.

	1ª botte	*2ª botte*
In principio	x	y
Dopo la 1ª operazione	$x-y$	$2y$
Dopo la 2ª operazione	$2(x-y)$	$2y-(x-y)=3y-x$
Dopo la 3ª operazione	$2(x-y)-(3y-x)=3x-5y$	$2(3y-x)=6y-2x$.

Poichè dopo ciò ciascuna botte ha 80 litri, avremo il sistema (A).

$$(A)\ \begin{cases} 3x-5y=80 \\ 6y-2x=80 \end{cases}$$

Questo sistema, risolto coi metodi ordinari, dà $x=110$, $y=50$.

Risposta. *La 1ª botte aveva 110 litri, la 2ª 50.*

PROBLEMI.

565. Si vuol formare la somma di 440 lire con 40 pezze, di cui alcune da lire 5, e le altre da lire 20. Quante ne occorrono di ciascuna specie?

566. Un fanciullo disse ad un altro: « Dammi 5 delle tue noci, ed io ne avrò il triplo delle tue. » — « No » rispose l'altro; « dammi tu piuttosto 2 delle tue, e ne avrò 5 volte più di te. » Quante noci aveva ciascuno?

567. A dice a B: « dammi i $3/4$ del tuo danaro, ed io avrò 100 lire. » « No » dice B, « dammi tu soltanto $1/2$ del tuo, ed avrò 100 lire. » Quanto ha ciascuno?

568. Un fanciullo dice: « Il numero dei miei fratelli è $1/2$ di quello delle mie sorelle. » — « Ed io » replica una sorella di lui, « ho tanti fratelli quante sorelle. » Quanti figli e quante figlie ha quella famiglia?

569. Un asinello e l'asina sua madre portavano una volta dei carichi. Alla madre, che molto si doleva, disse il figlio: « Se mi consegni un chilogramma del tuo peso, io porterò il doppio di te; se tu prendi un chilogramma del mio peso, tutti e due porteremo egualmente. » Quanto portava la madre, e quanto il figlio?

570. Un padre dice a suo figlio: « Sette anni or sono la mia età era 7 volte la tua; e fra tre anni, la mia età sarà 3 volte la tua. » Qual è l'età del padre e quale quella del figlio?

571. Due numeri di 3 cifre ciascuno sono tali che la loro somma aumentata di 1 è eguale a 1000. Li scrivo uno accanto all'altro separandoli colla virgola decimale, ed osservo che ponendo il maggiore prima della virgola, ottengo un risultato sei volte più grande che se lo pongo dopo la medesima. Quali sono questi due numeri?

572. Un progetto, sottoposto ai voti di 48 persone, viene approvato con una maggioranza di 18 voti. Quante persone furono *pro* e quante *contro*?

573. Il quarto dell'altezza del Sempione supera di metri 278 l'ottava parte dell' altezza del Monte d' Oro in Francia; la metà più il quinto dell'altezza del Sempione eguagliano i $^3/_4$ di quella del Monte d'Oro più 4 metri. Si trovi l'altezza dei due monti.

574. Con 185 monete, di cui alcune da 5 lire ed altre da 2 lire, si paga un debito di 745 lire. Quante monete di ciascuna qualità si sono date?

575. Si chiedono le età di due fratelli posto che aggiungendo 22 alla loro somma si ottenga due volte l'età del maggiore; e che togliendo 1 dalla loro differenza, risulti quella del minore.

576. L'età di A viene espressa da un numero di due cifre la cui somma è 10; le stesse cifre poste in ordine inverso formano l'età di B, la quale è inferiore di 72 anni a quella di A. Si cerchino le due età.

577. La somma delle due cifre di un numero vale 9. Permutando le cifre fra loro, risulta un numero che è i $^5/_6$ del primo. Si trovino i due numeri.

578. Un signore, incontrando alcuni poveri, trovò che gli mancavano 12 soldi per dare 4 soldi a ciascun povero; avendo però dato 3 soldi a ciascun povero, gli avanzarono 11 soldi. Quanti erano i poveri, e qual somma possedeva quel signore?

579. Pago per 10 chilogrammi di caffè e 14 di zucchero, lire 56 e centesimi 40; e per 18 chilogrammi di caffè e 7 di zucchero, lire 63 e centesimi 30. Quanto costa un chilogramma di caffè e quanto uno di zucchero?

580. Un tale porta ad un oste due brocche da riempirsi, una con vino da lire 1,20 il litro, l'altra con vino da lire 1,60 il litro; e paga in tutto lire 11,80. Ora, essendosi scambiate fra loro le due brocche, gli si restituiscono 50 centesimi. Quanti litri contiene ciascuna brocca?

581. Un oste ha due qualità di vino. Se mescola 9 litri della qualità inferiore con 7 litri della migliore, è in caso di vendere il vino a lire 2 $^3/_4$ il litro. Se invece mescola 3 litri della inferiore con 5 litri della migliore, può vendere il vino a lire 2,90 il litro. Quanto costa un litro di ciascuna qualità?

582. In quale proporzione devo mescolare grano da L. 18 l'ettolitro con grano da L. 13 l'ettolitro per avere ettolitri 167 $^2/_3$ di miscuglio del valore di L. 16 l'ettolitro?

583. Due operai lavorano insieme. La paga giornaliera del primo supera di un terzo quella del secondo. Dopo un certo tempo il primo, che lavorò 5 giorni più del secondo, ricevette L. 100; mentre il secondo ricevette L. 60. Qual'è la paga giornaliera di ciascuno?

584. Una padrona di casa prese a servizio due persone per 400 lire di mercede annuale ciascuna, e inoltre promise di dar loro ogni anno un abito nuovo ed un paio di scarpe nuove. Una di esse lasciò la casa dopo 8 mesi, e ricevette per paga il vestito e lire 260 $^1/_2$; l'altra si ritirò dopo 9 mesi e mezzo, e ricevette per saldo il paio di scarpe e lire 350 $^1/_2$. Quanto fu calcolato il vestito e quanto il paio di scarpe?

585. Un possidente ha un certo numero di buoi, e foraggio per un dato tempo. Se vendesse 75 buoi, il foraggio gli durerebbe 20 giorni di più; se invece comperasse 100 buoi, il foraggio gli durerebbe 15 giorni di meno. Quanti sono i buoi e per quanti giorni può bastare il foraggio?

586. Un certo numero di operai porta un mucchio di pietre da un luogo ad un altro in 6 ore. Se vi fossero 2 operai di più, e ognuno portasse ogni volta 2 chilogrammi di più, il mucchio sarebbe trasportato in 5 ore. Ma se vi fossero 3 operai di meno, e ognuno portasse ogni volta 2 chilogrammi e mezzo di meno, il mucchio sarebbe trasportato in 8 ore. Quanti operai sono impiegati e qual peso porta ciascuno ogni volta?

587. Un padre disse ai suoi due figli, dei quali uno aveva 4 anni più dell'altro: « Fra 2 anni io sarò il doppio più vecchio di voi due insieme; e 6 anni addietro io era 6 volte più vecchio di voi due insieme. » Si determini l'età del padre e di ciascuno dei due figli.

588. Feci acquisto di un'opera in 13 volumi, poi di un'altra in 17 volumi a 2 lire il volume meno di quella. Se avessi pagato la prima 22 lire di meno, e la seconda 28 lire di più, avrei speso per entrambe la medesima somma. Quanto costò ciascun volume della 1ª opera?

589. Se avessi comperato 3 metri di meno, pagando per ciascun metro 1 lira di più, avrei speso 8 lire di più; e se avessi comperato 5 metri di più a 2 lire di meno il metro, avrei speso 25 lire di meno. Dicasi quanti metri ho comperato ed a qual prezzo.

590. Un cassiere con 7 pezze d'oro e 3 d'argento paga un mandato di 44 lire; quindi ne paga un altro di 52 lire con 8 pezze della prima specie e 2 della seconda. Si chiede il valore di ciascuna pezza.

591. Il primogenito dice al secondogenito: « Io ho il doppio dell'età che tu avevi quando io avevo l'età che tu hai presentemente. E quando tu avrai l'età che ora ho io, la somma delle nostre due età sarà eguale a 63 anni. » Qual'è presentemente l'età di ciascuno?

592. Due corpi distano di d metri l'uno dall'altro. Se si muovono con velocità costante uno *verso* l'altro, si incontrano dopo m secondi; se si muovono un *dietro* l'altro, si raggiungono dopo n secondi. Qual'è la velocità di ciascun corpo in un secondo?

LIBRO SECONDO

Classi di numeri.

593. Si dimostri che la maggiore di due classi contigue di numeri può avere un elemento minimo.

594. Si dimostri che la minore di due classi contigue di numeri può avere un elemento massimo.

595. Si dimostri che due classi contigue di numeri non possono avere contemporaneamente la maggiore un elemento minimo, e la minore un elemento massimo.

596. Si dica quando è che un numero intero o frazionario è limite di due classi contigue di numeri di cui la maggiore ha un elemento minimo, o la minore ha un elemento massimo.

597. Se due classi contigue di numeri individuano un numero positivo, è sempre possibile fare in modo che tali classi siano formate di soli numeri positivi.

598. Se due classi contigue di numeri individuano un numero negativo, è sempre possibile far in modo che tali classi siano formate di soli numeri negativi.

599. Qual è la condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi contigue di numeri individuino il numero *zero*?

600. Si dimostri che se è $\alpha=(A, A')$, sarà $-\alpha=(-A', -A)$. *

601. Facendo uso del coroll. 1° § 143, si dimostri che se è $\alpha=(A, A')$, $\beta=(B, B')$, e $\gamma=(A-B', A'-B)$, sarà $\alpha=\beta+\gamma$.

602. Si dimostri che se è $\alpha=(A, A')$, $\beta=(B, B')$, e $\gamma=\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$, sarà $\alpha=\beta\gamma$.

603. Si dimostri che se è $\alpha=(A, A')$, sarà $\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{1}{A'}, \frac{1}{A}\right)$. **

---

* Con $-A$ si rappresenta la classe che si ottiene quando si cambia il segno a tutti gli elementi della classe A.

** Con $\frac{1}{A}$ si rappresenta la classe che si ottiene quando si prende il reciproco di ogni elemento della classe A. La classe $\frac{1}{A}$ si chiama la *classe reciproca* della classe A.

Radicali aritmetici. *

RIDUZIONE DI UNA ESPRESSIONE RAZIONALE SOTTO FORMA DI RADICALE ARITMETICO.

Avvertenza. Si abbia cura di scrivere sempre il segno di radice in modo che si conosca chiaramente qual è il radicando. Perciò se il radicando è abc, si scriva p.e. $\sqrt{abc}$, e non $\sqrt{ab}c$; se il radicando è $\frac{ab}{c}$ si scriva p.e. $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, e non $\frac{\sqrt{ab}}{c}$; se il radicando fosse ab, e si dovesse dividere $\sqrt{ab}$ per c, si scriva $\frac{1}{c}\sqrt{ab}$, oppure $\frac{\sqrt{ab}}{c}$, ma non si scriva $\frac{\sqrt{ab}}{c}$, e neppure $\sqrt{\frac{ab}{c}}$.

Esempio 1º. *Si dia al numero 3 la forma di radicale d'indice 4.*

Si avrà: $3=\sqrt[1]{3^1}=\sqrt[1.4]{3^{1\cdot4}}=\sqrt[4]{3^4}=\sqrt[4]{81}$.

Esempio 2º. *Si dia al monomio $2a^3b^4$ la forma di radicale cubico.*

Si avrà: $2a^3b^4=\sqrt[3]{(2a^3b^4)^3}=\sqrt[3]{8a^9b^{12}}$. **

Esempio 3º. *Si dia ad $a-2b$ la forma di radicale quadrato.*

Si avrà: $a-2b=\sqrt{(a-2b)^2}=\sqrt{a^2-4ab+4b^2}$.

Esempio 4º. *Si ponga $2a^{2m}b^n$ sotto forma di radicale cubico.*

Si avrà: $2a^{2m}b^n=\sqrt[3]{(2a^{2m}b^n)^3}=\sqrt[3]{2^3.a^{2m\cdot3}b^{n\cdot3}}=\sqrt[3]{8a^{6m}b^{3n}}$.

Esempio 5º. *Si ponga m^{3x+y} sotto forma di radicale quadrato.*

Si avrà: $m^{3x+y}=\sqrt{(m^{3x+y})^2}=\sqrt{m^{(3x+y)2}}=\sqrt{m^{6x+2y}}$.

Si ponga ciascuna delle seguenti espressioni sotto forma di radicale quadrato, di radicale cubico, di radicale quarto, di radicale quinto:

604. $3a^2bc^3$. **605.** $\frac{1}{4}m^2xy^{3x+1}$. **606.** $\frac{3}{5}(a-b)^2$. **607.** $2a^{3m}b^{5n}c$.

608. $(a-b)^{x-y}$. **609.** $(a+2b)^{xy}$.

RIDUZIONE DI UN RADICALE ARITMETICO SOTTO FORMA DI ESPRESSIONE RAZIONALE.

Esempio 1º. $\sqrt{(a-b)^8}=\sqrt[2]{(a-b)^8}=\sqrt[2:2]{(a-b)^{8:2}}=\sqrt[1]{(a-b)^4}=(a-b)^4$.

Esempio 2º. $\sqrt[3]{8a^6b^9c^3}=\sqrt[3]{2^3a^6b^9c^3}=\sqrt[3:3]{2^{3:3}.a^{6:3}.b^{9:3}.c^{3:3}}=\sqrt[1]{2a^2b^3c}=2a^2b^3c$.

* Negli esempi che risolveremo indicheremo tutti i minimi passaggi; è però bene che l'alunno si abitui a scrivere il risultato finale eseguendo *a memoria* il maggior numero di passaggi che gli sarà possibile.

** Lo studioso si ricordi che quando l'espressione algebrica da mettersi sotto forma di radicale è un prodotto, la si eleva a potenza elevando alla potenza stessa ciascun fattore, e facendo il prodotto dei risultati.

Esempio 3°. $\sqrt[3]{216(b^2-c)^6x^3}=\sqrt[3]{2^3.3^3(b^2-c)^6x^3}=2^{3:3}.3^{3:3}.(b^2-c)^{6:3}x^{3:3}=$
$=2.3(b^2-c)^2x=6(b^2-c)^2x.$

Esempio 4°. $\sqrt{25m^2-50mn+25n^2}=\sqrt{25(m^2-2mn+n^2)}=\sqrt{5^2(m-n)^2}=$
$=5^{2:2}.(m-n)^{2:2}=5(m-n).$

Esempio 5°. $\sqrt[m^2+1]{x^{2m^2+2}.y^{3m^2+3}}=\sqrt[m^2+1]{x^{2(m^2+1)}.y^{3(m^2+1)}}=$
$=x^{2(m^2+1):(m^2+1)}.y^{3(m^2+1):(m^2+1)}=x^2y^3.$

Esempio 6°. $\sqrt[x^2]{\dfrac{a^{x^2}.b^{x^4}}{2^{x^6}.y^{3x^5}}}=\dfrac{\sqrt[x^2]{a^{x^2}.b^{x^4}}}{\sqrt[x^2]{2^{x^6}.y^{3x^5}}}=\dfrac{a^{x^2:x^2}.b^{x^4:x^2}}{2^{x^6:x^2}.y^{3x^5:x^2}}=\dfrac{a.b^{x^2}}{2^{x^4}.y^{3x^3}}.$ *

Si riducano sotto forma di espressione razionale i seguenti radicali aritmetici:

610. $\sqrt{a^{2m}b^{2n}}.$ **611.** $\sqrt[3]{27a^3b^6c^9}.$ **612.** $\sqrt{36x^3y^9(b-c)^6}.$ **613.** $\sqrt[4]{a^4b^8}.$

614. $\sqrt{16(a^2-b)^4c^2}.$ **615.** $\sqrt{9a^2+18ab+9b^2}.$

616. $\sqrt{4a^2c^2-12abc^2+9b^2c^2}.$ **617.** $\sqrt[3]{8a^3b^3-24a^2b^4+24ab^5-8b^6}.$

618. $\sqrt[3]{a^3-6a^2b^2+12ab^4-8b^6}.$ **619.** $\sqrt{a^4b^4+\dfrac{2}{3}a^2b^4+\dfrac{1}{9}b^4}.$

620. $\sqrt[x]{a^{2x}b^{3x^2}}.$ **621.** $\sqrt[m]{a^{mnp}}.$ **622.** $\sqrt[2xy]{m^{6x^2y}.n^{2xy^2}}.$

623. $\sqrt[a+b]{x^{5a+5b}}.$ **624.** $\sqrt[a-b]{x^{a^2-b^2}.(x-y)^{a-b}}.$ **625.** $\sqrt[x+1]{a^{3x+3}.b^{7x+7}.c^{2x+2}}.$

626. $\sqrt{\dfrac{a^4}{b^6}}.$ **627.** $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3b^6}{(a-b)^3}}.$ **628.** $\sqrt[5]{\dfrac{(x-y)^5}{m^{10}}}.$

629. $\sqrt[a+b]{\dfrac{(m+n)^{(a^2-b^2)}}{x^{(a^2-b^2)}.y^{(a+b)}}}.$

INTRODUZIONE DI UN FATTORE SOTTO IL SEGNO DI RADICE.

Esempio 1°. In $(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ *si porti il fattore* $(a+b)$ *sotto il segno di radice.* Si avrà: $(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}=\sqrt{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}=\sqrt{(a+b)^2\cdot\dfrac{a-b}{a+b}}=$
$=\sqrt{(a+b)\cdot(a-b)}=\sqrt{a^2-b^2}.$

Esempio 2°. In $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ *si portino i fattori esterni sotto il segno di radice in modo che vi sia un sol segno di radice.*

* Bisogna mettere ciascun fattore numerico del radicando sotto forma di prodotto di fattori primi come si fece nell'esempio 3°. Quando il radicando o qualche esponente è un polinomio, bisogna in questo polinomio cominciare a mettere in evidenza il *M.C.D.* dei termini del polinomio; poi, se occorre, si mette il fattore polinomio sotto forma di prodotto, facendo uso delle regole esposte nei §§ 79, 80, 81, 82, 83. Così si è fatto negli esempi 4° e 5°.

Si comincia a portare il fattore più esterno sotto il segno di radice più esterno, poi il fattore che risulta fuori del 2° segno di radice si porta sotto questo segno; e si continua così finchè i segni di radice non siano più separati da alcun fattore. Facendo poi uso del coroll. 1° § 166, ai vari segni di radice se ne sostituisce uno solo avente per indice il prodotto degli indici. Si avrà quindi:

$$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2^2.2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{8^2.2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{128\sqrt{2}}} =$$
$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{128^2.2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{32768}}} = \sqrt[8]{32768}.$$

Nelle seguenti espressioni si introducano i fattori sotto un unico segno di radice:

630. $2\sqrt{2}$. **631.** $2\sqrt[3]{2}$. **632.** $5\sqrt{3}$. **633.** $4\sqrt{6}$. **634.** $m\sqrt[3]{n}$.

635. $a^2b\sqrt{3bc}$. **636.** $7am^2n\sqrt{5abc}$. **637.** $a^2b\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$ **638.** $m\sqrt{\dfrac{1}{n}}$

639. $x\sqrt[5]{\dfrac{a}{x^3}}$ **640.** $(a-b)\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2-ab+b^2}}$ **641.** $2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}$

642. $4\sqrt{0,5\sqrt{0,5\sqrt{0,5}}}$ **643.** $2\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[3]{0,5}}}$ **644.** $\dfrac{a^2b}{3c}\sqrt{\dfrac{m^2n}{abc}}$

645. $a\sqrt{a^{n-1}\sqrt{a^{n-1}\sqrt{a^{n-1}\sqrt{a^{n-1}}}}}$ **646.** $a\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[n]{a^{n-1}}}}$

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DEL SEGNO DI RADICE.

Esempio 1°. Si abbia p.e. il radicale $\sqrt[3]{3a^6b^2}$. Il radicando $3a^6b^2$ è il prodotto dei fattori 3, a^6, b^2. Pel teorema 2° del § 163, avremo: $\sqrt[3]{3a^6b^2} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^2}$. E poichè, per la regola del § 169, è $\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^2$, avremo ancora $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{3}\cdot a^2\cdot\sqrt[3]{b^2} = a^2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{b^2}$. E pel teor. 2° del § 163, avremo ancora $a^2\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{b^2} = a^2\sqrt[3]{3b^2}$.

Esempio 2°. $\sqrt{ab^2c^3d} = \sqrt{ab^2c^{2+1}d} = \sqrt{ab^2c^2cd} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} =$
$= \sqrt{a}\cdot b\cdot c\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} = bc\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d} = bc\sqrt{acd}.$

Osservazione. Ogni qual volta l'esponente di un fattore del radicando è maggiore dell'indice della radice, ma non ne è multiplo, si può scomporre in due parti di cui la prima sia multipla dell'indice, e poscia operare come si fece nell'esempio precedente.

Esempio 3°. $\sqrt[5]{a^{12}b^8} = \sqrt[5]{a^{10+2}b^{5+3}} = \sqrt[5]{a^{10}.a^2b^5.b^3} = \sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{b^5}\cdot\sqrt[5]{b^3} =$
$= a^2\cdot\sqrt[5]{a^2}\cdot b\cdot\sqrt[5]{b^3} = a^2b\sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{b^3} = a^2b\sqrt[5]{a^2b^3}.$ *

* Lo studioso osservi che il fattore che si porta sotto il segno di radice, o fuori del segno di radice continua sempre ad essere fattore d'un prodotto, e non diventa mai addendo d'una

Nei seguenti radicali aritmetici si porti fuori del segno di radice la massima potenza di a:

647. $\sqrt{3a^2b}$. **648.** $\sqrt{5a^3b^2d}$. **649.** $\sqrt{\frac{4}{5}a^7m^3}$. **650.** $4b\sqrt{a^5x^2d}$.

Nei seguenti radicali aritmetici si portino fuori del segno di radice le massime potenze di x e di y:

651. $\sqrt[3]{6x^7y^4}$. **652.** $4a\sqrt{x^2y^3d}$. **653.** $\frac{1}{7}\sqrt{(a+b)x^2}$.

654. $\sqrt{\frac{4x^4y^3}{5bd}}$. **655.** $\sqrt{\frac{2x^6}{7y^7}}$.

RIDUZIONE DEI RADICALI ARITMETICI AL MINIMO INDICE.

Esempio 1º. Si riduca al minimo indice $\sqrt[12]{64a^9b^3}$.

Si avrà $\sqrt[12]{64a^9b^3} = \sqrt[12]{2^6a^9b^3}$. Poichè il radicando è un prodotto di varie potenze, lo metteremo sotto forma di un' unica potenza avente il massimo possibile esponente, ed avremo: $2^6a^9b^3 = (2^2a^3b)^3$. Sarà perciò:

$$\sqrt[12]{64a^9b^3} = \sqrt[12]{(2^2a^3b)^3}.$$

Dividendo ora l'esponente che è fuori parentesi e l'indice pel loro $M.C.D.$ si ha: $\sqrt[12]{(2^2a^3b)^3} = \sqrt[12:3]{(2^2a^3b)^{3:3}} = \sqrt[4]{(2^2a^3b)^1} = \sqrt[4]{2^2a^3b}$, che è il risultato cercato.

Esempio 2º. Si riduca al minimo indice $\sqrt[10]{625a^4b^8}$.

Si avrà: $\sqrt[10]{625a^4b^8} = \sqrt[10]{5^4a^4b^8} = \sqrt[10]{(5ab^2)^4}$. Il $M.C.D.$ di 10 e di 4 è 2; avremo quindi: $\sqrt[10]{(5ab^2)^4} = \sqrt[10:2]{(5ab^2)^{4:2}} = \sqrt[5]{(5ab^2)^2} = \sqrt[5]{5^2a^2b^4} = \sqrt[5]{25a^2b^4}$.*

Esempio 3º. Si riduca al minimo indice $\sqrt[10]{a^4b^8c^6}$.

Poichè il $M.C.D.$ dell'indice 10 e degli esponenti 4, 8, 6 è 2, scriveremo: $\sqrt[10]{a^4b^8c^6} = \sqrt[10:2]{a^{4:2}.b^{8:2}.c^{6:2}} = \sqrt[5]{a^2b^4c^3}$.

---

somma. Perciò si scriverebbe p.e. $3a\sqrt{b^3} = \sqrt{9a^2b^3}$ e non $3a\sqrt{b^3} = \sqrt{9a^2+b^3}$. Così pure nell'esempio 2º si scrisse $\sqrt{ab^2c^3d} = bc\sqrt{acd}$, e non si sarebbe potuto scrivere $\sqrt{ab^2c^3d} = bc + \sqrt{acd}$.

Si osservi parimenti che è lecito portar fuori del segno di radice, o sotto il segno di radice un fattore di un prodotto, ma non un termine di un polinomio. E ciò perchè si ha il teorema il quale dice che la radice aritmerica n^a di un prodotto è eguale al prodotto delle radici aritmetiche n^e dei fattori; ma non esiste un teorema che dica che la radice aritmetica n^a di una somma algebrica sia eguale alla somma algebrica delle radici aritmetiche n^e degli addendi.

Se si ha p.e. $\sqrt{a^2+b}$ non si potrà scrivere $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b} = a + \sqrt{b}$. Analogamen non si potrà scrivere $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Se il polinomio radicando si può mettere sotto forma di prodotto di fattori, può essere che alcu di questi fattori si possano portar fuori del segno di radice. Così p.e. si avrà $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2} = \sqrt{(a^2+2ab+b^2)a} = \sqrt{(a+b)^2a} = \sqrt{(a+b)^2} \cdot \sqrt{a} = (a+b)\sqrt{a}$.

* In pratica è meglio operare come si fece nell'esempio 3º.

Si riducano al minimo indice i seguenti radicali:

656. $\sqrt[8]{16a^6b^4}$. **657.** $5bc\sqrt[12]{a^9b^6c^{12}}$. **658.** $\sqrt[10]{9(a-b)^6y^8}$.

659. $\frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{16b^4c^{12}}{x^4y^6}}$. **660.** $\frac{5}{6}\sqrt[20]{\frac{a^{12}b^{18}}{7^4m^6n^{12}}}$. **661.** $\sqrt[20]{2^{16}(x^4-y^2)^{12}(x+y^3)^{14}y^{18}}$.

SEMPLIFICAZIONE DEI RADICALI ARITMETICI.

Esempio 1°. *Si semplifichi il radicale aritmetico* $\sqrt[12]{16a^{12}b^6}$.

Si ha $\sqrt[12]{16a^{12}b^6}=\sqrt[12]{2^4a^{12}b^6}$. Dividendo l'indice e l'esponente per il loro *M.C.D.* che è 2, si ha: $\sqrt[12]{2^4a^{12}b^6}=\sqrt[6]{2^2a^6b^3}$; e portando a^6 fuori di radicale, si ha: $\sqrt[6]{2^2a^6b^3}=a\sqrt[6]{2^2b^3}=a\sqrt[6]{4b^3}$, che è il radicale semplificato richiesto. *

Esempio 2°. *Si semplifichi il radicale aritmetico* $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Cominciamo a fare in modo che il denominatore sia un quadrato, il che si ottiene moltiplicando per 2 i due termini di $^5/_2$.

Avremo quindi: $\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5.2}{2^2}}=\sqrt{\frac{10}{2^2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

Esempio 3°. *Si semplifichi il radicale aritmetico* $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

Operando come nell'esempio precedente, avremo:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{\frac{2.5^2}{5.5^2}}=\sqrt[3]{\frac{50}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{50}}{5}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{50}.$$

Esempio 4°. *Si semplifichi il radicale aritmetico* $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}-\frac{a}{y}}$.

Riducendo il radicando sotto forma di un'unica frazione si ha: $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}-\frac{a}{x}}=$ $=\sqrt[3]{\frac{x^2-ay^2}{xy^2}}$. Moltiplichiamo ora ambi i termini di $\frac{x^2-ay^2}{xy^2}$ per x^2y affinchè il denominatore sia un cubo, ed avremo: $\sqrt[3]{\frac{x^2-ay^2}{xy^2}}=\sqrt[3]{\frac{x^4y-ax^2y^3}{x^3y^3}}=$ $=\frac{\sqrt[3]{x^4y-ax^2y^3}}{xy}=\frac{1}{xy}\sqrt[3]{x^4y-ax^2y^3}$, che è il risultato cercato.

---

* Come nei calcoli con frazioni è utile ridurre prima le frazioni date ai minimi termini, e poi ridurre ai minimi termini i risultati ottenuti, così nei calcoli con radicali è utile abituarsi a semplificare anzitutto i radicali dati, e poi anche il risultato finale. La massima semplificazione ha luogo quando il radicale si trasforma in un'espressione razionale.

Si semplifichino i seguenti radicali: *

662. $\sqrt{20}$. **663.** $\sqrt{12}$. **664.** $\sqrt{80}$. **665.** $\sqrt[3]{81}$.

666. $\sqrt[3]{a^9b^2}$. **667.** $\sqrt[3]{32a^4}$. **668.** $\sqrt[3]{81a^3x}$. **669.** $\sqrt{200x^2y^3}$.

670. $\sqrt{20a^3}$. **671.** $\sqrt{75a^2x^3}$. **672.** $\sqrt{128a^3x^5}$. **673.** $\sqrt[4]{36a^2b^2}$.

674. $\sqrt[6]{192a^2bc^{12}}$. **675.** $\sqrt[4]{64a^8b^5}$. **676.** $\sqrt[6]{5^4b^4c^2}$.

677. $\sqrt[9]{125a^6(a+b)^3}$. **678.** $\sqrt[7]{\frac{(a^3b^2c^5)^4(a^5b^3c)^5}{(a^2b^3c^4)^4(a^4b^2c)^2}}$. **679.** $\sqrt[3]{a^4x^4(a+x)^4}$.

680. $\sqrt{a^2x^4-a^2x^2y^2}$. **681.** $\sqrt{x^6(x^5+x^2y^3)}$. **682.** $\sqrt[3]{32ax^3(a^2-x^2)^4}$

683. $\sqrt{\frac{a^3b^2}{cd^2}-\frac{a^2b^3}{c^2d}}$. **684.** $\sqrt{\frac{2(a^2+b^2)^2}{c^2}-\frac{2(a^2-b^2)^2}{c^2}}$.

685. $\sqrt{\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{bc^3d^5}}$. ** **686.** $\sqrt{\frac{a^3b^2c-2a^2b^3d}{c^2d^2}}$.

687. $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}}$. **688.** $\sqrt{\frac{a}{a^2bd-2ab^2d+b^3d}}$.

689. $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2b}}$. **690.** $\sqrt{\frac{b^3-bx^2-b^2x+x^3}{b^5c^3d}}$. **691.** $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{(a-b)^2}}$.

RIDUZIONE DEI RADICALI ARITMETICI AL MEDESIMO INDICE.

Si riducano al medesimo indice i seguenti gruppi di radicali: ***

692. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{6}$. **693.** $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[10]{a^6}$.

694. $\sqrt{a^2(x^2+y^2)}$, $\sqrt[5]{4b^2(a^2-c^2)}$. **695.** $\sqrt[8]{xy^3}$, $\sqrt[6]{3x^2y^3}$.

696. $\sqrt[n]{(a-b)^p}$, $\sqrt[m]{(a^2+x^2)^2}$. **697.** $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{ax}$, $\sqrt[5]{a-x}$.

698. $\sqrt[6]{a+b}$, $\sqrt[4]{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$. **699.** $\sqrt[n]{a^pb^q}$, $\sqrt[2mn]{a^2b^p}$.

---

* Se il radicando è un polinomio, bisogna per prima cosa metterlo sotto forma di prodotto di fattori, mettendo prima in evidenza il *M.C.D.* dei termini del polinomio (§ 77), e poi, se occorre, facendo uso delle regole dei §§ 78..... 83. Se però nel radicando vi sono indicate operazioni da eseguire, conviene prima eseguirle; e poi si metterà il risultato sotto forma di prodotto di fattori. Se il radicando è un polinomio contenente frazioni, bisogna prima eseguire le operazioni indicate in modo che assuma la forma di una sola frazione. Se il radicando è una frazione, spesso si richiede che il radicale semplificato abbia per radicando un'espressione intera. Basta a tal fine moltiplicare il numeratore ed il denominatore del radicando per una espressione conveniente, in modo che il denominatore risulti potenza perfetta del grado dell'indice. Facendo poscia uso del teorema 3° del § 164, si renderà razionale il denominatore.

** Al numeratore si applichi la regola 5ª § 83.

*** Quando il radicando contiene un fattore binomio o polinomio, e lo si deve elevare a potenza, generalmente non occorre sviluppare la potenza, ma basta indicarla; epperciò basterà scrivere p.e. $(a-b)^3$ invece di $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. Avendo da elevare una frazione ad una potenza, è ordinariamente preferibile elevarne il numeratore ed il denominatore, piuttostochè semplicemente indicarne l'elevazione. Perciò scriveremo p.e. $\frac{a^4}{b^2}$ piuttostochè $\left(\frac{a^2}{b}\right)^2$.

700. $\sqrt[m]{a^pb^2}$, $\sqrt[n]{a^5b^3c^2}$. **701.** $\sqrt[n^2]{a^pb^3}$, $\sqrt[m^3]{a^3b^2}$, $\sqrt[4mn]{a^pb^3}$.

702. $\sqrt{\frac{x}{y^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{y^3}{z}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. **703.** $\sqrt[4]{\frac{a-b}{z}}$, $\sqrt{\frac{a+b}{z^2}}$, $\sqrt[7]{\frac{a^2-b^2}{z^3}}$.

704. $\sqrt[3]{\frac{1}{a-x}}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{a-x}}$, $\sqrt[4]{\frac{3}{a-x}}$.

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE.

Osservazione. Dovendo fare la somma algebrica di più radicali aritmetici, conviene prima semplificarli. Se i radicali semplificati sono simili, la loro somma si riduce (facendo uso della regola del § 175) ad un radicale unico; in caso contrario, essa è un polinomio.

Esempio 1º. *Si eseguisca l'operazione:* $\sqrt[3]{5a^2}+2\sqrt[3]{40a^2b^3}-5\sqrt[3]{625a^5}$.
Semplificando prima ciascun radicale, si ha:

$$\sqrt[3]{5a^2}+2\sqrt[3]{40a^2b^3}-5\sqrt[3]{625a^5}=\sqrt[3]{5a^2}+2\sqrt[3]{2^3.5a^2b^3}-5\sqrt[3]{5.5^3.a^3.a^2}=$$
$$=\sqrt[3]{5a^2}+4b\sqrt[3]{5a^2}-25a\sqrt[3]{5a^2}=(1+4b-25a)\sqrt[3]{5a^2}. \ *$$

Esempio 2º. *Si eseguisca l'operazione:* $\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$.

Semplifichiamo separatamente ciascun radicale. Pel 1º avremo:

$$\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-1}.$$

Nel 2º radicale, rendiamo anzitutto quadrato il denominatore. A tal fine basta moltiplicare per $a+1$ i due termini del radicando dato, ed avremo

$$\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}=\sqrt{\frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)(a+1)}}=\sqrt{\frac{a^2-1}{(a+1)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{(a+1)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a+1}=\frac{1}{a+1}\sqrt{a^2-1}.$$

Sostituendo nell'espressione data i valori trovati, avremo:

$$\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}+\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-1}+\frac{1}{a+1}\sqrt{a^2-1}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)\sqrt{a^2-1}=$$
$$=\left[\frac{a+1}{a(a+1)}+\frac{a}{a(a+1)}\right]\sqrt{a^2-1}=\frac{a+1+a}{a(a+1)}\sqrt{a^2-1}=\frac{2a+1}{a(a+1)}\sqrt{a^2-1}.$$

Esempio 3º. *Si eseguisca l'operazione:*

$$\sqrt[m]{2^m.a^{mp+3}.b^{mn+5}}+\sqrt[m]{3^m.a^{2m+mn+3}.b^{m+5}}-\sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}}.$$

Cominciamo a semplificare separatamente ciascun radicale, ricordando che (pel coroll. del § 47) si ha p.e. $a^{2m+mn+3}=a^{2m}.a^{mn}.a^3$; ed avremo:

$$\sqrt[m]{2^m.a^{mp+3}.b^{mn+5}}=\sqrt[m]{2^m.a^{mp}.a^3.b^{mn}.b^5}=2.a^p.b^n\sqrt[m]{a^3b^5}.$$
$$\sqrt[m]{3^m.a^{2m+mn+3}.b^{m+5}}=\sqrt[m]{3^m.a^{2m}.a^{mn}.a^3.b^m.b^5}=3.a^2.a^n.b\sqrt[m]{a^3b^5}=$$
$$=3a^{n+2}.b\sqrt[m]{a^3b^5}.$$

* Quando il coefficiente del radicale è un polinomio, si abbia l'avvertenza di chiuderlo in parentesi.

$\sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}} = c^2\sqrt[m]{a^3b^5}$. Si avrà perciò:

$$\sqrt[m]{2^m.a^{mp+3}.b^{mn+5}} + \sqrt[m]{3^m.a^{2m+mn+3}.b^{m+5}} - \sqrt[m]{a^3b^5c^{2m}} =$$

$$= 2a^pb^n\sqrt[m]{a^3b^5} + 3a^{n+2}b\sqrt[m]{a^3b^5} - c^2\sqrt[m]{a^3b^5} = (2a^pb^n + 3a^{n+2}b - c^2)\sqrt[m]{a^3b^5}.$$

Si eseguiscano le seguenti operazioni:

705. $6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$. **706.** $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{108}$.

707. $\sqrt{24} + \sqrt{54} + \sqrt{6} + \sqrt{600}$. **708.** $\sqrt{45} + \sqrt{80} + \sqrt{405} + \sqrt{500}$.

709. $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}}$. **710.** $\sqrt{3\frac{1}{3}} + \sqrt{7\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{6}}$.

711. $\sqrt{54a^3} + \sqrt{24a^5} + \sqrt{150a}$. **712.** $\sqrt{3ax^2} + \sqrt{27a^3} + \sqrt{48a^5x^4}$.

713. $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$. **714.** $\sqrt[3]{24a^4} + \sqrt[3]{3a^4x^3} + \sqrt[3]{81ax^6}$.

715. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{9}{32}}$. **716.** $\sqrt{9x+27} + 3\sqrt{4x+12}$.

717. $5\sqrt{25x+75} + 2\sqrt{9a^2x+27a^2}$. **718.** $\sqrt{x^4y^2 - a^2x^2y^2} - \sqrt{x^2y^2 - a^2y^2}$.

719. $\sqrt[n]{a^{3n}c} - \sqrt[n]{a^{2n}c}$. **720.** $\sqrt[5]{32a^3 + 96x} + \sqrt[5]{a^8 + 3a^5x} + \sqrt[5]{a^3x^5 + 3x^6}$.

721. $\sqrt{45c^3} - \sqrt{80c^3} + \sqrt{5a^2c}$. **722.** $\sqrt{18a^5b^3} + \sqrt{50a^3b^3}$.

723. $\sqrt{\frac{a^4c}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^2c^3}{bd^2}} - \sqrt{\frac{a^2cd^2}{bc^2}}$. **724.** $3b^2\sqrt{a^3c} + \frac{2}{c}\sqrt{a^5c^3} - c^4\sqrt{\frac{ac}{d^2}}$.

725. $\sqrt{\frac{m-n}{a^2}} + \sqrt{\frac{m}{n^2} - \frac{1}{n}}$. **726.** $\sqrt[3]{24a^4b} + \sqrt[3]{81ab^4} + 4a^2\sqrt[3]{\frac{3b}{a^2}} - 6b^2\sqrt[3]{\frac{a}{9b^2}}$.

727. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{1}{a^2}\sqrt[3]{\frac{a^8}{b^2}}$. **728.** $\frac{2a}{3b}\sqrt[5]{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{3a^2}{4b^2}\sqrt[5]{\frac{b^3}{a^3}} - \frac{a^2}{2b}\sqrt[5]{\frac{1}{a^3b^2}}$.

729. $\sqrt{\frac{1}{b} - a} + \sqrt{\frac{bd^2 - ab^2d^2}{c^2}}$. **730.** $b\sqrt{\frac{4a}{b^4}} - \sqrt{\frac{9a}{b^2}} + \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{4}} + 2b\sqrt{\frac{25a}{b^4}}$.

731. $\sqrt[4]{a^3b} - \sqrt[4]{\frac{b^5}{a}} + \sqrt[4]{\frac{a^7}{b^3}}$. **732.** $\sqrt[m]{x^{n-1}b} - \sqrt[m]{\frac{b^{m+1}}{x}} + \sqrt[m]{\frac{x^{m+3}}{b^{m-1}}}$.

733. $\sqrt[m]{a^{m+1}b^m - a^mb^{m+1}} - \sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n} - a^{m+2n}b^{2m+n}}$. *

734. $\sqrt[3]{2b\sqrt{a^7b^5}} + \sqrt{ab^2\sqrt[3]{256a^4b}}$. ** **735.** $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}} + 3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}} - 3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}} - \sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$

MOLTIPLICAZIONE. ***

Esempio 1°. Si eseguisca il prodotto: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2abc} \cdot 5\sqrt[3]{c^2}$.

---

* Si semplifichino i radicali, e poi si riducano al medesimo indice.
** Si riduca prima ciascun addendo sotto forma di unico radicale.
*** Prima di fare il prodotto conviene spesso semplificare ciascun radicale.

Riducendo dapprima i radicali al medesimo indice, e poi eseguendo l'operazione, avremo successivamente:

$$\frac{3}{4}\sqrt[3]{2abc}\cdot 5\sqrt[3]{c^2} = \frac{3}{4}\sqrt[6]{(2abc)^3}\cdot 5\sqrt[6]{(c^2)^2} = \frac{3}{4}\sqrt[6]{8a^3b^3c^3}\cdot 5\sqrt[6]{c^4} = \frac{15}{4}\sqrt[6]{8a^3b^3c^3.c^4} =$$

$$= \frac{15}{4}\sqrt[6]{8a^3b^3c^7} = \frac{15}{4}\sqrt[6]{8a^3b^3c.c^6} = \frac{15c}{4}\sqrt[6]{8a^3b^3c}.$$

Esempio 2º. *Si eseguisca il prodotto:* $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$.

Pel teorema 1º § 58 si ha: $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2-(\sqrt{b})^2 = a^2-b$.

Esempio 3º. *Si eseguisca il prodotto:* $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

I radicali esterni hanno egual indice, epperciò avremo:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})(a+b-2\sqrt{ab})} =$$

$$= \sqrt{[(a+b)+2\sqrt{ab}][(a+b)-2\sqrt{ab}]} \ {}^{*} = \sqrt{(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2} =$$

$$= \sqrt{(a+b)^2-4ab} = \sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab} = \sqrt{a^2-2ab+b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = a-b.$$

Esempio 4º. *Si eseguisca il prodotto:* $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{27})$.

Eseguendo la moltiplicazione secondo le regole ordinarie della moltiplicazione dei polinomi, si ha:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{27}) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{27}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{27} =$$

$$= \sqrt{2.8}-\sqrt{3.8}-\sqrt{2.27}+\sqrt{3.27} = \sqrt{2^4}-\sqrt{3.2^3}-\sqrt{2.3^3}+\sqrt{3^4} =$$

$$= 2^2-2\sqrt{3.2}-3\sqrt{2.3}+3^2 = (2^2+3^2)-(2+3)\sqrt{2.3} = 13-5\sqrt{6}.$$

Si eseguiscano le seguenti moltiplicazioni:

736. $5\sqrt[3]{6}\cdot 3\sqrt[3]{4}$. **737.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{15}\cdot 5\sqrt[3]{18}$. **738.** $\sqrt[3]{7a^2}\cdot\sqrt[3]{ac^2}$.

739. $6\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{2c}$. **740.** $\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{b}$. **741.** $\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt{ax}$.

742. $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[8]{a^7}\cdot(-\sqrt{a})$. **743.** $4\sqrt[4]{a}\cdot 7\sqrt[6]{b}$. **744.** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

745. $(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(2\sqrt{8}-3)$. **746.** $5(\sqrt{14}+3\sqrt{5})(7\sqrt{14}-2\sqrt{5})$.

747. $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$.

748. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$. **749.** $(a+\sqrt{x})(b+\sqrt{y})$.

750. $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}-b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. **751.** $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}}\cdot\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{d}}\cdot\sqrt{dc}$.

752. $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$. **753.** $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3})$.

754. $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$. **755.** $(-5+\sqrt{3/4})(-5-\sqrt{3/4})$.

756. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}\cdot\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}$. **757.** $(3\sqrt{45}-7\sqrt{5})(\sqrt{1\,4/5}+2\sqrt{9\,4/5})$.

758. $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)$. **759.** $(\sqrt{5}-1)\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)$.

* Pel teorema 1º § 58.

760. $\sqrt[4]{a^2-ab}\cdot\sqrt[6]{ab-b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}$. **761.** $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})$.

762. $(\sqrt{m^5}-\sqrt{m^5-p})(\sqrt{m^5}+\sqrt{m^5-p})$. **763.** $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

764. $(\sqrt[3]{a}+2\sqrt[6]{a}-2)(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a})$.

765. $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\sqrt{23}+\sqrt{7}}-\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}$.

766. $\frac{ab^2c^3}{d^4}\cdot\sqrt[m]{\frac{d^{4m-4}}{a^{m-1}b^{2m-2}c^{3m-3}}}$ * **767.** $(x+1)\sqrt{\frac{a^2b}{x^2-1}}$.

Si semplifichino le seguenti espressioni: **

768. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **769.** $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

770. $\sqrt{a-x}+\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-ax}}$. **771.** $\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}$. ***

DIVISIONE.

Esempio. Si eseguisca la divisione: $2\sqrt[3]{a^2(a-b)}:3\sqrt{a-b}$.

Riducendo prima i radicali al medesimo indice, si ha:

$$2\sqrt[3]{a^2(a-b)}:3\sqrt{a-b}=2\sqrt[6]{a^4(a-b)^2}:3\sqrt[6]{(a-b)^3}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{a^4(a-b)^2}{(a-b)^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{a^4}{a-b}}.$$

Si eseguiscano le seguenti divisioni:

772. $\sqrt{ab^2}:\sqrt[4]{a^8b^4}$. **773.** $\sqrt[6]{a^5b^7}:\sqrt[3]{a^2b^3}$. **774.** $\sqrt[4]{4}:\sqrt[6]{8}$.

775. $2\sqrt[6]{27}:\sqrt[4]{9}$. **776.** $\sqrt[12]{125}:\sqrt[8]{25}$. **777.** $\sqrt[6]{8.3^6}:\sqrt[10]{32.2^{10}}$. ****

778. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{16}}:\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$. **779.** $6\sqrt[3]{7a^7}:3\sqrt[3]{2ac^2}$. **780.** $2\sqrt[4]{19ax^2}:\sqrt[4]{8a}$.

781. $\sqrt[n]{a^{3n+2}}:\sqrt[n]{a^{2n+2}}$. **782.** $(2\sqrt{32}+3\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}):\sqrt{8}$. *****

783. $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{4}):\sqrt{2}$. **784.** $(\sqrt{8}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{2}):2\sqrt{2}$.

---

* Si cominci a portare il fattore esterno sotto il radicale, e si osservi che si ha p.e.

$$\frac{a^{2m}}{a^{2m-1}}=\frac{a^{2m-1+1}}{a^{2m-1}}=\frac{a^{2m-1}.a}{a^{2m-1}}=a.$$

** Si riducono le frazioni al medesimo denominatore, e poi si fa la sottrazione secondo regole ordinarie.

*** Si semplifichi prima separatamente ciascun radicale, e poi si metta in evidenza il fattor comune a tutti i termini del numeratore e quello comune a tutti i termini del denominatore.

**** Si scompongano in fattori primi i fattori numerici del radicando.

***** Si divida, secondo la regola ordinaria, ciascun termine del dividendo pel divisore.

785. $\sqrt[6]{49(a-2b)^3c^4}:\sqrt[8]{343(a-2b)^4c^4}$. **786.** $\dfrac{(a^4-b^4)\sqrt{x^3+1}}{(a^2-b^2)\sqrt{x^6-1}}$. *

787. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$.

788. $\sqrt[2n]{\dfrac{a^mb}{c^2d^3}}:\sqrt[3n]{\dfrac{a^{m-1}b}{c^3d^5}}$. **789.** $\dfrac{(a-b)\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)\sqrt{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}}$.

POTENZA.

Esempio 1º. $\left(\sqrt[3]{a^2bc}\right)^5=\sqrt[3]{(a^2bc)^5}=\sqrt[3]{a^{10}b^5c^5}$. Semplificando il radicale ottenuto, si ha ancora: $\sqrt[3]{a^{10}b^5c^5}=\sqrt[3]{a^9.a.b^3.b^2.c^3.c^2}=a^3bc\sqrt[3]{ab^2c^2}$. **

Esempio 2º. $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{2ab}\right)^3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\sqrt{(2ab)^3}=\dfrac{8}{27}\sqrt{2^3a^3b^3}$. Semplificando il risultato, si ha ancora: $\dfrac{8}{27}\sqrt{2^3a^3b^3}=\dfrac{8}{27}\sqrt{2^2.2.a^2.a.b^2.b}=\dfrac{8}{27}.2ab\sqrt{2ab}=\dfrac{16}{27}ab\sqrt{2ab}$.

Esempio 3º. $\left(\dfrac{2}{3}a\sqrt[3]{3m^2n}\right)^6=\left(\dfrac{2}{3}\right)^6.a^6\sqrt[3]{(3m^2n)^6}=\dfrac{2^6}{3^6}a^6\sqrt[3]{3^6m^{12}n^6}$.

Semplificando il risultato, si ha ancora:

$\dfrac{2^6}{3^6}a^6\sqrt[3]{3^6m^{12}n^6}=\dfrac{2^6}{3^6}a^6.3^{6:3}.m^{12:3}.n^{6:3}=\dfrac{2^6}{3^6}a^6.3^2m^4n^2=\dfrac{2^6}{3^4}a^6m^4n^2=\dfrac{64}{81}a^6m^4n^2$.

Si eseguiscano le seguenti elevazioni a potenza:

790. $(3\sqrt{2})^2$. **791.** $(4\sqrt{3})^2$. **792.** $(7\sqrt{5})^2$. **793.** $(a\sqrt{3})^2$.

794. $(2\sqrt{a})^3$. **795.** $(3\sqrt{ax})^3$. **796.** $(5\sqrt[3]{a^2x})^3$. **797.** $(7\sqrt[3]{x^2-y^2})^3$.

798. $\sqrt[3]{8^7}+(\sqrt{25})^3+(\sqrt[3]{8^2})^8$. **799.** $(\sqrt[3]{4ab^2})^n\cdot(\sqrt[3]{2a^2b})^n$.

800. $\sqrt{\left(\dfrac{16}{25}\right)^7}\cdot\left(\sqrt{\left(\dfrac{5}{8}\right)^3}\right)^4$. **801.** $\left(\sqrt[m]{\dfrac{a^{2m}}{a^3}}\right)^n\cdot\left(\sqrt[m]{\dfrac{a^{5m}}{a^9}}\right)^n\cdot\left(\sqrt[m]{\dfrac{a^{12}}{a^{6m}}}\right)^n$.

802. $(\sqrt[4]{a^3-2a^2b})^6$. **803.** $(\sqrt[3]{a^2-2ab})^3$. **804.** $(\sqrt[4]{a^2b-b^3})^{12}$.

805. $(\sqrt{a}+1)^2$. **806.** $(a+\sqrt{a}+1)^2\cdot(a-\sqrt{a}+1)^2$.

807. $(5-\sqrt{5}+\sqrt[3]{25})^2$. **808.** $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a})^3$. **809.** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$.

810. $\left(\sqrt{a}.\sqrt[3]{b}\right)^2$. **811.** $\left(-\sqrt[4]{a}\right)^4.\left(-\sqrt[3]{b}\right)^6$.

RADICE.

Si eseguiscano le seguenti estrazioni di radice:

812. $\sqrt{9\sqrt{3}}$. **813.** $\sqrt[3]{27\sqrt{5}}$. **814.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}\sqrt{2}}$. **815.** $\sqrt[3]{a^7\sqrt{b}}$.

---

* Si ricordi che è $x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)$.

** Lo studente ricordi che, quando si ha da elevare ad una potenza un monomio contenente un radicale, bisogna elevare a quella potenza anche il coefficiente del radicale, come abbiamo fatto nel 2º e nel 3º esempio.

816. $\sqrt{3\sqrt[3]{5}}$. **817.** $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}}$. **818.** $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$. **819.** $\sqrt[3]{\frac{28}{49}a^2b\sqrt{c^8}}$.

820. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x}{2}}}$. **821.** $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7$. **822.** $\left(\sqrt[4]{\sqrt[11]{16a^4}}\right)^{11}$. **823.** $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$.

824. $\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}-\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$. *

825. $\sqrt[2m]{\sqrt[3n]{a^5}}\cdot\sqrt[6m]{\sqrt[n]{a^3}}\cdot\sqrt[m]{\sqrt[6n]{a^9}}\cdot\sqrt[6n]{\sqrt[m]{a}}$. ** **826.** $\sqrt{c\sqrt{c\sqrt{c}}}$.

827. $\sqrt[3]{x^2y^4\sqrt[4]{x^3y^5\sqrt{x^8y^6}}}$. **828.** $\sqrt[5]{n\sqrt[4]{n^2}}$.

829. $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$. **830.** $\sqrt[m]{a^{2n}\sqrt[n]{a^{2m}}}$. **831.** $\sqrt[3]{\sqrt{2^{-2}\sqrt{b}}}$.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE CON DENOMINATORE CONTENENTE RADICALI ARITMETICI IN UN'ALTRA CON DENOMINATORE RAZIONALE.

Gioverà dar prima qualche esempio sulla ricerca dei fattori per cui bisogna moltiplicare un'espressione contenente radicali aritmetici per ottenere per prodotto un'espressione razionale.

1°. *Sia dato* $5\sqrt[7]{2a+b}$. Il fattore 5 è già razionale, e non ce ne occuperemo. Poichè $n=7$, sarà $n-1=6$. Basta quindi moltiplicare $5\sqrt[7]{2a+b}$ per $\left(\sqrt[7]{2a+b}\right)^6$, ed avremo: $5\sqrt[7]{2a+b}\cdot\left(\sqrt[7]{2a+b}\right)^6$, ossia $5\left(\sqrt[7]{2a+b}\right)^7$, ossia $5(2a+b)$.

2°. *Sia dato* $2\sqrt{3}$. Poichè è $n=2$, sarà $n-1=1$; e basterà moltiplicare $2\sqrt{3}$ per $(\sqrt{3})^1$, ossia per $\sqrt{3}$, ed avremo: $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, ossia $2.(\sqrt{3})^2$, ossia 2.3, ossia 6.

3°. *Sia dato* $3a\sqrt{2b}\cdot\sqrt[6]{3a-1}\cdot\sqrt[7]{b}$. Il 1° radicale dà un prodotto razionale se si moltiplica per $\sqrt{2b}$; il 2° dà pure un prodotto razionale se si moltiplica per $\left(\sqrt[6]{3a-1}\right)^5$; ed il terzo se si moltiplica per $\left(\sqrt[7]{b}\right)^6$. Moltiplicando quindi per $\sqrt{2b}\cdot\left(\sqrt[6]{3a-1}\right)^5\cdot\left(\sqrt[7]{b}\right)^6$ otterremo:

$3a\cdot\sqrt{2b}\cdot\sqrt[6]{3a-1}\cdot\sqrt[7]{b}\cdot\sqrt{2b}\cdot\left(\sqrt[6]{3a-1}\right)^5\cdot\left(\sqrt[7]{b}\right)^6$, ossia (per la legge associativa della moltiplicazione) $3a(\sqrt{2b}\cdot\sqrt{2b})\left[\sqrt[6]{3a-1}\cdot\left(\sqrt[6]{3a-1}\right)^5\right]\left[\sqrt[7]{b}\cdot\left(\sqrt[7]{b}\right)^6\right]$, ossia $3a\left(\sqrt{2b}\right)^2\cdot\left(\sqrt[6]{3a-1}\right)^6\cdot\left(\sqrt[7]{b}\right)^7$, ossia $3a.2b.(3a-1)b$, ossia $6ab^2(3a-1)$.

* Si trovi prima il valore di ciascun addendo.

** Si trovi prima il valore di ciascun fattore.

4°. *Sia dato* $3\sqrt{2}-5\sqrt{3}$. Moltiplicando per $3\sqrt{2}+5\sqrt{3}$, si ha: $(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})(3\sqrt{2}+5\sqrt{3})$, ossia $(3\sqrt{2})^2-(5\sqrt{3})^2=3^2\cdot(\sqrt{2})^2-5^2(\sqrt{3})^2$, ossia $9.2-25.3$, ossia $18-75=-57$.

5°. *Sia dato* $2+6\sqrt{a}$. Moltiplicando per $2-6\sqrt{a}$, si ha: $(2+6\sqrt{a})(2-6\sqrt{a})$, ossia $2^2-(6\sqrt{a})^2$, ossia $2^2-6^2.(\sqrt{a})^2$, ossia $4-36a$.

6°. *Sia dato* $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

Si ha $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{d}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}-\sqrt{d})$.

Moltiplicando per $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{c}-\sqrt{d})$, si ottiene:
$[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}-\sqrt{d})][(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{c}-\sqrt{d})]$,
ossia $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$,
ossia $(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2-[(\sqrt{c})^2-2\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}+(\sqrt{d})^2]$,
ossia $a+2\sqrt{ab}+b-c+2\sqrt{cd}-d$, ossia $(a+b-c-d)+(2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$.

Moltiplicando ora per $(a+b-c-d)-(2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})$, si ha: $[(a+b-c-d)+(2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})][(a+b-c-d)-(2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})]$, ossia $(a+b-c-d)^2-(2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd})^2$, ossia $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-$ $-2ad-2bc-2bd+2cd-[(2\sqrt{ab})^2+2.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}+(2\sqrt{cd})^2]$, ossia $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd-4ab-8\sqrt{abcd}-4cd$, ossia $(a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd)-8\sqrt{abcd}$.

Si è così condotti alla risoluzione d'un esercizio simile a quello considerato nell'esempio precedente.

Osservazione. Quando si è ottenuto un polinomio di più di 4 termini di cui due soli sono irrazionali, bisogna metterlo sotto forma di binomio in modo che i due termini irrazionali formino *da soli* uno dei termini del binomio; perchè, in caso contrario, il prodotto conterrebbe poi non *uno solo*, ma più di due radicali, come si può facilmente scorgere eseguendo p.e. il prodotto $[(a+2\sqrt{ab}+b)-(c+\sqrt{bc})][(a+2\sqrt{ab}+b)+(c+\sqrt{bc})]$.

Esempio 1°. *Sia data la frazione:* $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. Avremo:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})+\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}[(\sqrt{2}-2\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(\sqrt{2}-2\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}-2\sqrt{3})-\sqrt{5}]}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-12-2\sqrt{15}}{2-4\sqrt{6}+12-5}=\frac{2\sqrt{6}-12-2\sqrt{15}}{9-4\sqrt{6}}.$$

Moltiplicando ambi i membri di questa frazione per $9+4\sqrt{6}$, si ha:

$$\frac{2\sqrt{6}-12-2\sqrt{15}}{9-4\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{6}-12-2\sqrt{15})(9+4\sqrt{6})}{(9-4\sqrt{6})(9+4\sqrt{6})}=$$

$$=\frac{18\sqrt{6}-108-18\sqrt{15}+8\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}-48\sqrt{6}-8\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}}{9^2-(4\sqrt{6})^2}=$$

$$=\frac{18\sqrt{6}-108-18\sqrt{15}+48-48\sqrt{6}-8\sqrt{90}}{81-96}=\frac{-60-30\sqrt{6}-18\sqrt{15}-8\sqrt{90}}{-15}=$$

$$=\frac{-60-30\sqrt{6}-18\sqrt{15}-24\sqrt{10}}{-15},$$ * che è il risultato cercato.

Esempio 2°. Sia data la frazione: $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}$.

Pel teorema 3° del § 164 si ha: $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{x}}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}$.

Moltiplicando il numeratore ed il denominatore per $\sqrt{a-\sqrt{x}}$, si ha:

$$\frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{a+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{x}}}{\sqrt{a-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}}{\left(\sqrt{a-\sqrt{x}}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-(\sqrt{x})^2}}{a-\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x}}{a-\sqrt{x}}.$$

Moltiplicando il numeratore ed il denominatore per $a+\sqrt{x}$, si ha:

$$\frac{\sqrt{a^2-x}}{a-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a^2-x}\cdot(a+\sqrt{x})}{(a-\sqrt{x})\cdot(a+\sqrt{x})}=\frac{\sqrt{a^2-x}\cdot(a+\sqrt{x})}{a^2-(\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{a^2-x}\cdot(a+\sqrt{x})}{a^2-x},$$ che è il risultato cercato.

Esempio 3°. Sia data la frazione: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$.

Moltiplicando il numeratore ed il denominatore per $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$, si avrà:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}=\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2-\left(\sqrt[4]{y}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}}.$$

E poichè $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt[4:2]{x^{2:2}}=\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$, e $\sqrt[4]{y^2}=\sqrt{y}$; si avrà ancora:

$$\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}}=\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

Moltiplicando ora ambi i termini di quest'ultima frazione per $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, si avrà: $$\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y},$$ che è il risultato cercato.

Esempio 4°. Sia data la frazione: $\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$. Pel § 59 si ha: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Si vede così che moltiplicando $a-b$ p

* Perchè è $\sqrt{90}=\sqrt{9\cdot10}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}=3\sqrt{10}$.

a^2+ab+b^2 si ottiene per prodotto a^3-b^3. Se poniamo $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=\sqrt[3]{y}$, sarà $a^3=x$ e $b^3=y$. Si vede allora che moltiplicando $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ per $\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2$, ossia per $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$, si ottiene per prodotto $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{y}\right)^3$, cioè $x-y$.

Moltiplicheremo quindi ambi i termini della frazione data pel polinomio $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$; ed otterremo:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{a\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}=\frac{a\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}{x-y}.$$

Si riducano le seguenti frazioni in altre aventi per denominatore una espressione razionale:

832. $\frac{4\sqrt[3]{12}}{2\sqrt{3}}$. **833.** $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$. **834.** $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}008}}$. **835.** $\frac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt{9}}$.

836. $\frac{5-\sqrt{4{,}5}+5\sqrt{12{,}5}}{\sqrt{2}}$. **837.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **838.** $\frac{1}{5+\sqrt{5}}$.

839. $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$. **840.** $\frac{9}{\sqrt{19}+4}$. **841.** $\frac{66}{13-7\sqrt{3}}$. **842.** $\frac{\sqrt{1\,{}^1/_{15}}-1}{5\sqrt{{}^3/_5}+4}$.

843. $\frac{5\sqrt{7}+6\sqrt{10}}{5\sqrt{1{,}75}+6\sqrt{2{,}5}}$. * **844.** $\frac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$. **845.** $\frac{3+\sqrt{2}}{5-\sqrt{8}+\sqrt{18}}$.

846. $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. **847.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

848. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$. **849.** $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-2}$. **850.** $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

851. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}$. **852.** $\frac{m^2}{\sqrt{m^2-1}-1}$. **853.** $\frac{a-b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{3b-a}}$.

854. $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}}$. **855.** $\frac{2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$. **856.** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

857. $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}}$. **858.** $\frac{b\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$. **859.** $\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-\sqrt{x}}$.

860. $\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}}$. **861.** $\frac{a^2-1}{(\sqrt{a}+1)\sqrt{a+1-2\sqrt{a}}}$.

---

* Si faccia in modo che i radicandi che si troveranno nel risultato siano numeri interi.

862. $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}$. **863.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. **864.** $\dfrac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

865. $\dfrac{5\sqrt{7}+6\sqrt{10}}{5\sqrt{1,75}+6\sqrt{2,5}}$. **866.** $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}}$. **867.** $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

868. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$. **869.** $\dfrac{9}{1-\sqrt[3]{2}}$. * **870.** $\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

871. $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$. **872.** $\dfrac{m}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$. **873.** $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{4}}$. **

874. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}-\sqrt[6]{4}}$. **875.** $\dfrac{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{6}}{\sqrt[12]{9}-\sqrt[12]{6}}$. *** **876.** $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{3}}$.

877. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$. **** **878.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$. **879.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$.

880. $\dfrac{5}{\sqrt[6]{2}+\sqrt[4]{3}}$. **881.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8a+8}-\sqrt[3]{a+1}}$. *****

Si verifichino le seguenti eguaglianze. ******

882. $\sqrt[3]{5+\sqrt{52}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{52}}=1.$

883. $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2.$ **884.** $\sqrt[3]{9+16\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-16\sqrt{5}}=3.$

885. $\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\dfrac{7}{2}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}.$ **886.** $\sqrt{3+\sqrt{8}}=1+\sqrt{2}.$

887. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}.$ **888.** $\sqrt{3-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}}.$

889. $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$

890. $\sqrt{2-\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})+\sqrt{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})=3\sqrt{6}.$

---

* Si osservi che è: $1=\sqrt[3]{1}$.

** Si moltiplichino prima i due termini della frazione per $\sqrt[6]{5}-\sqrt[6]{4}$; e poi, facendo la semplificazione dei radicali, si avrà per denominatore la differenza di due radicali cubici. Si farà allora come nell'esempio 4°.

*** Si moltiplichi prima il numeratore ed il denominatore per $\sqrt[12]{9}+\sqrt[12]{6}$.

**** In questo esercizio e nei due seguenti si riducano prima al medesimo indice i radic del denominatore.

***** Si cominci a semplificare il primo radicale.

****** Basta elevare successivamente a potenza conveniente i due membri delle eguaglian e poi isolare, se occorre, i radicali.

Esponenti negativi e frazionari.

I calcoli colle potenze ad esponente frazionario, positivo o negativo, si eseguiscono come quelli delle potenze intere. Si noti però:

1°. Si suole, generalmente, nel risultato finale, invece della potenza frazionaria scrivere il radicale aritmetico corrispondente. Così invece di scrivere p.e. $a^{\frac{2}{3}}$ si scrive $\sqrt[3]{a^2}$.

2°. Quando la base della potenza è un numero scritto nel sistema decimale, è spesso utile, prima di ogni altra cosa, scomporlo nei suoi fattori primi.

3°. Se l'esponente è una frazione ordinaria, è conveniente ridurla, se non lo è, ai minimi termini.

4°. Se l'esponente è un numero decimale, è generalmente utile metterlo sotto forma di frazione ordinaria irreducibile.

5°. Avendo da eseguire calcoli con radicali aritmetici, è sempre lecito dare ai radicali la forma di potenza frazionaria, eseguire le operazioni indicate (seguendo le regole delle operazioni sulle potenze), e poi, nel risultato finale, restituire alle potenze frazionarie la forma di radicali.

6°. Similmente, avendo da fare calcoli con potenze frazionarie, è sempre lecito dar loro la forma di radicali aritmetici, eseguire le operazioni indicate (seguendo le regole delle operazioni sui radicali aritmetici), e poi, nel risultato finale, restituire ai radicali la forma di potenza frazionaria.

7°. Quando gli esponenti sono letterali, si applichino le regole esattamente come se fossero numeri scritti nel sistema decimale.

Si eseguiscano le seguenti operazioni:

891. a^{-1}. **892.** $(a^n)^{-m}$. **893.** $(-a)^{-3}$. **894.** $(-a^n)^{-4}$.

895. $(-a)^{-2n}$. **896.** $(-a)^{-(2n+1)}$. **897.** $(-1)^{2n}$. **898.** $(-1)^{2n+1}$.

899. $(-1)^{-2n}$. **900.** $(-1)^{-(2n+1)}$.

901. $(-3)^2-(-4)^5-(-7)^3+(-2)^7+(-1)^{-1}+(-1)^{-2}$.

902. $(-1)^5\times(-2)^3-(-3)^4\times(-4)^3+(-6)^5\times(-7)^4+16(-2)^{-4}$.

903. $27.3^{-2}+144.2^{-4}+(1:7^{-3})+(6^{-4}:6^{-5})$.

904. Si dimostri la validità delle 5 formole del § 182 anche nel caso in cui alcuni o tutti gli esponenti sono frazionari o negativi.

905. $36^{\frac{3}{2}}$. **906.** $49^{\frac{7}{2}}$. **907.** $4^{-\frac{7}{2}}$. **908.** $8^{-\frac{7}{3}}$. **909.** $9^{-0,5}$.

910. $16^{\frac{1}{2}}+8^2+16^{\frac{3}{4}}+125^{\frac{1}{3}}-512^{\frac{5}{3}}+100^{0,5}-81^{0,75}$.

911. $7^{\frac{3}{4}}\cdot7^{\frac{3}{2}}\cdot7^{\frac{1}{4}}+16^{\frac{20}{17}}\cdot16^{\frac{5}{17}}\cdot16^{\frac{1}{34}}$. **912.** $(1\,{}^3/_4)^{\frac{1}{2}}\cdot({}^8/_{11})^{\frac{1}{2}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\cdot({}^2/_7)^{\frac{1}{2}}$.

913. $\left(\frac{ay}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{bx}{y^2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{y^2}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{4}}$. **914.** $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)$.

915. $\left(m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)\left(m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}\right)$. **916.** $\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+a^0\right)\left(a^{-\frac{1}{3}}-a^0\right)$.

917. $\left(x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

918. $\left(x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)$. **919.** $\left(1+a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}+a\right)^2$.

920. $\left(\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{6}x^{-1}y^{-3}\right)^2$.   **921.** $\left(\frac{3}{2}a^{-2}b^3+\frac{1}{4}a^{-5}b^{-\frac{5}{3}}\right)^2$.

922. $\left(a^{\frac{7}{2}}-a^3+a^{\frac{5}{2}}-a^2+a^{\frac{3}{2}}-a+a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$.

923. $\left(a^{-1}-x^{-1}\right):\left(a^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)$.   **924.** $\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$.

925. $\left\{\dfrac{1}{a-\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{a+\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}\cdot\dfrac{x^2}{2\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. *

Equazioni di 2° grado ad una incognita



EQUAZIONI INCOMPLETE.

Se a è un numero positivo, si suole scrivere $\sqrt{-a}=\sqrt{(-1).a}=\sqrt{-1}.\sqrt{a}$. Invece di $\sqrt{-1}$ si suole ancora scrivere i, ponendo per definizione, $i=\sqrt{-1}$; cosicchè $\sqrt{-a}$ si scriverà $i\sqrt{a}$.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $16x^2+9=0$.

Si ha $a=+16$, $c=+9$, e perciò: $-\frac{c}{a}=-\frac{9}{16}$. E quindi pel teor. § 202, $x=\pm\sqrt{-\frac{9}{16}}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}.(-1)}=\pm\sqrt{\frac{9}{16}}.\sqrt{-1}=\pm\frac{3}{4}i$.

Risposta. *Le radici sono* $x'=+\frac{3}{4}i$, *ed* $x''=-\frac{3}{4}i$. *Esse sono due numeri immaginari.*

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $x^2-m^2-2mn-n^2=0$.

Quest'equazione ha un termine solo contenente l'incognita. Portando nel 2° membro i termini noti, si avrà: $x^2=m^2+2mn+n^2$, ossia

$x^2=(m+n)^2$. Da cui: $x=\pm\sqrt{(m+n)^2}=\pm(m+n)$.

Risposta. *Le radici sono* $x'=m+n$, *ed* $x''=-(m+n)$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $2x^2-7x=0$.

In questo caso è $a=+2$, $b=-7$, e $-\frac{b}{a}=-\frac{-7}{2}=+\frac{7}{2}$.

Avremo quindi (pel teor. § 203): $x'=0$, $x''={}^7/_2$.

Risposta. *Le radici dell'equazione sono* $x'=0$, ed $x''=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

* Si eseguisca prima, secondo le regole ordinarie, la sottrazione indicata entro la parentesi, e si facciano poi tutte le possibili riduzioni nel numeratore e nel denominatore.

Esempio 4°. *Si risolva l'equazione:* $5x^2 - x\sqrt{3} = 0$.

In questo caso è $a = +5$, e $b = -\sqrt{3}$.

Sarà perciò: $-\frac{b}{a} = -\frac{-\sqrt{3}}{5} = +\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$, e quindi:

Risposta. *Le radici sono* $x' = 0$, $x'' = \frac{1}{5}\sqrt{3}$.

926. $x^2 - 49 = 0$. **927.** $x^2 = 144$. **928.** $x^2 - 9 = 16$.
929. $3x^2 - 20 = 28$. **930.** $7x^2 = 105903$. **931.** $16x^2 = 1210000$.
932. $x^2 - m = 0$. **933.** $12ab + x^2 = 4a^2 + 9b^2$. **934.** $7x^2 + 18 = 4x^2 + 450$.

935. $10000 - \frac{36x^2}{49} = 199$. **936.** $\frac{7x^2}{4} - \frac{4x^2+5}{2} + \frac{2x^2-15}{4} = 0$.

937. $35 - \frac{x^2+50}{5} = x^2 - \frac{x^2-10}{3}$. **938.** $2(x^2-7) + 3(x^2-11) = 33$.

939. $(x+15)(x-15) = 400$. **940.** $\frac{a^2-x^2}{b^2} = \frac{x^2-b^2}{a^2} - 2$.

EQUAZIONI COMPLETE.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $5x^2 + 32x - 21 = 0$.

Si ha $a = +5$, $b = +32$, $c = -21$. Sostituendo questi valori ad a, b, c nella (6) del § 205, si ottiene:

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4.(+5)(-21)}}{2.5} = \frac{-32 \pm \sqrt{1024+420}}{10} = \frac{-32 \pm \sqrt{1444}}{10} =$$

$$= \frac{-32 \pm 38}{10}. \text{ Da cui:}$$

$$x' = \frac{-32+38}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad x'' = \frac{-32-38}{10} = \frac{-70}{10} = -7.$$

Risposta. *Le due radici sono* $x' = 3/5$, $x'' = -7$.

Osservazione. Poichè il coefficiente di x è un numero pari, ci è più comodo far uso della formola della nota ** pag. 137. Essendo $b = +32$, sarà $b' = 16$, ed avremo: $x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - (+5)(-21)}}{5} = \frac{-16 \pm \sqrt{256+105}}{5} =$

$$= \frac{-16 \pm \sqrt{361}}{5} = \frac{-16 \pm 19}{5}. \text{ Da cui:}$$

$$x' = \frac{-16+19}{5} = +\frac{3}{5}, \qquad x'' = \frac{-16-19}{5} = \frac{-35}{5} = -7.$$

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Si ha $a = +1$, $b = -3$, $c = -10$. Ci è più comodo servirci della (8) del § 205; ed abbiamo $p = -3$, $q = -10$. Sostituendo questi valori di p e di q nella (8), si ha:

$$x = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - (-10)} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{10.4}{4}} =$$

$$= +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9+40}{4}} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = +\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}. \text{ E quindi:}$$

$$x' = +\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5, \qquad x'' = +\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Risposta. *Le due radici sono* $x' = 5$, $x'' = -2$.

Esempio 3°. Si risolva l'equazione: $3x^2-x-3=0$.

Si ha $a=+3$, $b=-1$, $c=-3$. Sostituendo questi valori di a, b, c nella (6) del § 205, si ottiene:

$$x=\frac{+1\pm\sqrt{1^2-4(+3)(-3)}}{2.3}=\frac{+1\pm\sqrt{1+36}}{6}=\frac{+1\pm\sqrt{37}}{6}.\quad \text{Da cui:}$$

$$x'=\frac{+1+\sqrt{37}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{37},\qquad x''=\frac{+1-\sqrt{37}}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{37}.$$

Risposta. Le due radici sono $x'=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{37}$ ed $x''=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{37}$.

Esempio 4°. Si risolva l'equazione: $2x^2-3x+5=0$.

Si ha $a=+2$, $b=-3$, $c=+5$. Sostituendo questi valori ad a, b, c nella (6) del § 205, si ottiene:

$$x=\frac{+3\pm\sqrt{(-3)^2-4(+2)(+5)}}{2.2}=\frac{+3\pm\sqrt{9-40}}{4}=\frac{+3\pm\sqrt{-31}}{4}=$$

$$=\frac{+3\pm\sqrt{(-1)31}}{4}=\frac{+3\pm\sqrt{-1}\,.\sqrt{31}}{4}=\frac{+3\pm i\sqrt{31}}{4}=\frac{3}{4}\pm i\,\frac{\sqrt{31}}{4}.$$

Risposta. Le due radici sono $x'=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{31}}{4}i$, $x''=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{31}}{4}i$; *esse sono ambedue immaginarie.*

Esempio 5°. Si risolva l'equazione: $x^2-(a+b)x+ab=0$.

In quest'equazione il coefficiente di x è $-(a+b)$, ed il termine indipendente è ab. Applicando la formola di risoluzione, si ha:

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2}.$$

Sviluppando il quadrato che è sotto il segno di radice, si ha:

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}}{2}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab}}{2}=$$

$$=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2}}{2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2}.\quad \text{E quindi:}$$

$$x'=\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a.$$

$$x''=\frac{a+b-(a-b)}{2}=\frac{a+b-a+b}{2}=\frac{2b}{2}=b.$$

Risposta. Le due radici sono $x'=a$, $x''=b$.

941. $x^2-6x+8=0$. **942.** $x^2-4x-21=0$. **943.** $x^2+8x+12=0$.

944. $x^2-10x+25=0$. **945.** $x^2+6x+9=0$. **946.** $x^2-4x+7=0$.

947. $x^2-2x+6=0$. **948.** $25x(x+1)=-4$. **949.** $2x(4x-2)=4$.

950. $4(x^2-1)=4x-1$. **951.** $(2x-3)^2=8x$.

952. $(3x-2)^2-(2x-3)^2=15$. **953.** $(3x+2)(2x-3)+(x+1)(x+4)=12$.

954. $\frac{x-2}{3}+\frac{(x+1)(x-3)}{6}=3$. **955.** $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-1}{4}+\frac{(2x+1)^2}{6}=\frac{19x+7}{12}$.

956. $(2x-1)^2+(1-2x)^2+8(x+12)=0$.

957. $\frac{(2x-3)(2x+1)}{4}+\frac{7x}{12}+\frac{9}{4}=\frac{(x-1)(x+2)}{6}$.

958. $(x-1)^3-(x-2)^3+9x=7.$

959. $(x-1)(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4)+15x=0.$

960. $\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\frac{x}{4}-1\right)\left(\frac{x}{5}-1\right)-\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{10}-1\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)=\frac{21x}{20}-2.$

961. $\left[\frac{x-1}{3}+\frac{1-2x}{4}-\left(5-\frac{x}{2}\right)\right]^2=\frac{361}{16}.$

962. $(x+2)(x-3)+(x+3)(x+2)=x(x+4).$

963. $\frac{(x-3)(x-4)}{2}-\frac{(x+3)(x-2)}{6}=7.$

964. $(x-1)^2+(x+2)^2+(x-2)^2+(x+1)^2=2(x-1)(x-5).$

965. $(2x+3)(2x^2-3x+4)-2(2x+3)(x-1)(x-2)=0.$

966. $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)x-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)x=\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}.$

967. $(2x-3)^2-(2x-3)(5x-3)=(3x-2)^2-(3x-2)(5x-2).$

968. $(3x+5)^2-(2x+3)^2=0.$

969. $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{3x+1}{4}-1\right)^2-\left(\frac{x+1}{2}-\frac{1-2x}{6}+1\right)^2=0.$

970. $\left(\frac{2x-3}{4}+\frac{1-3x}{6}-\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{3x-2}{6}-\frac{3x+1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2.$

971. $\frac{x-1}{4}+\frac{(x-2)(x-3)}{8}-3=\frac{x+1}{2}-\frac{15}{4}.$

972. $\frac{(2x-1)(3x+1)}{9}-\frac{(3x-1)(2x+1)}{4}=\frac{1}{12}-2x.$

973. $(2x-1)^2+(3x+2)^2-(5x-1)^2=10.$

974. $\frac{x(2x-1)}{4}-\frac{3x(x-1)}{2}=\frac{(x+1)^2-7x-21}{4}.$

375. $2x(x+1)-(x-1)^2=2x(2+\sqrt{3})-2.$

976. $\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{8}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{8}\right)+6=0.$

977. $\left(\frac{x-1}{3}+\frac{2x+1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{x-1}{3}+\frac{2x+1}{4}-\frac{1}{2}\right)+6=0.$

978. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$ **979.** $c^2x^2+(ac-bc)x-ab=0.$

980. $x^2-4bx+4b^2-a^2=0.$ **981.** $x^2-2a^2bx+a^4b^2-a^2b^4=0.$

982. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0.$ **983.** $x^2-2acx+a^2(c^2-b^2)=0.$

984. $abcx^2-(a^2b^2+c^2)x+abc=0.$ **985.** $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0.$

986. $12abx^2-(16a^2-9b^2)x-12ab=0.$

987. $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0.$ **988.** $c^2x^2-2acx+a^2-b^2=0.$

989. $d^2x^2-4abdx+4a^2b^2-9c^2=0.$ **990.** $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0.$

991. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0.$ **992.** $4a^2x=(a^2-b^2+x)^2.$

993. $\frac{x^2}{(m+n)^2}-\frac{4mn}{(m+n)^2}x-(m-n)^2=0.$

994. $(a+b)^2x^2-(a+b)^2x+ab=0.$ **995.** $(a+b)x^2-2ax+a-b=0.$

996. $(a^2-b^2)x^2-(a^2+2ab-b^2)x+ab=0.$

997. $7a(a-x)+7x(a+x)-7x^2=16(a^2-x^2).$

998. $(b-x)(2x-a)^2-(a-x)(2x-b)=x^2-\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$

999. $x^2-(a+b+1)x+ab-b=0$.

1000. $\frac{x^2-(a+1)x}{b}-\frac{x^2-(b+1)x}{a}=\frac{bx}{a}-\frac{a}{b}$.

1001. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b-a}\right)x^2-\left(\frac{a}{a+b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b-a}\right)x+\frac{a}{a+b}=0$.

SULLE PROPRIETÀ DELLE RADICI DI $x^2+px+q=0$.

Esempio 1°. *Si costruisca l'equazione di 2° grado in x le cui radici sono $+3$ e -1.*

1° METODO. Pel teor. 1° § 209, Osservaz., la somma delle radici è eguale al contrario del coefficiente di x. La somma delle radici $+3$ e -1 è $+2$; dunque il coefficiente di x è -2. Pel teor. 2° § 210, Osservaz., il prodotto delle radici è eguale al termine indipendente; e nel caso nostro questo prodotto è -3. Dunque nell' equazione $x^2+px+q=0$ abbiamo $p=-2$, $q=-3$.

Risposta. *L'equazione cercata è* $x^2-2x-3=0$.

2° METODO. Facendo uso del coroll. 1° § 210, Osservaz., si sottrae da x ciascuna delle radici, e si ha $x-3$, ed $x-(-1)$, ossia $x-3$ ed $x+1$. Il prodotto $(x-3)(x+1)$ è eguale a x^2+px+q. Eguagliando a zero questo prodotto si avrà l'equazione cercata.

Risposta. *L'equazione cercata è* $(x-3)(x+1)=0$.

Osservazione. Eseguendo il prodotto $(x-3)(x+1)$, si ha: $x^2-3x+x-3=0$, ossia $x^2-2x-3=0$, che è l'equazione precedentemente ottenuta.

Esempio 2°. *Dell'equazione $x^2-x-20=0$ una radice è $+5$. Si trovi l'altra radice.*

1° METODO. Pel teor. 1° § 209, Osservaz., la somma delle due radici è eguale al contrario del coefficiente di x; e nel caso nostro è $+1$. Una di esse è $+5$; l'altra sarà perciò $+1-5=-4$.

Risposta. *Le due radici sono* $x'=+5$, $x''=-4$.

2° METODO. Pel teor. 2° § 210, Osservaz., il prodotto delle due radici è eguale al termine indipendente; e nel caso nostro è -20. Una radice è $+5$; l'altra sarà $\frac{-20}{+5}=-4$.

Risposta. *Le due radici sono* $x'=+5$, $x''=-4$.

Osservazione. Quantunque i teor. 1° e 2° dei §§ 209, 210 si riferiscano all'equazione sotto la forma $ax^2+bx+c=0$, se l'equazione è data sotto la forma $ax^2+bx+c=0$, è spesso utile ridurla prima alla forma $x^2+px+q=0$ col dividerne tutti i termini pel coefficiente di x^2.

Esempio 3°. *Si scomponga il trinomio $x^2-8x+15$ in fattori di 1° grado in x.*

Eguagliando il trinomio a zero si ha l'equazione $x^2-8x+15=0$, le cui radici sono $x'=+3$, $x''=+5$.

Risposta. *Il trinomio è* $1(x-3)(x-5)$, *ossia* $(x-3)(x-5)$.

Si decompongano i seguenti trinomi in prodotti di fattori di 1° grado in x:

1002. $x^2-9x+18$. **1003.** $x^2+3x-28$. **1004.** $3x^2-21x+36$.

1005. $2x^2-12x+18$. **1006.** $2x^2-3x-2$. **1007.** x^2+x-1.

1008. $49x^2-7x-1$. **1009.** $ax^2-a^2(x+b^2)-ab(x-ab)$. *

1010. $(x-a)^2-b(x-a-c)-bc$.

Si semplifichino le seguenti frazioni: **

1011. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. **1012.** $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$. **1013.** $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$.

1014. $\frac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}$. **1015.** $\frac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. **1016.** $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$.

Si costruiscano le equazioni di 2° grado ad un'incognita a coefficienti reali ed interi, aventi rispettivamente per radici:

1017. $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{4}$. **1018.** 7 e -3. **1019.** 3 e $\frac{1}{2}$.

1020. $a+b$ ed $a-b$. **1021.** $a+b$ ed $\frac{1}{a+b}$.

1022. $\frac{1}{a+b}$ ed $\frac{1}{a-b}$. **1023.** $\frac{a+b}{a-b}$ ed $\frac{a-b}{a+b}$.

1024. $3+\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{2}$. **1025.** $4+\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $4-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

1026. $a+\sqrt{b}$ ed $a-\sqrt{b}$.

1027. Si dimostri la regola dei segni di Descartes facendo uso solamente dei due teoremi dei §§ 209, 210.

1028. Si costruisca l'equazione di 2° grado ad un'incognita che ha 7 per coefficiente di x^2, ha -14 per coefficiente di x, ed una radice eguale a -5.

1029. Si dimostri che l'equazione $(ax+b)^2+(a'x+b')^2=0$ ha le radici immaginarie. ***

1030. Si dimostri che l'equazione $(ax+b)^2-(a'x+b')^2=0$ ha le radici reali.

1031. Si determini il valore di q in modo che una delle radici dell'equazione $x^2-7x+q=0$ sia 3.

1032. idem sia -3.

1033. idem sia $4/5$.

1034. idem sia 0.

1035. Si determini il valore di p in modo che le radici dell'equazione $x^2-px+36=0$ siano eguali. ****

1036. idem abbiano egual valore numerico e segno contrario.

1037. Si determini q in modo che le radici x' ed x'' dell'equazione $x^2-8x+q=0$ siano eguali.

1038. idem soddisfino alla relazione $x'=3x''$.

1039. idem soddisfino alla relazione $3x'-4x''=3$.

1040. idem abbiano valori reciproci. *****

1041. idem soddisfino alla relazione $x'=-\frac{1}{x''}$.

1042. idem soddisfino alla relazione $x'^2+x''^2=40$. ******

---

* Si ordini prima il polinomio.

** Si scomponga prima ciascun trinomio in un prodotto di fattori.

*** Si ricorra al discriminante dell'equazione.

**** In questo, e nei sette esercizi seguenti, si trovi prima la formola che dà il valore delle radici, supponendo noto il valore che si cerca.

***** Cioè soddisfino alla relazione $x'=1/x''$.

****** Si osservi che si ha: $x'^2+x''^2=(x'+x'')^2-2x'x''$.

1043. Si determini il valore di p in modo che le radici x' ed x'' dell'equazione $x^2-px+36=0$ soddisfino alla relazione $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{5}{12}$. *

1044. Si determini il valore di n in modo che le radici dell'equazione $(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+n=0$ siano eguali. **

1045. idem abbiano valori reciproci.

1046. Si determini il valore di m in modo che le radici dell'equazione $2x^2-(m-1)x+m+1=0$ differiscano di 1. ***

1047. Si determini il valore di m in modo che le radici dell'equazione $8x^2-(m-1)x+(m-7)=0$ siano reali ed eguali.

1048. idem siano due numeri contrari.

1049. idem abbiano valori reciproci.

1050. idem siano tali che una di esse sia eguale a zero.

1051. Quale relazione deve esistere fra p e q dell'equazione $x^2+px+q=0$, affinchè il rapporto delle radici sia m? (ossia affinchè il valore d'una radice sia eguale ad m volte il valore dell'altra?). ****

1052. idem affinchè una radice sia doppia dell'altra?

1053. idem affinchè sia $5x'-3x''=3$?

1054. idem affinchè sia $x'^2+x''^2=m$?

1055. idem affinchè sia $x'^2-x''^2=m$? *****

1056. Data l'equazione $ax^2+bx+c=0$ se ne formi un'altra le cui radici siano i valori contrari delle radici dell'equazione data. ******

1057. idem siano reciproche di quelle dell'equazione data.

1058. idem siano eguali a quelle dell'equazione data, aumentate di m.

1059. idem siano eguali a quelle dell'equazione data, diminuite di m.

1060. idem siano eguali a quelle dell'equazione data, moltiplicate per m.

1061. idem siano eguali a quelle dell'equazione data, divise per m.

1062. idem siano eguali ai quadrati delle radici dell'equazione data.

1063. idem siano reciproche dei quadrati delle radici dell'equazione data.

1064. idem siano una eguale alla somma e l'altra eguale al prodotto delle radici dell'equazione data.

1065. Si verifichino sopra l'equazione $2x^2-7x+3=0$ i risultati dei nove esercizi precedenti, ponendo $m=5$.

Problemi che si risolvono con equazioni di 2° grado ad un'incognita.

PROBLEMA. *L'età di Carlo fra tre anni sarà il quadrato dell'età che aveva tre anni or sono. Quanti anni ha Carlo?*

Risoluzione. Se rappresentiamo con x il numero d'anni che Carlo ha pre-

---

* Si osservi che è $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}$.

** Si ricorra al discriminante dell'equazione.

*** Dalla formola (6) del § 205 si trovi prima a che cosa è eguale la differenza delle radici.

**** Si deve avere $\frac{x'}{x''}=m$. Si ha inoltre $x'+x''=-p$ ed $x'x''=q$. Si eliminino x' ed x'' fra queste equazioni. Analogamente si opera nei quattro esercizi seguenti.

***** Si trovi prima a che cosa è eguale la differenza delle radici.

****** In questo e negli otto esercizi seguenti si rappresentino con x' ed x'' le radici dell'equazione data, con x'_1 ed x''_1 le radici dell'equazione cercata; e si cerchi il valore di $x'_1+x''_1$ e di $x'_1x''_1$.

sentemente, fra tre anni avrà $x+3$ anni; e tre anni or sono ne aveva $x-3$. E poichè $x+3$ deve essere eguale al quadrato di $x-3$, si avrà l'equazione:

$$x+3=(x-3)^2, \quad \text{ossia} \quad x+3=x^2-6x+9, \quad \text{ossia} \quad x^2-7x+6=0.$$

L'equazione ha le due radici $x'=1$, ed $x''=6$. Verifichiamo se entrambe soddisfano al problema.

La radice $x'=1$ dice che Carlo ha 1 anno. Perciò 3 anni or sono ne aveva $1-3=-2$. Questo risultato non è ammissibile. Dunque $x'=1$ non è una soluzione del problema.

La radice $x''=6$ dice che Carlo ha 6 anni. Perciò 3 anni or sono ne aveva $6-3=3$; e fra 3 anni ne avrà $6+3=9$; e 9 è appunto il quadrato di 3.

Risposta. *Carlo presentemente ha* 6 *anni.*

Osservazione. Se l'età potesse assumere valori negativi, anche $x'=1$ verificherebbe il problema: perchè se ora ha un anno, fra tre anni ne avrà 4; e 4 è precisamente il quadrato di -2.

PROBLEMI.

1066. La differenza di due numeri è 13, e la differenza dei loro quadrati è 455. Quali sono questi due numeri?

1067. Si scomponga 14 in due parti tali che la somma dei loro quadrati sia 100.

1068. La somma di due numeri è a, quella dei loro quadrati è b. Quali sono questi due numeri?

1069. Qual è il numero che moltiplicato per $3\,^1/_3$ dà un prodotto eguale a 25 più $^1/_9$ del quadrato del numero stesso?

1070. Si chiede una frazione i cui termini diano 120 per prodotto, e diventino eguali quando si toglie 1 al denominatore per aggiungerlo al numeratore.

1071. Si trovino tre numeri interi consecutivi tali che il loro prodotto sia eguale al quintuplo della loro somma.

1072. Facendo il quadrato dei $^3/_7$ dell'ora che segna l'orologio, ottengo quella che segnerà fra due ore. Che ora abbiamo?

1073. Si determini un numero di tre cifre conoscendo che queste sono tre numeri consecutivi, crescenti a cominciare da sinistra, e che il numero diviso per la somma dei prodotti delle tre cifre prese a due a due, dà 7 per parte intera del quoziente, e 16 di resto.

1074. Nel rivendere un oggetto per 11 lire, si guadagna tanto per 100 quanto aveva costato. Chiedesi il prezzo di compera.

1075. Si scomponga ciascuno dei numeri 50 e 20 in due parti tali che una delle parti di 50 sia il doppio di una delle parti di 20, e che il prodotto delle altre due sia 300.

1076. Un numero è il prodotto di tre numeri impari consecutivi: dividendolo per ciascuno di essi, e sommando i quoti, si ottiene 239. Si cerchi questo numero.

1077. Una palla elastica, cadendo da una qualunque altezza e rimbalzando, risale sempre ad un'altezza che serba un rapporto costante coll'altezza da cui è caduta. Si determini questo rapporto, sapendosi che se fosse caduta da un'altezza p e rimbalzata una sola volta, sarebbe salita ad un'altezza superiore di 2 metri a quella a cui sarebbe salita se fosse caduta dall'altezza di metri $p-1$, e rimbalzata 2 volte.

DISCUSSIONE DEI PROBLEMI DI 2° GRADO AD UNA INCOGNITA.

PROBLEMA 1°. *Un corpo è lanciato verticalmente in alto, nel vuoto, con la velocità iniziale a. Dopo quanto tempo arriverà all'altezza h? (I numeri a ed h si suppongono entrambi positivi).*

Risoluzione. Si sa dalla meccanica che il moto del corpo sarà uniformemente ritardato, e che la formola che esprime la legge di questo moto è

$$s = at - {}^1/_2\, gt^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

ove g è l'accelerazione dovuta alla gravità, a la velocità iniziale, ed s lo spazio percorso nel tempo t.

Nel caso nostro lo spazio che deve essere percorso è h; e rappresentando con x il tempo richiesto (espresso in minuti secondi), potremo nella (α) sostituire h ad s, ed x a t; ed otterremo l'equazione: $h = ax - {}^1/_2\, gx^2$, ossia

$${}^1/_2\, gx^2 - ax + h = 0, \quad \text{ossia} \quad gx^2 - 2ax + 2h = 0 \quad \dots \quad (1)$$

la quale è un'equazione di 2° grado in x, le cui radici sono:

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4.2gh}}{2g} = \frac{2a \pm \sqrt{4(a^2 - 2gh)}}{2g} = \frac{2a \pm 2\sqrt{a^2 - 2gh}}{2g} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2gh}}{g}.$$

$$\text{Ossia} \quad x' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 2gh}}{g}, \qquad x'' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 2gh}}{g} \quad \dots\dots \quad (2)$$

Discussione. La natura del problema richiede che il valore di x sia *reale, positivo*. Il numero g è invariabile, e positivo. Vediamo a quali condizioni devono soddisfare a, h affinchè il problema ammetta soluzione, ossia affinchè x sia *reale, positivo*. Poichè g, h sono positivi, $2gh$ sarà positivo, ed il radicando $a^2 - 2gh$ sarà la differenza di due numeri positivi. Affinchè x sia *reale* deve essere positivo il radicando, ossia deve essere $a^2 - 2gh \geqq 0$, ossia $2gh \leqq a^2$,

$$\text{ossia} \quad h \leqq \frac{a^2}{2g} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Poichè a, g, h sono positivi, l'equazione (1) ha nel 1° membro due variazioni; epperciò se le sue radici sono reali, saranno (regola § 208) entrambe *positive*. Ne segue che: *Affinchè i valori x' ed x'' soddisfino al problema, è necessario e sufficiente che sia $h \leqq \frac{a^2}{2g}$.*

Esaminiamo separatamente i vari casi che si possono presentare:

1° Caso. $h = \frac{a^2}{2g}$. Il massimo valore di h sarà $h = \frac{a^2}{2g}$; dunque la massima altezza a cui il corpo può arrivare è eguale ad $\frac{a^2}{2g}$. Per questo valore di h si ha $a^2 - 2gh = 0$; e quindi le due radici della (1) sono eguali e positive, ed il valore comune è $x' = x'' = \frac{a}{g}$.

Risposta. *Il corpo arriva alla sua massima altezza dopo il tempo $\frac{a}{g}$.*

2° Caso. $h < \frac{a^2}{2g}$, *e maggiore di zero.* Il radicando sarà positivo e minore di a^2; e quindi il valore aritmetico del radicale sarà minore di $\sqrt{a^2}$ ossia minore di a, ed i due valori di x saranno entrambi reali e posit

problema ammetterà perciò due soluzioni. Ed infatti il corpo arriverà ad una data altezza due volte, cioè una in salita e l'altra in discesa.

Risposta. *Il corpo arriva due volte all'altezza* h; *cioè la 1ª volta (in salita) dopo il tempo* $x' = \frac{a-\sqrt{a^2-2gh}}{g}$; *la 2ª volta (in discesa) dopo il tempo* $x'' = \frac{a+\sqrt{a^2-2gh}}{g}$.

3º Caso. $h=0$. Si avrà: $x = \frac{a\pm\sqrt{a^2-0}}{g} = \frac{a\pm\sqrt{a^2}}{g} = \frac{a\pm a}{g}$. Da cui:

$$x' = \frac{a-a}{g} = \frac{0}{g} = 0, \qquad x'' = \frac{a+a}{g} = \frac{2a}{g}.$$

Quando è $h=0$, il corpo si trova al punto di partenza; e le soluzioni della (1) ci dicono che il corpo vi si trova due volte. La 1ª volta dopo il tempo *zero*, cioè all'istante stesso in cui è lanciato in alto; la 2ª volta dopo il tempo $\frac{2a}{g}$.

Risposta. *Il corpo si trova due volte all'altezza zero. La 1ª volta all'istante della partenza, e la 2ª volta dopo il tempo* $\frac{2a}{g}$.

Osservazione 1ª. Abbiamo visto al 1º caso che il corpo impiega il tempo $\frac{a}{g}$ per arrivare alla massima altezza. Dunque: *Il corpo impiega il medesimo tempo a percorrere lo spazio* h, *sia che lo percorra in salita, sia che lo percorra in discesa.*

Osservazione 2ª. Dalla relazione $h = \frac{a^2}{2g}$ si ricava che: *La massima altezza a cui sale un corpo lanciato verticalmente in alto, nel vuoto, è direttamente proporzionale al quadrato della velocità iniziale.* E quindi per far salire il corpo ad una altezza doppia, tripla, ecc., occorre imprimergli una velocità iniziale quadrupla, nonupla, ecc.

PROBLEMA 2º. *Si divida il numero* p *in due parti il cui prodotto sia* q.

Risoluzione. Se x' è la 1ª parte, ed x'' la 2ª parte, avremo:

$$x'+x''=p, \qquad x'x''=q.$$

Pei teor. 1º e 2º dei §§ 209, 210, Osservaz., i valori di x', x'' sono le radici dell'equazione $x^2-px+q=0$. Avremo perciò:

$$x' = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad x'' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Discussione. I valori di x', x'' sono entrambi reali quando il radicando non è negativo, ossia quando è $\frac{p^2}{4} \geqq q$; sono immaginari quando il radicando è negativo, ossia quando è $\frac{p^2}{4} < q$. Esaminiamo separatamente questi tre casi.

1º Caso. $\frac{p^2}{4} > q$. Allora $\frac{p^2}{4} - q$ è positivo; i valori x', x'' sono (§ 208 Riassunto) entrambi reali, positivi e disuguali. I valori cercati sono poi entrambi razionali od irrazionali secondochè $\frac{p^2}{4} - q$ è o non è quadrato.

Risposta. Se è $\frac{p^2}{4} > q$, *il problema ammette una soluzione reale, positiva, e le parti sono disuguali.*

2° Caso. $\frac{p^2}{4} = q$. Sarà $\frac{p^2}{4} - q = 0$, ed i due valori x', x'' sono reali, positivi, ed eguali ambedue a $\frac{p}{2}$.

Risposta. Se è $\frac{p^2}{4} = q$, *il problema ammette una soluzione reale, positiva, e le due parti sono eguali.*

3° Caso. $\frac{p^2}{4} < q$. Sarà $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Il radicando sarà negativo, e quindi i due valori x', x'' saranno immaginari.

Risposta. Se è $\frac{p^2}{4} < q$, *le due parti sono due numeri immaginari.*

Esempio 1°. *Si divida il numero* 10 *in due parti tali che il loro prodotto sia* 21.

Le due parti sono le radici dell'equazione $x^2 - 10x + 21 = 0$. Da cui:

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 5 \pm 2, \quad \text{ossia}$$

$$x' = 5 + 2 = 7, \qquad x'' = 5 - 2 = 3.$$

Risposta. *Le due parti sono* 3 *e* 7.

Esempio 2°. *Si divida il numero* 10 *in due parti tali che il loro prodotto sia* 34.

Le parti sono le radici dell'equazione $x^2 - 10x + 34 = 0$. Da cui:

$$x = +\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} - 34} = 5 \pm \sqrt{25 - 34} = 5 \pm \sqrt{-9} = 5 \pm \sqrt{9.(-1)} =$$

$$= 5 \pm \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 5 \pm 3\sqrt{-1} = 5 \pm 3i. \quad \text{Perciò:} \quad x' = 5 + 3i, \quad x'' = 5 - 3i.$$

Risposta. *Le due parti sono* $5 + 3i$ *e* $5 - 3i$.

Osservazione 1ª. Se si ammettono valori immaginari, il problema ammette sempre soluzione, qualunque siano i valori di p e di q. Se invece si vuole che le due parti siano reali, affinchè il problema ammetta soluzione deve essere $\frac{p^2}{4} \geqq q$, ossia $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \geqq q$, ossia $q \leqq \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Osservazione 2ª. Posto che sia dato un certo numero reale da dividere in due parti reali, possiamo proporci di cercare quale è il massimo e quale è il minimo valore che può avere il prodotto q delle due parti reali. Sappiamo dal problema precedente che affinchè le parti siano reali dev'essere $q \leqq \frac{p^2}{4}$; e quindi:

1°. Il prodotto q è massimo quando è $q = \frac{p^2}{4}$. In questo caso le du radici sono eguali fra loro, e si ha $x' = x'' = \frac{p}{2}$. Il numero è allora divis in parti eguali. Dunque:

TEOREMA. *Il prodotto delle due parti reali in cui può essere divis un numero reale è massimo quando le due parti sono eguali.*

Si può verificare che il valor massimo che può avere il prodotto delle due parti reali in cui si può scomporre p.e. il 10 [od il numero 11] è appunto $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$ $\left[\text{od } \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}\right]$.

2°. Il prodotto è minimo quando è $q=0$. In tal caso le radici dell'equazione $x^2-px+q=0$ sono $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-0}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}}=\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$;

ossia $x'=\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=p$, ed $x''=\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=0$. Una delle due parti sarebbe il numero stesso, e l'altra sarebbe zero. Ma allora il numero non è più diviso in parti.

Osservazione 3ª. Posto che sia dato il valore del prodotto q (essendo q un numero reale) possiamo proporci di cercare qual è il massimo e qual è il minimo valore che può avere la somma delle due parti reali. Sappiamo che se le parti sono reali deve essere $\frac{p^2}{4}\geqq q$; e quindi:

1°. È facile vedere che non esiste un valore massimo di p, perchè ogni valore di p tale che sia $\frac{p^2}{4}>q$ soddisfa alle condizioni volute. Dunque:

TEOREMA. *Dato un numero reale positivo q arbitrariamente piccolo è sempre possibile trovare due numeri reali positivi tali che il loro prodotto sia q, e la loro somma sia un numero p arbitrariamente grande, purchè sia $\frac{p^2}{4}>q$.*

2°. È pure facile vedere che il valore minimo di p si ha quando è $\frac{p^2}{4}=q$, ossia quando è $p^2=4q$, ossia $p=\sqrt{4q}=2\sqrt{q}$. Dunque:

TEOREMA. *Dato il prodotto q di due numeri reali positivi, il minimo valore della loro somma è eguale al doppio della radice quadrata aritmetica del loro prodotto.*

Si può osservare che in questo caso le due radici sono eguali, ed il loro valore è eguale a $\sqrt{q}$. Infatti essendo $p=2\sqrt{q}$, si può sostituire $2\sqrt{q}$ a p nella formola di risoluzione dell'equazione $x^2-px+q=0$, e si ottiene:

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{2\sqrt{q}}{2}\pm\sqrt{\frac{(2\sqrt{q})^2}{4}-q}=\sqrt{q}\pm\sqrt{\frac{4q}{4}-q}=$$
$$=\sqrt{q}\pm\sqrt{q-q}=\sqrt{q}\pm 0;\quad \text{ossia}\quad x'=x''=\sqrt{q}.$$

PROBLEMI.

1078. Due corpi partono contemporaneamente dal vertice di un angolo retto, percorrendo l'uno un cateto, e l'altro l'altro cateto. Le loro velocità sono c e c' metri al secondo. Dopo quanti secondi la loro distanza sarà d metri?

1079. Due corpi, la cui distanza è d metri, si muovono con velocità eguale ed uniforme percorrendo i cateti di un angolo retto, ed andando

verso il vertice del medesimo. L'uno parte t secondi prima dell'altro; ed n secondi dopo la partenza del primo, i corpi s'incontrano nel vertice. Quanti metri al secondo percorre ciascuno di essi?

1080. Due corpi si muovono con velocità costante sopra due rette che si tagliano ad angolo retto. L'uno ha la velocità di c metri al secondo, ed arriva nel punto d'intersezione delle due rette t secondi più tardi dell'altro; questo fa c' metri al secondo. Quanti secondi dopo l'arrivo del primo corpo nel punto d'intersezione la distanza dei due corpi sarà di metri d?

1081. Due corpi si muovono con velocità costanti sopra due rette che si tagliano ad angolo retto, e vanno entrambi verso il vertice del medesimo. Le loro distanze da questo punto sono a e b, e le loro rispettive velocità c e c'. Quando sarà la distanza dei due corpi eguale a d? Quale relazione deve esistere fra le quantità a, b, c, c' affinchè la risoluzione del problema sia possibile?

1082. Quale relazione deve esistere fra le quantità a, b, c, c' del quesito precedente affinchè i due corpi s'incontrino nel punto d'intersezione delle due rette?

1083. Due corpi si muovono, colle velocità costanti c e c' sopra due rette tagliantesi ad angolo retto: essi vanno entrambi verso il punto d'intersezione delle due rette, e le loro distanze da questo punto sono rispettivamente a e b. Quando si troveranno i due punti alla minima distanza l'uno dall'altro?

1084. Un corriere parte dal vertice O dell'angolo retto XOY, e percorre il lato OX con la velocità v. Si domanda con quale velocità dovrà camminare un altro corriere che parte da O e percorre il lato OY, affinchè dopo t ore i due corrieri si trovino ad egual distanza dal punto P, dato di posizione, mediante le sue distanze h e k dai due lati OX ed OY.

Logaritmi.

1085. Nel sistema di base 2, quali sono i logaritmi dei numeri 16, 64, 128, 512, e 1024?

1086. Qual è il logaritmo di 4096 nel sistema di base 2? di base 4? di base 8? di base 16? di base 64? di base 4096?

1087. Nel sistema di base 2, quali sono i logaritmi di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$?

1088. Nel sistema di base $\frac{5}{3}$, quali sono i logaritmi di $\frac{9}{25}$, $\frac{27}{125}$, $\frac{81}{625}$?

1089. Quando la base è 6, fra quali numeri interi sono compresi i logaritmi di 5, 10, 32, 82, 215, 713, 1295?

1090. Nel sistema di base $e = 2{,}71828.....$, si ha: $\log 3 = 1{,}0986123$ e $\log 7 = 1{,}9459101$; si cerchi $\log 21$ e $\log {}^{7}/_{3}$.

1091. Nel sistema di base $\pi = 3{,}14159......$, si ha: $\log 9 = 1{,}9194258$ $\log 11 = 2{,}0947253$; si cerchi $\log 99$ e $\log {}^{9}/_{11}$.

1092. Essendo $\log 3 = 0{,}4771213$, si cerchino i logaritmi di 9, 27, 81, 24:

1093. Essendo $\log.nat. 3 = 1{,}0986123$ e $\log.nat. 7 = 1{,}9459101$, si chiedor i logaritmi nat. di 3^{10}, 7^{5}, $3^{6} \times 7^{4}$, 21^{3}, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{3^{5} \times 7^{3}}$.

1094. Quali sono i logaritmi naturali di 1, e, $\sqrt{e}$, $e.3^n$, $\sqrt[10]{21e^3}$?

Si applichino i teor. dei §§ 226, 227, 228, 229 alle seguenti espressioni:

1095. $\mathrm{Log}\,\frac{abc}{de}$. **1096.** $\mathrm{Log}\,\frac{1}{ab}$. **1097.** $\mathrm{Log}\left(\frac{ab}{c}\right)^p$.

1098. $\mathrm{Log}\sqrt[n]{\frac{a^m}{bc^p}}$. **1099.** $\mathrm{Log}\,\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

1100. Si dimostri l'eguaglianza: $\log(a^2-b^2)=\log ab+\log\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$.

1101. idem $\log(a+b)+\log\left(\frac{a}{b}-1\right)=\log\left(\frac{a}{b}+1\right)+\log(a-b)$.

Si trovino i logaritmi dei seguenti numeri:

1102. 23. **1103.** 513. **1104.** 699. **1105.** 1837. **1106.** 9999.
1107. 99990. **1108.** 9999000. **1109.** 700000. **1110.** 27000.
1111. 437900000. **1112.** 88880000000. **1113.** 19190. **1114.** 1919.
1115. 191,9. **1116.** 19,19. **1117.** 1,919. **1118.** 0,1919. **1119.** 0,01919.
1120. 1100. **1121.** 110. **1122.** 11. **1123.** 1,1. **1124.** 0,11.
1125. 0,011. **1126.** 0,0011. **1127.** 0,00011. **1128.** 10851.
1129. 10852. **1130.** 10857. **1131.** 21584. **1132.** 21587.
1133. 21592000. **1134.** 434340. **1135.** 434341. **1136.** 434342.
1137. 434343. **1138.** 434344. **1139.** 1365147. **1140.** 7130358.
1141. 8073579. **1142.** 3,1415927. **1143.** 2,7182818. **1144.** 26,8337.
1145. 0,341032. **1146.** 0,00040006. **1147.** 0,001002003.

Si trovino i numeri corrispondenti ai seguenti logaritmi:

1148. 0,90309. **1149.** 2,39794. **1150.** 0,72403. **1151.** 3,90819.
1152. 3,5485. **1153.** 6,8948697. **1154.** 2,1331875. **1155.** 0,990019.
1156. 6,4771068. **1157.** 2,9876543. **1158.** 1,9876543. **1159.** 0,9876543.
1160. $\overline{1}$,9876543. **1161.** $\overline{2}$,9876543. **1162.** 0,38991. **1163.** $\overline{1}$,38991.
1164. $\overline{2}$,38991. **1165.** $\overline{3}$,38991. **1166.** $\overline{4}$,30103. **1167.** $\overline{1}$,09028.
1168. $\overline{1}$,23456. **1169.** —0,76544. **1170.** $\overline{2}$,32143. **1171.** —1,67857.
1172. —2,0123457. **1173.** —0,0123457. **1174.** —0,9876543.
1175. —0,5657055. **1176.** —0,5028501.

Si eseguiscano le seguenti operazioni sui logaritmi:

1177. $3,26895+\overline{1},00453+\overline{2},60041+0,00146$. **1178.** $3,46201-\overline{4},56041$.
1179. $0,46003-\overline{1},45709$. **1180.** $\overline{1},06578-3,46890$.
1181. $\overline{1},89216-\overline{4},57830$. **1182.** $3,01462\times 2$. **1183.** $\overline{4},08916\times 5$.
1184. $\overline{1},60431\times 4$. **1185.** $\overline{2},46103:3$. **1186.** $\overline{1},83001:4$. **1187.** $\overline{3},60145:5$.

1188. I logaritmi decimali di 2, 3, 5, π ($\pi=3,14159.....$) sono 0,30103, 0,47712, 0,69897, 0,49714; si cerchino i logaritmi di 2, 3, 5 nel sistema di base π.

1189. Nel sistema decimale si ha: $\log 2=0,30103$, $\log e=0,4342945$, $\log\pi=0,4971499$. Quali sono i logaritmi di π e di e nel sistema di base 2?

Si calcoli per mezzo dei logaritmi il valore delle seguenti espressioni:

1190. $48 \times 786 \times 97480$. **1191.** $0,486 \times 0,9007 \times 0,00408$. **1192.** $3428 \times \frac{2763}{3487}$.

1193. $\frac{758435}{3498}$. **1194.** $\frac{26045}{7504} \times 3978 \times 423$. **1195.** $\frac{4278 \times 396}{745,84}$.

1196. $\frac{0,427 \times 0,2085}{0,88 \times 0,0236}$. **1197.** $\frac{74308 \times 6848}{4369}$. **1198.** $\frac{31,071 \times 21,372 \times 7,259}{0,515 \times 0,719 \times 0,021}$.

1199. $\frac{49876 \times 0,037542 \times 68,7075}{7,81649 \times 578,93 \times 28,4299}$. **1200.** $(1,357245)^{10}$. **1201.** $(1,26677)^{25}$.

1202. $(0,877058)^9$. **1203.** $3^5.(124)^7.(9725)^4$. **1204.** $(0,00405)^{19}$.

1205. $\left(\frac{1}{3}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{16}$. **1206.** $(8095,371)^{-3}$. **1207.** $(0,088463)^{-7}$.

1208. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$. **1209.** $\sqrt{2}$. **1210.** $\sqrt{0,5}$. **1211.** $\sqrt[3]{7}$.

1212. $\sqrt[6]{117649000000}$. **1213.** $\sqrt[11]{3,1866}$. **1214.** $\sqrt[7]{0,0664723}$.

1215. $\sqrt[4]{(39,679)^{15}}$. **1216.** $\sqrt[3]{(37:2939)^5}$. **1217.** $(-3,5879)^7$.

1218. $(-0,083514)^{11}$. **1219.** $(-0,396548)^{-7}$. **1220.** $\sqrt[3]{83\sqrt{3}:7\sqrt[3]{9}}$.

1221. $\left(5\sqrt{28} \cdot \sqrt[3]{81}\right) : \left(\sqrt[3]{394} : \sqrt{2723}\right)$. **1222.** $x = \sqrt[5]{\frac{0,5142}{375}}$.

1223. $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5$. **1224.** $x = \frac{\sqrt[15]{25,36496}}{(0,0893462)^8}$. **1225.** $x = \frac{(45,37284)^{10}}{\sqrt[3]{0,0005462379}}$.

1226. $x = \frac{(5173,841)^5}{(0,04152837)^9}$. **1227.** $x = \frac{\sqrt[7]{(36926 \times 5)^5} \cdot \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{(6258,96)^2}}$.

1228. Si dimostri che i logaritmi di due numeri inversi sono due numeri contrari.

LIBRO TERZO

Proporzioni.

Si liberino dai denominatori le seguenti proporzioni: *

1229. $3^1/_4 : \frac{2}{5} = 5^1/_2 : \frac{13}{55}$. **1230.** $\frac{3}{5} : \frac{8}{9} = 2 : 2\frac{26}{27}$.

1231. $\frac{8}{7} : 5 = \frac{1}{2} : 2\frac{3}{16}$.

Si trovi il valore di x nelle seguenti proporzioni:

1232. $4 : \frac{2}{5} = 7 : x$. **1233.** $3 : 5 = x : 4$. **1234.** $8 : x = 9 : 15$.

1235. $x : 23 = \frac{1}{3} : 6$.

1236. I quattro numeri 6, 5, 7, 9 possono essere i quattro termini d'una proporzione?

1237. Se si chiamano equivalenti due proporzioni i cui rapporti sono eguali, quante proporzioni non equivalenti si possono scrivere coi quattro numeri a, b, c, d tutti diversi fra loro e diversi da zero?

1238. Si dimostri che se in una proporzione un antecedente è eguale, maggiore o minore del suo conseguente, l'altro antecedente sarà rispettivamente eguale, maggiore o minore del proprio conseguente.

1239. Si dimostri che se quattro numeri, presi in un dato ordine, formano una proporzione, i loro valori reciproci, presi nel medesimo ordine, formano pure una proporzione.

1240. Si dimostri che se si ha $a : b = c : d$, si avrà pure $a^n : b^n = c^n : d^n$, ove n è un numero intero e negativo, oppure è un numero frazionario, positivo o negativo.

1241. Si dimostri che se si ha $a : b = c : d$, si avrà $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$, ove n è un numero intero e negativo, oppure è un numero frazionario, positivo o negativo.

---

* Significa che bisogna trovare altre proporzioni a termini interi, ed i cui rapporti siano rispettivamente eguali a quelli delle proporzioni date.

1242. Si dimostri che se si ha la proporzione $\frac{am+cn}{bm+dn}=\frac{a}{b}$, si avrà pure l'altra $a:b=c:d$.

1243. Si dimostri che in ogni proporzione la somma del più grande e del più piccolo termine è maggiore della somma degli altri due. *

1244. Vi può essere una proporzione tale che aggiungendo ai suoi quattro termini un medesimo numero si ottenga una proporzione? **

1245. Uno scolaro avendo diminuiti tutti i termini d'una proporzione di uno stesso numero, ha trovato la falsa proporzione $41:14=26:23$. Qual era la proporzione primitiva?

1246. In qual caso sommando ordinatamente i termini di due proporzioni si ottengono quattro numeri in proporzione?

1247. Si trovi una proporzione continua, in cui il prodotto dei quattro termini sia 4096, e l'ultimo termine sia $^1/_4$ della somma dei medi.

1248. Da quale altezza è caduto un sasso il quale impiegò 3 secondi per giungere al suolo, supposto che nel primo minuto secondo abbia percorso m. 9,80? ***

1249. Un negoziante, costretto a vendere la sua merce, per ogni 43,5 Kg. riceve quanto gli eran costati 36 Kg. Quanto per cento ha egli perduto?

1250. Da un luogo A viene spedito un corriere, e 3 ore più tardi se ne spedisce un altro per raggiungerlo. Le loro velocità stanno nel rapporto di 5 a 7. Quando verrà raggiunto il primo corriere?

1251. Un bue legato ad un palo con una corda lunga metri $2\,^1/_2$, mangia in due giorni tutta l'erba che può raggiungere. Per quanti giorni potrebbe trovar pascolo se la corda fosse lunga metri $3\,^3/_4$? ****

1252. A mezzogiorno gli indici d'un orologio sono sovrapposti. In quali altre ore l'indice dei minuti tornerà a coprire l'indice delle ore? *****

1253. Sono le tre. In qual'ora le lancette dell'orologio saranno per diritto?

1254. Un orologio ha la lancetta delle ore, quella dei minuti, e quella dei secondi che sono concentriche; ed è mezzogiorno. In qual'ora la lancetta dei secondi coprirà quella delle ore? In qual'ora la lancetta dei secondi coprirà quella dei minuti?

Progressioni aritmetiche.

1°. Le questioni sulle progressioni aritmetiche si risolvono quasi tutte facendo uso delle due formole:

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad . \; . \; . \quad (\alpha) \qquad s_n=n\frac{a_1+a_n}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

ove le lettere a_1, a_n, d, n, s_n hanno il significato solito. Si sostitui-

* Se $a:b=c:d$ è la proporzione data, ed a è il più grande e d il più piccolo termine, s cominci a dimostrare che è $a-b>c-d$; poi.....

** Si ammette che esista una proporzione avente questa proprietà, e che sia x il numer che bisogna aggiungere; dalla $(a+x):(b+x)=(c+x):(d+x)$ si conchiude che fra i quattro termin a, b, c, d deve sussistere la relazione $a+d=b+c$; poi si eguagliano i valori di a ricavati d quest'eguaglianza e dalla proporzione data.

*** Gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli.

**** Le aree dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.

***** Gli spazi percorsi sono proporzionali alle velocità.

scono alle quantità note i loro valori numerici, e si ottiene un'equazione di 1° grado ad una incognita, oppure un sistema di due equazioni di 1° grado a due incognite.

2°. Conviene spesso, nella risoluzione dei problemi, rappresentare i termini d'una progressione aritmetica servendosi del 1° termine e della ragione. Posto che essi siano incogniti, si può p.e. rappresentare il 1° termine con x, la ragione con d; e tutti i termini della progressione saranno rappresentati da x, $x+d$, $x+2d$, $x+3d$, ecc. Se x o d sono noti, vi si sostituisce il loro valore.

3°. Quando i termini incogniti sono in numero dispari conviene spesso rappresentare con x quello di mezzo. In tal caso, se d è la ragione, e se i termini sono p.e. cinque, si potranno rappresentare con $x-2d$, $x-d$, x, $x+d$, $x+2d$.

4°. Se i termini sono in numero pari, conviene spesso rappresentare con $2d$ la ragione, e rappresentare con $x-d$ ed $x+d$ i due termini di mezzo. In tal caso, se i termini sono p.e. sei, si potranno rappresentare con $x-5d$, $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$, $x+5d$.

PROBLEMA. *La somma di quattro termini consecutivi d'una progressione aritmetica è* 22, *e la somma dei loro quadrati è* 166. *Si trovino i quattro numeri.*

Risoluzione. Se la ragione della progressione è $2d$, i quattro termini cercati saranno rispettivamente $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$; e si avrà:

$$(x-3d)+(x-d)+(x+d)+(x+3d)=22,$$

$$\text{ossia } 4x=22; \text{ da cui } x=\frac{11}{2} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Avremo inoltre: $(x-3d)^2+(x-d)^2+(x+d)^2+(x+3d)^2=166$, ossia $x^2-6dx+9d^2+x^2-2dx+d^2+x^2+2dx+d^2+x^2+6dx+9d^2=166$, ossia

$$4x^2+20d^2=166 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Sostituendo nella (2) il valore di x dato dalla (1), si ha l'equazione: $4\left(\frac{11}{2}\right)^2+20d^2=166$, ossia $121+20d^2=166$, ossia $20d^2=45$, ossia

$$d^2=\frac{45}{20}=\frac{9}{4}. \text{ Da cui } d=\pm\frac{3}{2} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Sostituendo nelle espressioni $x-3d$, $x-d$, $x+d$, $x+3d$ i valori $x=\frac{11}{2}$, $d=+\frac{3}{2}$, si hanno i numeri 1, 4, 7, 10.

Sostituendo i valori $x=\frac{11}{2}$, $d=-\frac{3}{2}$, si hanno i numeri 10, 7, 4, 1.

Risposta. I numeri cercati sono 1, 4, 7, 10.

1255. Si cerchi il 15° termine di ÷ 7.12.17 .....

1256. Si cerchi l'11° termine di ÷ 10.11 1/2.13 .....

1257. Si cerchi l'11° termine di ÷ 5.4 1/2.4 .....

1258. Si cerchi il 90° termine di ÷ 12.11 1/2.11 .....

Si inseriscano i seguenti medi differenziali:

1259. 3 medi fra 20 e 48. **1260.** 4 medi fra 100 e 40.

1261. 7 medi fra $-1\frac{1}{4}$ e $4\frac{3}{4}$. **1262.** 8 medi fra 7 e 13.

Si trovi la somma dei termini di ciascuna delle seguenti progressioni:

1263. ÷ 5.8.11 ..... 59. * **1264.** ÷ 1/4.3/8 ..... 1 5/8.

* Si elimini n fra le due equazioni (α), (β).

1265. $\div\ 2\,^1/_2 . 2\,^5/_6 \ldots\ldots 22\,^1/_6$. **1266.** $\div -17. -12 \ldots\ldots$ (11 termini).

1267. $\div\ 2\,^1/_2 . 3 . 3\,^1/_2 \ldots\ldots$ (n termini).

Si chiede l'n^o termine e la somma degli n primi termini di ciascuna delle seguenti progressioni:

1268. $\div\ 1 . \frac{n-1}{n} . \frac{n-2}{n} \ldots\ldots$ **1269.** $\div\ \frac{x^2-1}{x} . x . \frac{x^2+1}{x} \ldots\ldots$

1270. $\div\ (a-x)^2 . (a^2+x^2) . (a+x)^2 \ldots\ldots$

1271. Si trovi a essendo $r=3$, $n=20$, $S=600$.

1272. „ a „ $r=-^5/_7$, $n=12$, $l=-6$.

1273. „ a „ $n=8$, $S=12$, $l=2$.

1274. „ a „ $r=^2/_3$, $l=7$, $S=28\,^1/_3$.

1275. „ r „ $a=7$, $l=13$, $n=10$.

1276. „ r „ $a=2$, $n=8$, $S=12$.

1277. „ r „ $l=-12$, $n=21$, $S=-42$.

1278. „ r „ $a=2\,^1/_2$, $l=22\,^1/_6$, $S=740$.

1279. „ n „ $a=1\,^5/_8$, $l=20$, $S=108\,^1/_8$.

1280. „ n „ $a=8\,^3/_5$, $r=1\,^{11}/_{15}$, $l=60\,^3/_5$.

1281. „ n „ $r=2$, $l=45$, $S=520$.

1282. „ n „ $a=12$, $r=3$, $S=882$.

1283. „ l „ $r=1\,^1/_4$, $n=24$, $S=405$.

1284. „ l „ $a=3\,^2/_5$, $n=41$, $S=2427\,^1/_5$.

1285. „ l „ $a=3$, $r=1\,^4/_5$, $n=21$.

1286. „ l „ $a=12$, $r=3$, $S=882$.

1287. „ S „ $r=8\,^2/_5$, $n=26$, $l=217$.

1288. „ S „ $a=4\,^1/_2$, $n=16$, $l=22\,^1/_2$.

1289. „ S „ $a=3$, $r=1{,}8$, $n=21$.

1290. „ S „ $a=8\,^3/_5$, $r=1\,^{11}/_{15}$, $l=60{,}6$.

1291. Il 15° termine d'una progressione aritmetica è 59, il 21° è 83, e l'ultimo 163. Si cerchino a, n, S.

1292. Si determini n in modo che le due progressioni $\div\ 13 . 15 \ldots\ldots$ e $\div -120. -111 \ldots\ldots$ diano entrambe la stessa somma. *

1293. Venne osservato che una locomotiva percorse 4 metri nel 1° minuto secondo, e 88 metri nel 60° minuto secondo. Supponendo che in ogni minuto secondo lo spazio percorso riceva un aumento costante, si chiede questo aumento ed il tragitto fatto in un'ora.

1294. Un orologio batte soltanto le ore; un altro batte inoltre un colpo ogni mezz'ora. Quanti colpi suona ciascuno in 12 ore?

1295. Un corpo che cada nel vuoto percorre metri 4,9044 nel 1° minuto secondo, metri 4,9044×3 nel 2°, metri 4,9044×5 nel 3°, metri 4,9044×7 nel 4°, metri 4,9044×9 nel 5°, ecc. Ciò posto si cerchi lo spazio percorso in 40 minuti secondi, ed in quanto tempo il corpo percorrerebbe metri 1961,76.

1296. Si trovino i tre lati di un triangolo rettangolo sapendo che essi formano una progressione aritmetica in cui $r=7$. **

---

* Si esprima il valore delle due somme supponendo conosciuto n.

** Si ricorra al teorema di Pitagora.

1297. Un servo s'accorda per un certo salario pel 1° mese, a condizione che gli sarebbe aumentato di una lira per ogni mese successivo fino ad avere un salario di L. 60 mensili. Alla fine di quel mese in cui ricevette per la 1ª volta L. 60 trova che nel suo servizio ha avuto in media L. 48 al mese. Quanti mesi ha servito?

1298. Si trovi la somma dei primi n numeri interi.

1299. Si trovi la somma dei primi n numeri pari.

1300. Si trovi la somma dei primi n numeri dispari.

1301. In qual caso la somma dei primi n numeri naturali è pari? In qual caso è dispari?

1302. Si trovi la somma dei primi n termini della successione

$$1-3+5-7+9-11+13-15 \ldots\ldots$$ *

1303. Si trovi la somma dei primi $2n$ termini della successione

$$1-2+3-4+5-6+7-8+9 \ldots\ldots$$

1304. Si dimostri che la somma di $2n+1$ numeri interi consecutivi è divisibile per $2n+1$. **

1305. Si dimostri che sommando o sottraendo ordinatamente i termini di due progressioni aritmetiche, si ottengono risultati che sono in progressione aritmetica.

1306. Si dimostri che se in $ax+b$ si sostituiscono ordinatamente, in luogo di x, i termini d'una progressione aritmetica, si ottengono risultati che sono in progressione aritmetica.

1307. Qual condizione si richiede affinchè la somma di due termini qualsiasi d'una progressione aritmetica sia un termine della stessa progressione? ***

1308. Si dimostri che prolungando sufficientemente una progressione aritmetica crescente si può ottenere un termine che sia maggiore di qualsiasi numero positivo H arbitrariamente grande. ****

1309. Si dimostri che le somme (o le differenze) dei termini corrispondenti di due progressioni aritmetiche formano una nuova progressione aritmetica avente per ragione la somma (o la differenza) delle ragioni delle progressioni date.

1310. Si trovi la somma dei 40 primi multipli di 3.

1311. Si trovi la somma dei 20 primi multipli di 3 che seguono il numero 60.

1312. Si trovino i valori dei tre angoli di un triangolo rettangolo, sapendo che essi sono in progressione aritmetica. *****

1313. Un giardiniere deve innaffiare una fila di 30 alberi posti a distanza di 6 m. l'uno dall'altro, e deve versare un secchio d'acqua ai piedi di ciascun albero. Il serbatoio d'acqua, che è in linea retta cogli alberi, è alla distanza di 10 m. dal 1° albero. Quanto cammino deve fare il giardiniere se alla fine deve riportare la secchia presso il serbatoio dove l'ha presa?

1314. La somma del 2° e del 7° termine d'una progressione aritmetica è 92; la somma del 4° e dell'11° è 71. Quali sono questi quattro termini?

---

* Si trovi dapprima la somma dei termini positivi, poi ecc.

** Si osservi che $2n+1$ numeri interi consecutivi formano una progressione aritmetica, e si chiami a il primo di essi; poi ecc.

*** Si rappresentino con $a+md$, $a+nd$, $a+pd$ tre termini qualsiasi della progressione; poi...

**** Si scriva la formola che dà l'n^o termine.

***** Sia a il valore di un angolo, r la ragione: i tre angoli sono a, $a+r$, $a+2r$; poi....

1315. La somma dei quattro termini di mezzo d'una progressione aritmetica di 12 termini è 74; il prodotto degli estremi è 70. Si scriva la progressione. *

1316. In una progressione aritmetica di 11 termini, la somma dei termini è 176, e la differenza degli estremi è 30. Si scriva la progressione. **

1317. La somma di tre termini consecutivi d'una progressione aritmetica è 33, ed il loro prodotto è 1287. Quali sono questi tre numeri?

1318. La ragione d'una progressione aritmetica di 4 termini è 4, ed il prodotto dei quattro termini è 585. Si trovi la progressione. ***

1319. Il prodotto di 3 numeri in progressione aritmetica è 16640, ed il più piccolo di essi è 20. Si trovino i tre numeri.

1320. La somma di quattro termini consecutivi d'una progressione aritmetica è 20, e la somma dei loro inversi è $^{25}/_{24}$. Si trovino i quattro numeri.

1321. Un cavaliere fa ferrare i quattro piedi del suo cavallo. Il maniscalco gli domanda L. 2 per ferro, oppure un centesimo pel 1° chiodo, 3 per il 2° chiodo, 5 pel 3° chiodo, ecc. Ciascun ferro ha 8 chiodi. Qual proposta torna più conto ad accettare al cavaliere?

1322. Un colonnello vuol disporre i suoi 3003 soldati in triangolo in modo che la 1ª fila abbia un sol soldato, la 2ª ne abbia 2, la terza 3, ecc. Quanti soldati dovrà mettere su ciascun lato del triangolo?

1323. Si dimostri che se tre numeri, presi in un dato ordine, sono tre termini consecutivi d'una progressione aritmetica, i loro inversi, presi nel medesimo ordine, sono tre termini consecutivi d'una progressione armonica. E viceversa: se sono termini d'una progressione armonica, i loro inversi sono termini d'una progressione aritmetica. ****

Progressioni geometriche.

1°. Le questioni sulle progressioni geometriche si risolvono quasi tutte facendo uso di una o di varie delle seguenti formole:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha') \qquad\qquad s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad . \quad . \quad . \quad (\beta')$$

$$p_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma) \qquad\qquad \lim . s_n = \frac{a_1}{1-q} \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

ove le lettere a_1, a_n, q, n, s_n, p_n hanno il significato solito. Si sostituiscono

---

* Si ricordi che la somma degli estremi è eguale alla somma dei due termini di mezzo. Si trovi il valore degli estremi; poi.....

** Si trovi prima la somma degli estremi.

*** Si ponga eguale ad y il prodotto dei medi, poi si scriva che il prodotto dei quattro termini è eguale al prodotto dei medi moltiplicato pel prodotto degli estremi, e si avrà un'equazione che darà il valore di y; poi.....

**** Definizione. *Tre numeri a, b, c, presi in un dato ordine, sono in proporzione armonica se il rapporto del 1° al 3° è eguale al rapporto della differenza fra il 1° ed il 2°, alla differenza fra il 2° ed il 3°; ossia se è* $a:c=(a-b):(b-c)$.

Definizione. *Più numeri, presi in un dato ordine, formano una progressione armonica se tre termini consecutivi qualunque sono in proporzione armonica.* Questa denominazione fu suggerita dal fatto che se le lunghezze di tre corde (egualmente tese, di egual diametro, di egual metallo, ecc.) sono rispettivamente misurate da tre numeri a, b, c, tali che si abbia $a:c=(a-b):(b-c)$, le tre corde, vibrando, dànno tre suoni i quali formano l'accordo perfetto *do, mi, sol.*

alle quantità note i loro valori numerici, e si ottiene un'equazione, od un sistema di equazioni, le cui soluzioni sono le soluzioni cercate.

2°. È spesso utile rappresentare i termini d'una progressione geometrica servendosi del 1° termine e della ragione. Se essi sono incogniti, si può p.e. rappresentare il 1° termine con x, e la ragione con q; allora i termini della progressione assumono la forma x, xq, xq^2, xq^3, xq^4..... ecc. Se x o q sono noti, vi si può sostituire il loro valore.

3°. Se il numero dei termini è dispari, giova spesso rappresentare con x il termine di mezzo; ed i termini della progressione (se sono p.e. 5) avranno la forma $\frac{x}{q^2}$, $\frac{x}{q}$, x, xq, xq^2.

PROBLEMA 1°. *La somma di tre termini consecutivi d'una progressione geometrica è* 26, *ed il* 3° *supera di* 10 *la somma degli altri due. Si trovino i tre termini.*

Risoluzione. Se x è il 1° termine e q la ragione, i termini cercati saranno x, xq, xq^2 . . . . (α)

Avremo allora: $x+xq+xq^2=26$ . . . . (1)

$xq^2-(x+xq)=10$, ossia $xq^2-x-xq=10$ . . . . (2)

Ci rimane a risolvere il sistema (A):

$$(A)\begin{cases} xq^2+xq+x=26 & (1) \\ xq^2-xq-x=10 & (2) \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} xq^2=18 & (3) \\ xq+x=8 & (4) \end{cases}$$

Sommando a membro a membro la (1) con la (2), si ha:

$$2xq^2=36, \quad \text{ossia} \quad xq^2=18 \quad . . . . . . (3)$$

Sottraendo a membro a membro la (2) dalla (1), si ha:

$$2xq+2x=16, \quad \text{ossia} \quad xq+x=8 \quad . . . . . (4)$$

Siamo così ridotti a risolvere il sistema (B). Per risolverlo, possiamo ricavare dalla (4) il valore di q, e si ha $q=\frac{8-x}{x}$ . . . . (β)

Sostituendo questo valore di q nella (3), si ottiene l'equazione:

$$x\left(\frac{8-x}{x}\right)^2=18, \text{ ossia } x\frac{64-16x+x^2}{x^2}=18, \text{ ossia } \frac{64-16x+x^2}{x}=18, \text{ ossia}$$

$$64-16x+x^2=18x, \quad \text{ossia} \quad x^2-34x+64=0 \quad . . . (5)$$

le cui radici sono $x'=2$, $x''=32$.

Sostituendo il valore di x' nella (β), si ottiene $q'=3$. Sostituendo i valori di x' e di q' nella (α), si hanno i numeri 2, 6, 18 i quali soddisfano al problema. Sostituendo in (β) il valore di x'', si ottiene $q''=-\frac{3}{4}$. Sostituendo nella (α) i valori di x'' e di q'', si hanno i numeri 32, —24, 18, i quali pure soddisfano al problema.

Risposta. I numeri cercati sono 2, 6, 18, *oppure* 32, —24, 18.

PROBLEMA 2°. *In una progressione geometrica di sette termini la somma dei sei ultimi termini è il doppio della somma dei primi sei, la quale è eguale a* $157\,^1/_2$. *Si trovi la progressione.*

Risoluzione. Se il 1° termine è x, e la ragione è q, i numeri cercati formeranno la progressione: $\div\!\div\; x:xq:xq^2:xq^3:xq^4:xq^5:xq^6$ . . . . (α)

La somma s_6 dei primi sei termini della progressione cercata sarà:

$$s_6=x\frac{1-q^6}{1-q}.$$

Il 2° termine della progressione cercata sarà xq; e gli ultimi sei termini formeranno una progressione geometrica il cui 1° termine è xq, e la ragione è q. La somma S_6 di questi sei termini sarà: $S_6 = xq\frac{1-q^6}{1-q}$.

Essendo per ipotesi S_6 eguale al doppio di s_6, si avrà l'equazione $xq\frac{1-q^6}{1-q} = 2x\frac{1-q^6}{1-q}$; e dividendo ambi i membri per $x\frac{1-q^6}{1-q}$, si avrà l'equazione $q = 2$ . . . . (1)

Poichè per ipotesi si ha s_6 ossia $x\frac{1-q^6}{1-q} = 157\frac{1}{2}$, sostituendo in quest'equazione a q il suo valore $q=2$, si ha l'equazione $x\frac{1-2^6}{1-2} = 157\frac{1}{2}$, ossia $x\frac{-63}{-1} = 157\frac{1}{2}$, ossia $63x = 157\frac{1}{2}$, da cui $x = 2{,}5$.

Sostituendo nella progressione (α) i valori $x = 2{,}5$, $q = 2$, si ha la progressione ∺ 2,5 : 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160, la quale soddisfa al problema.

Risposta. La progressione cercata è: ∺ 2,5 : 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160.

Si cerchino i seguenti termini:

1324. Il 7° termine di ∺ 3 : 6 : 12 : .....

1325. Il 5° termine di ∺ 5 : 15 : 45 : .....

1326. Il 6° termine di ∺ $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2}$: ...

1327. L'8° termine di ∺ $\frac{1}{16} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4}$: ...

1328. Il 7° termine di ∺ 2 : —6 : 18 : .....

1329. Il 9° termine di ∺ —3 : 6 : —12 : .....

1330. L'11° termine di ∺ 64 : —32 : 16 : .....

S'inseriscano i seguenti medi proporzionali:

1331. 2 medi fra 5 e 135.

1332. 3 medi fra 3 e 48.

1333. 3 medi fra 9 e 2304.

1334. 4 medi fra 11 e 352.

1335. 4 medi fra 5 e 1215.

1336. 5 medi fra 7 e 448.

1337. 4 medi fra $^1/_3$ e 81.

1338. 5 medi fra 18 e 13122.

Si trovi la somma dei termini delle seguenti progressioni:

1339. ∺ 1 : 3 : 9 : ..... : 2187.

1340. ∺ 2 : 4 : 8 : ..... : 1024.

1341. ∺ 96 : 48 : 24 : ..... : $\frac{3}{8}$.

1342. ∺ 3 : 6 : 12 : ..... : 384.

1343. ∺ $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$: ..... : $182\frac{1}{4}$.

1344. ∺ $\frac{1}{2}$: 1 : ..... (n termini).

1345. ∺ $\frac{1}{2}$: 1 : 2 : 4 : ... (20 termini).

1346. ∺ $\frac{2}{3} : \frac{3}{2} : \frac{27}{8} : \frac{243}{32}$: ... (n term.).

1347. ∺ $\frac{2}{3} : 1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{27}{8}$: ..... (n termini).

1348. Si trovi a essendo $q = 2$, $n = 6$, $S = 189$.

1349. „ a „ $q = {}^1/_2$, $n = 9$, $l = {}^3/_8$.

1350. „ a „ $q = 3$, $l = 182\,{}^1/_4$, $S = 273\,{}^1/_4$.

Si trovi il valore delle seguenti somme: *

1351. 1—2+4—8+16—32+..... (10 termini).

1352. $12-6+3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-$. ... (12 termini).

* Si cominci a trovare la ragione delle progressioni geometriche a cui i termini appartengono

1353. $\frac{3}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{32}-\frac{3}{128}+\ldots\ldots$ (n termini).

1354. $4+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$ (all'infinito).

1355. $0,2+0,02+0,002+\ldots\ldots$ (all'infinito).

1356. $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\ldots\ldots$ (all'infinito).

1357. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots\ldots$ (all'infinito).

1358. $\frac{27}{10^2}-\frac{27}{10^4}+\frac{27}{10^6}-\frac{27}{10^8}+\ldots\ldots$ (all'infinito).

1359. $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots\ldots$ (all'infinito, $x<1/2$).

1360. $a^n+ba^{n-1}+b^2a^{n-2}+\ldots\ldots$ (all'infinito, $a>b$).

1361. $\frac{m}{n}-\frac{(m-n)x}{n}+\frac{(m-n)x^2}{n^2}-\frac{(m-n)x^3}{n^3}+\ldots\ldots$ (all'infinito, $n>x$).

1362. $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{b^4}{a^3}+\ldots\ldots$ (all'infinito, $a>b$).

1363. $\frac{1}{8}+\frac{4}{8^2}+\frac{6}{8^3}+\frac{3}{8^4}+\frac{1}{8^5}+\frac{4}{8^6}+\frac{6}{8^7}+\frac{3}{8^8}+\ldots\ldots$ (all'infinito). *

1364. $\frac{6}{9}+\frac{3}{9^2}+\frac{7}{9^3}+\frac{6}{9^4}+\frac{3}{9^5}+\frac{7}{9^6}+\ldots\ldots$ (all'infinito).

1365. $\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{2}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\frac{4}{5^7}+\frac{3}{5^8}+\frac{2}{5^{10}}+\ldots.$ (all'infinito). **

1366. $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\frac{4}{7^4}+\frac{3}{7^5}+\frac{4}{7^6}+\ldots\ldots$ (all'infinito). ***

1367. Si dimostri che le differenze che si ottengono sottraendo ciascun termine d'una progressione geometrica dal seguente, formano anch'esse una progressione geometrica.

1368. Si dimostri che i prodotti (od i quozienti) dei termini corrispondenti di due progressioni geometriche formano una nuova progressione geometrica avente per ragione il prodotto (od il quoziente) delle ragioni delle progressioni date.

1369. Le potenze (o le radici) ennesime dei termini d'una progressione geometrica formano una nuova progressione geometrica avente per ragione la potenza (o la radice) ennesima della ragione della progressione data.

1370. Si dimostri che, prolungando sufficientemente una progressione geometrica crescente, si possono ottenere termini che siano, in valore assoluto, maggiori di qualsiasi numero dato H arbitrariamente grande. ****

1371. Si dimostri che, prolungando sufficientemente una progressione geometrica decrescente, si possono ottenere termini che siano, in valore assoluto, minori di qualsiasi numero positivo ε arbitrariamente piccolo.

---

* Si osservi che i numeratori si succedono nell'ordine 1, 4, 6, 3, ed i denominatori sono le potenze ascendenti di 8. Si sommino separatamente i termini che hanno egual numeratore; poi.....

** Dopo $\frac{3}{5^3}$ si può supporre che vi sia $\frac{0}{5^4}$, ed allora i numeratori si succedono nell'ordine 1, 4, 3, 0, 2; ed i denominatori sono le successive potenze di 5.

*** I numeratori che si ripetono sono 3, 4.

**** Si scriva l'n^0 termine della progressione, poi si faccia uso del teor. 1° § 190.

1372. Si dimostri che inserendo sempre uno stesso numero di medi geometrici fra ciascun termine ed il successivo d'una progressione geometrica si può ottenere che la differenza fra due termini consecutivi della progressione geometrica che ne risulta sia arbitrariamente piccola. *

1373. Si dimostri che il prodotto $(a_1 a_n)^n$ della formola $p_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$ è sempre un quadrato. **

1374. Si dimostri che la somma s_n di quanti si voglia termini consecutivi d'una progressione geometrica decrescente ha sempre il segno del primo termine a_1.

1375. Si dimostri che esiste un numero illimitato di progressioni geometriche decrescenti nelle quali la somma dei termini ha il medesimo limite, quantunque esse differiscano fra loro pel 1° termine e per la ragione. ***

1376. Il limite della somma dei termini d'una progressione geometrica illimitata è 6, e la somma dei due primi termini è $4\,{}^1/_2$. Si trovi la progressione.

1377. Si trovino i quattro angoli d'un quadrilatero, sapendo che sono in progressione geometrica, e che il 4° è eguale a 9 volte il 2°.

1378. Si distribuiscano 35 lire fra tre persone in modo che le parti siano in progressione geometrica, e l'ultima superi la prima di 15.

1379. Si dividano 700 lire fra quattro persone, in modo che le parti siano in progressione geometrica, e che la differenza fra la 4ª e la 1ª stia alla differenza tra la 3ª e la 2ª come 37 sta a 12.

1380. Pongo in vendita il mio cavallo chiedendo L. 1000. Poichè un compratore reputa soverchio tal prezzo, gli offro il cavallo a questa condizione: un milionesimo di lira pel 1° chiodo dei ferri, 2 milionesimi di lira pel 2° chiodo, 4 milionesimi di lira pel 3° chiodo, ecc.; ed il compratore accetta. Dicasi ora se egli abbia perduto, e quanto, sapendo che i chiodi sono 8 per ogni zampa.

1381. Supponiamo che un uomo colla sua mala vita conduca ogni anno al vizio un solo di quei che lo frequentano; che ciascuno di questi pervertiti faccia altrettanto; poi facciano lo stesso questi altri, ecc. Dopo 20 anni quanti dovranno a quel primo scandaloso la loro perdizione?

1382. Un mendicante va a dimandare l'ospitalità ad un avaro che non vuol accordargliela gratuitamente. Il mendicante gli fa allora questa proposta. Io vi pagherò 1 lira pel 1° giorno, 2 lire pel 2° giorno, 3 lire pel 3° giorno, ecc.; e voi mi darete 1 millesimo di centesimo pel 1° giorno, 2 millesimi di centesimo pel 2° giorno, 4 millesimi di centesimo pel 3° giorno, e così di seguito. L'avaro, trovando originale la proposta, e vedendovi un buon affare, consente a questa convenzione per 30 giorni. Si regoli il conto alla fine di questo tempo.

1383. Si trovino tre numeri in progressione geometrica sapendo che se il 2° si aumenta di 8, la progressione diventa aritmetica: ma se nella progressione aritmetica ottenuta si aumenta di 64 il 3° termine, la progressione ritorna ad essere geometrica.

---

* Si rappresenti con x uno dei termini, si esprima il termine successivo della progressione ottenuta dopo l'inserzione dei medi, e poi si faccia uso del teor. 6° § 195.

** Si sostituisca ad a_n il suo valore dato dal teor. 2° § 282.

*** Si faccia uso della formola del teor. 6° § 286.

1384. Si ha un quadrato di metri a di lato. I punti di mezzo dei suoi lati sono i vertici d'un secondo quadrato; i punti di mezzo di questo secondo quadrato sono i vertici d'un terzo quadrato; e così di seguito, all'indefinito. Si trovi la somma delle superficie di tutti questi quadrati.

1385. Si dimostri che dati due numeri a, b, la loro media aritmetica è $\frac{a+b}{2}$, la loro media geometrica $\sqrt{ab}$, e la loro media armonica $\frac{2ab}{a+b}$. *

1386. Asaphad, storico arabo, racconta che Shehram, re delle Indie, appassionato giuocatore di scacchi, chiese a Sessa Ebn Daher inventore di questo giuoco quale ricompensa desiderava. Sessa rispose: « Che Sua Maestà voglia degnarsi di darmi un granello di frumento pel 1° quadretto della scacchiera; due granelli pel 2° quadretto; quattro pel 3°; otto pel 4°; e così di seguito fino al 64° quadretto. » Il re meravigliato della moderazione di Sessa, ordinò ai suoi ministri che gli dessero immediatamente la chiesta ricompensa. Si domanda: 1° Quanti grani di frumento doveva dargli? 2° Quanti ettolitri di frumento, posto che occorrano circa 2000000 di grani per fare un ettolitro? 3° Qual valore avrebbe questo grano vendendolo L. 20 all'ettolitro? 4° Posto che un'ettara di terreno produca 25 ettolitri di grano, quante ettare bisognava seminare per raccogliere il grano necessario? **

---

* *Di tre termini consecutivi d'una progressione* {*aritmetica*, *geometrica*, *armonica*}, *quello di mezzo si chiama medio* {*aritmetico*, *geometrico*, *armonico*} *fra gli altri due.*

** *Risposta.* 1° 18446744073709551615 grani. 2° 9223372036854,775 ettolitri. 3° 184467440737095 lire. 4° 368934881474 ettare.

Se si osserva che la superficie della terra che non è coperta dalle acque è di circa 13000000000 ettare, si vede che bisognerebbe seminare più di 28 volte questa superficie (supponendola tutta fertile) per ricavarne il grano occorrente. E seminando la sola parte attualmente coltivabile occorrerebbero più secoli per raccogliere il grano richiesto.

APPENDICE

Divisione dei polinomi.

1387. $(6a^4+a^2x-15x^2):(2a^2-3x)$. **1388.** $(6x^2-2xy^2-28y^4):(2x+4y^2)$.
1389. $(4x^3+4x^2-29x+21):(2x-3)$.
1390. $(3a^5+5a^4b-33a^3b^2+14a^2b^3):(a^2+7ab)$. **1391.** $(32a^5+b^5):(2a+b)$.
1392. $(81x^8-16y^8):(3x^2-2y^2)$.
1393. $(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4):(2a^2-3ab+4b^2)$.
1394. $(14a^5-27a^4b+21a^3b^2-3a^2b^3-2ab^4):(2a^2-3ab+2b^2)$.
1395. $(6a^6b^3-13a^5b^4+28a^4b^5-23a^3b^6+20a^2b^7):(2a^2b^2-3ab^3+4b^4)$.
1396. $(6x^5+5x^4-25x^3+31x^2-13x+2):(2x^2-3x+2)$.
1397. $(5a^7b+8a^6b^2-13a^5b^3+38a^4b^4-26a^3b^5+24a^2b^6):(5a^2b-2ab^2+6b^3)$.
1398. $(a^5-a^4b-4a^3b^2-a^3+4a^2b^3+3a^2b-a^2-2ab^2-2ab+1):(a^2+2ab-1)$.
1399. $(10a^5b-21a^4b^2-56ab^5-3a^2b^4-10a^3b^3):(8b^3-3ab^2+5a^2b)$.
1400. $\left(x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x\right):\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$.
1401. $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$.
1402. $(p^8x^4-81a^{12}):(p^6x^3-3a^3p^4x^2+9a^6p^2x-27a^9)$.
1403. $1:(1+2x-3x^2)$. **1404.** $1:(3+4x^2+6x^3)$.
1405. $1:(2x^3-1+4x-x^2)$. **1406.** $(a^{2n}+2a^nb^{2r}+b^{4r}-c^{2p}):(a^n+b^{2r}+c^p)$.*
1407. $(x^{8n}+y^{8r}):(x^{5n}-x^{4n}y^r+x^ny^{4r}-y^{5r})$.

RICERCA DEL RESTO SENZA ESEGUIRE DIRETTAMENTE LA DIVISIONE.

Esempio 1º. Se si divide il polinomio $2x^5-3x^4+7x^3-2x+1$ per $2x+3$, si ottiene per quoto $x^4-3x^3+8x^2-12x+17$, e per resto -50. Se nel dividendo, ad x si sostituisce $-\frac{3}{2}$, si ottiene:

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)^5-3\left(-\frac{3}{2}\right)^4+7\left(-\frac{3}{2}\right)^3-2\left(-\frac{3}{2}\right)+1=$$

* Si eseguisce la divisione secondo le regole generali come se gli esponenti non fosse[ro] letterali.

$$=2\left(-\frac{243}{32}\right)-3\left(+\frac{81}{16}\right)+7\left(-\frac{27}{8}\right)-2\left(-\frac{3}{2}\right)+1=$$

$$=-\frac{243}{16}-\frac{243}{16}-\frac{189}{8}+3+1=-\frac{864}{16}+3+1=-54+4=-50.$$

Esempio 2°. Se si divide $6a^3b^3x^4-15a^2b^2cx^3+2ab^2x^2-2abx-5bcx+5c$ pel binomio $2abx-5c$, si ottiene per quoto $3a^2b^2x^3+bx-1$ e per resto *zero*. Dunque il polinomio dato è divisibile per $2abx-5c$. Se nel dividendo ad x sostituiamo $\frac{5c}{2ab}$, otteniamo:

$$6a^3b^3\left(\frac{5c}{2ab}\right)^4-15a^2b^2c\left(\frac{5c}{2ab}\right)^3+2ab^2\left(\frac{5c}{2ab}\right)^2-2ab\left(\frac{5c}{2ab}\right)-5bc\left(\frac{5c}{2ab}\right)+5c=$$

$$=6a^3b^3\left(\frac{625c^4}{16a^4b^4}\right)-15a^2b^2c\left(\frac{125c^3}{8a^3b^3}\right)+2ab^2\left(\frac{25c^2}{4a^2b^2}\right)-2ab\left(\frac{5c}{2ab}\right)-5bc\left(\frac{5c}{2ab}\right)+5c=$$

$$=\frac{1875c^4}{8ab}-\frac{1875c^4}{8ab}+\frac{25c^2}{2a}-5c-\frac{25c^2}{2a}+5c=0.$$

Esempio 3°. Per trovare il resto della divisione del polinomio $8x^4-5x^2+3x$ per $x+1$, s'immagina il polinomio completo $8x^4+0x^3-5x^2+3x+0$, e si ha:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +8 & +0 & -5 & +3 & +0 \\ -1) & & -8 & +8 & -3 & 0 \\ \hline & & -8 & +3 & 0 & 0 \end{array} \quad \textbf{Resto}=0.$$

Osservazione. Il polinomio è divisibile per $x+1$.

Esempio 4°. Per trovare il resto della divisione di $3ax^4-2a^2x^3-7a^4x+2a^5$ per $x-2a$, si osserva che il coefficiente di x^4 è $+3a$, quello di x^3 è $-2a^2$, quello di x^2 è zero, quello di x è $-7a^4$; e si ha:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +3a & -2a^2 & +0 & -7a^4 & +2a^5 \\ +2a) & & +6a^2 & +8a^3 & +16a^4 & +18a^5 \\ \hline & & +4a^2 & +8a^3 & +9a^4 & +20a^5 \end{array} \quad \textbf{Resto}=+20a^5.$$

Con ciascuno dei due metodi precedenti si trovi il resto delle seguenti divisioni:

1408. $(x^4-8x^2-9):(x-2)$. **1409.** $(x^6-4x^3-32):(x-3)$.

1410. $(9x^3-13x-6):(x+4)$. **1411.** $(2x^4+17x^3-68x-32):\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

1412. $(3x^5+2x^4-4x^3+4x^2+5x-2):(x+1)$.

1413. $(x^5+x^3+x+1):\left(x-\frac{2}{3}\right)$. **1414.** $(16x^4-10x^3-4x^2+9):\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

1415. $(0{,}25x^3+0{,}50x+1):(x-0{,}1)$. **1416.** $(2x^4+7x^3-8x-32):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

1417. $(3x^5+2x^4-5x^3+4x^2+9x+2):\left(x+\frac{1}{4}\right)$.

1418. $(x^5-3bx^4+56b^2x^3-8b^3x^2+6b^4x-4b^5):(x-2b)$.

1419. $\left(-\frac{4}{3}b^8+\frac{2}{5}b^6+b^5-2b^2-4b+\frac{1}{3}\right):\left(b+\frac{5}{3}\right)$. *

1420. $(3x^4-5x^3+2x-1):(2x-1)$. **1421.** $(x^4-3):(2x+1)$.

1422. $(x^5-3x^4+2x^3-4x^2+1):(3x-2)$. **1423.** $(2x^3-5):(2x+3)$.

---

* Quest'esercizio non differisce dai precedenti se non in ciò che invece della lettera x ha la lettera b. Perciò si risolve come i precedenti.

RICERCA DEL QUOTO SENZA ESEGUIRE DIRETTAMENTE LA DIVISIONE.

Esempi.

1º. $(x^3-1):(x-1)=(x^3-1^3):(x-1)=x^2+1.x+1^2=x^2+x+1.$

2º. $(x^3+1):(x+1)=(x^3+1^3):(x+1)=x^2-1.x+1^2=x^2-x+1.$

3º. $(x^5-1):(x-1)=(x^5-1^5):(x-1)=x^4+1.x^3+1^2.x^2+1^3.x+1^4=$
$=x^4+x^3+x^2+x+1.$

4º. $(x^5+1):(x+1)=x^4-x^3+x^2-x+1.$

5º. $(a^3+8b^3):(a+2b)=[a^3+(2b)^3]:(a+2b)=a^2-(2b)a+(2b)^2=$
$=a^2-2ab+4b^2.$

6º. $(a^3-27b^3):(a-3b)=[a^3-(3b)^3]:(a-3b)=a^2+(3b)a+(3b)^2=$
$=a^2+3ab+9b^2.$

7º. $\left(\frac{x^3}{8}-125\right):\left(\frac{x}{2}-5\right)=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^3-5^3\right]:\left(\frac{x}{2}-5\right)=\left(\frac{x}{2}\right)^2+5\cdot\frac{x}{2}+5^2=$
$=\frac{x^2}{4}+\frac{5x}{2}+25.$

8º. $(a^8-b^{12}):(a^2-b^3)$. In questo caso gli esponenti del divisore suggeriscono l'idea di mettere il dividendo sotto la forma $(a^2)^4-(b^3)^4$. Ed allora si ha immediatamente:
$(a^8-b^{12}):(a^2-b^3)=[(a^2)^4-(b^3)^4]:(a^2-b^3)=(a^2)^3+b^3(a^2)^2+(b^3)^2a^2+(b^3)^3=$
$=a^6+a^4b^3+a^2b^6+b^9$. Si operà analogamente in casi analoghi.

Osservazione. I coefficienti numerici si scompongano in fattori primi, scrivendo p.e. 2^3 invece di 8, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ invece di $\frac{1}{9}$, ecc. Così riesce più facile l'applicazione della regola.

1424. $(x^8-y^8):(x-y)$. **1425.** $(x^9+y^9):(x+y)$.
1426. $(x^{10}-y^{10}):(x+y)$. **1427.** $(49m^2-121n^2):(7m-11n)$.
1428. $(27m^3-64n^3):(3m-4n)$. **1429.** $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}\right):\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$.
1430. $\left(6x^2-\frac{1}{6}\right):\left(x+\frac{1}{6}\right)$. * **1431.** $\left(\frac{4}{9}y^2-\frac{9}{16}z^2\right):\left(\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)$.
1432. $(81x^8-16y^8):(3x^2-2y^2)$. **1433.** $(32a^{10}x^5+243y^5):(2a^2x+3y)$.
1434. $(x^{12}-y^{15}):(x^4-y^5)$. **1435.** $(x^6+y^{12}):(x^2+y^4)$.
1436. $(x^{12}-y^{16}):(x^3-y^4)$.

Si trovi il quoziente per mezzo della scomposizione in fattori:

1437. $(ac+bc):(a+b)$. **1438.** $(18a-27b):(2a-3b)$.
1439. $(mxy-nxy):(m-n)$. **1440.** $(35xz-45yz):(7x-9y)$.
1441. $(44pm^2n^2-99p^2mn^2-143p^2m^2n):(4mn-9pn-13mp)$.
1442. $(b+b^2):(a+ab)$. **1443.** $(28x^3-49x^2+77x):(4x^2-7x+11)$.
1444. $(mp+np+mq+nq):(m+n)$. **1445.** $(35+5x+7z+xz):(5+z)$.

Si indichi da quali divisioni della forma $(x^m\pm a^m):(x\pm a)$ deriva ciascuno dei seguenti quoti:

1446. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$. **1447.** $a^3-a^2b+ab^2-b^3$.
1448. $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$. **1449.** $a^5-a^4+a^3-a^2+a-1$.

---

* Si applichi il coroll. 3º § 68, e si moltiplichino il dividendo ed il divisore per 6.

1450. $a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$. **1451.** $a^3b^3+a^2b^2m+abm^2+m^3$.
1452. $a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4$.

Si scriva il prodotto senza eseguire direttamente la moltiplicazione:

Esempio 1°. $(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)(x+y)$. Dai due teor. del § 311 e dalla regola del § 312 si ricava immediatamente che il prodotto è x^5+y^5.

Esempio 2°. $(m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4)(m-n)$. Analogamente, si scorge subito che il prodotto è m^5-n^5.

1453. $(m^2+mn+n^2)(m-n)$. **1454.** $(m^3-m^2n+mn^2-n^3)(m+n)$.
1455. $(m^3+m^2n+mn^2+n^3)(m-n)$. **1456.** $(m^2-mn+n^2)(m+n)$.
1457. $(a^5b^5+a^4b^4m+a^3b^3m^2+a^2b^2m^3+abm^4+m^5)(ab-m)$.
1458. $(81x^4-54x^3y+36x^2y^2-24xy^3+16y^4)(3x+2y)$.

Sistemi di equazioni di 1° grado con più di due incognite.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1459. $\begin{cases} 2x+3y+4z=61 \\ 3x+2y+z=54 \\ 5x-2y+3z=58. \end{cases}$ **1460.** $\begin{cases} 4x-3y+2z=28 \\ 3x+2y-5z=16 \\ 2x+y-3z=10. \end{cases}$

1461. $\begin{cases} 2x+3y+4z=53 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31. \end{cases}$ **1462.** $\begin{cases} 2x+7y-11z=10 \\ 5x-10y+3z=-15 \\ -6x+12y-z=31. \end{cases}$

1463. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2z}{7}=58 \\ \frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=76 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7z}{40}=\frac{147}{5}. \end{cases}$ **1464.** $\begin{cases} 3x+6y-2z+9u=6 \\ 4y-5x+5z-6u=5 \\ 2z-3x+8y-3u=3 \\ 9u+10y+3z-4x=9. \end{cases}$

1465. $\begin{cases} x-2y+3z-4u=-8 \\ y-2z+3u-4x=6 \\ z-2u+3x-4y=-8 \\ u-2x+3y-4z=-2. \end{cases}$ **1466.** $\begin{cases} 4x-3z+u=10 \\ 5y+z-4u=1 \\ 3y+u=17 \\ x+2y+3u=25. \end{cases}$

1467. $\begin{cases} x+y+2z+u=3 \\ 2y+3z+4u=4 \\ 5z-6u=1 \\ 5x-4y=2. \end{cases}$ **1468.** $\begin{cases} 4x-3z=10 \\ 2y-5u=5 \\ z+3v=19 \\ 3x+y=13 \\ 2y-3u=11. \end{cases}$

1469. $\begin{cases} 3{,}4x-1{,}2y=-8{,}16 \\ 5{,}6x+1{,}2z+13{,}44=0 \\ 5{,}6y=38{,}08+3{,}4z. \end{cases}$ **1470.** $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 3x-5y+7z=75 \\ 9x-11z+10=0. \end{cases}$

1471. $\begin{cases} x-y+z=0{,}6. \\ 3\frac{1}{2}x-4\frac{3}{4}y+5\frac{1}{2}z=3{,}2 \\ 10\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}y+11z=7{,}1. \end{cases}$ **1472.** $\begin{cases} a_1x+b_1y=m_1 \\ a_2y+b_2z=m_2 \\ a_3z+b_3x=m_3. \end{cases}$

1473. $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}+\frac{u}{9}=2800 \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{7}+\frac{z}{9}+\frac{u}{11}=2144 \\ \frac{x}{7}+\frac{y}{9}+\frac{z}{11}+\frac{u}{13}=1744 \\ \frac{x}{9}+\frac{y}{11}+\frac{z}{13}+\frac{u}{15}=1472. \end{cases}$

1474. $\begin{cases} 1\frac{2}{3}x+2\frac{3}{4}y=105 \\ 3\frac{4}{5}x+4\frac{5}{6}z=317 \\ 5\frac{6}{7}z+6\frac{7}{8}u=741 \\ 7\frac{8}{9}u+8\frac{9}{10}x=835 \end{cases}$

1475. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=m_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=m_3. \end{cases}$

1476. $\begin{cases} x+y+z=3a+b+c \\ x+y+t=a+3b+c \\ x-z-t=a+b-c \\ y+z-t=3a-b-c. \end{cases}$

RISOLUZIONE DI ALCUNI SISTEMI DI EQUAZIONI DI 1° GRADO CHE SI PRESENTANO SOTTO FORME PARTICOLARI.

Alcune volte i sistemi da risolvere si presentano sotto forme particolari, per cui più speditamente si possono risolvere facendo uso di artifizi speciali. Ne daremo alcuni esempi.

Esempio 1°. *Si risolva il sistema* (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y+t=10 \\ x+z+t=15 \\ y+z+t=5. \end{cases}$$

Osservo che le incognite hanno tutte per coefficiente $+1$; che ciascuna equazione contiene tre sole incognite; e che ciascuna incognita entra in tre sole equazioni. Sommando a membro a membro tutte le equazioni del sistema, si ottiene: $3x+3y+3z+3t=42$, ossia (dividendo tutti i termini per 3) $x+y+z+t=14$, la quale può sostituire una qualsiasi delle equazioni del sistema.

Sottraendo da questa a membro a membro la 1ª equazione del sistema, si ottiene: $t=2$. Sottraendo la 2ª, si ottiene $z=4$. Sottraendo la 3ª, si ottiene $y=-1$. Sottraendo la 4ª, si ottiene $x=9$.

Risposta. $x=9$, $y=-1$, $z=4$, $t=2$.

Esempio 2°. *Si risolva il sistema* (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ x+y-z+t=5 \\ x-y+z+t=10 \\ -x+y+z+t=1. \end{cases}$$

Comincio ad osservare che il coefficiente di ciascuna incognita è l'unità; che ciascuna equazione contiene tutte le incognite; e che ciascuna incognita ha coefficiente negativo in una sola equazione. Sommando tutte le equazi membro a membro, si ottiene: $2x+2y+2z+2t=22$, ossia $x+y+z+t=$

Da questa equazione sottraendo a membro a membro la 1ª equazione del stema, si ottiene: $2t=5$, ossia $t={}^5/_2$. Sottraendo la 2ª, si ottiene: $2z=$ ossia $z=3$. Sottraendo la 3ª, si ottiene: $2y=1$, ossia $y={}^1/_2$. Sottraer la 4ª, si ottiene: $2x=10$, ossia $x=5$.

Risposta. $x=5$, $y={}^1/_2$, $z=3$, $t={}^5/_2$.

Esempio 3°. *Si risolva il sistema* (I).

$$(I)\begin{cases} bcx+acy+abz=d \\ bdx+ady+abt=c \\ cdx+adz+act=b \\ cdy+bdz+bct=a. \end{cases}$$

Osserviamo che se moltiplichiamo tutti i termini della 1ª equazione per d, tutti quelli della 2ª per c, tutti quelli della 3ª per b, e tutti quelli della 4ª per a, ciascuna incognita viene ad avere in tutte le equazioni il medesimo coefficiente, e ci troveremo in un caso simile a quello dell'esempio 1°.

Eseguiamo adunque queste moltiplicazioni, ed otterremo:

$$bcdx+acdy+abdz=d^2 \quad \ldots \quad (1)$$
$$bcdx+acdy+abct=c^2 \quad \ldots \quad (2)$$
$$bcdx+abdz+abct=b^2 \quad \ldots \quad (3)$$
$$acdy+abdz+abct=a^2 \quad \ldots \quad (4)$$

Sommando a membro a membro queste quattro equazioni, avremo:

$$3bcdx+3acdy+3abdz+3abct=a^2+b^2+c^2+d^2, \quad \text{ossia}$$

$$bcdx+acdy+abdz+abct=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3} \quad \ldots \quad (A)$$

Dalla (A), sottraendo a membro a membro la (1), si ottiene:

$$abct=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}-d^2, \quad \text{ossia} \quad abct=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-3d^2}{3}, \quad \text{ossia}$$

$$t=\frac{a^2+b^2+c^2-2d^2}{3abc}.$$

Dalla (A), sottraendo a membro a membro la (2), si ottiene:

$$abdz=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}-c^2, \quad \text{ossia} \quad abdz=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-3c^2}{3}, \quad \text{ossia}$$

$$z=\frac{a^2+b^2+d^2-2c^2}{3abd}.$$

Dalla (A), sottraendo a membro a membro la (3), si ottiene:

$$acdy=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}-b^2, \quad \text{ossia} \quad acdy=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-3b^2}{3}, \quad \text{ossia}$$

$$y=\frac{a^2+c^2+d^2-2b^2}{3acd}.$$

Dalla (A), sottraendo a membro a membro la (4), si ottiene:

$$bcdx=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}-a^2, \quad \text{ossia} \quad bcdx=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-3a^2}{3}, \quad \text{ossia}$$

$$x=\frac{b^2+c^2+d^2-2a^2}{3bcd}.$$

Esempio 4°. *Si risolva il sistema* (I).

$$(I)\begin{cases} \dfrac{3(3x-y)}{4}=5-2y \quad \ldots \quad (1) \\ \dfrac{3x-y}{2}=4 \quad \ldots \quad (2) \end{cases}$$

Moltiplicando per 2 i due membri della (2), si ha: $3x-y=8$ . . . (α)

Sostituendo questo valore di $3x-y$ nella (1), questa diventa:

$$\frac{3.8}{4}=5-2y, \quad \text{ossia} \quad 6=5-2y, \quad \text{da cui:} \quad 2y=-1, \quad \text{ossia} \quad y=-\frac{1}{2}.$$

Sostituendo questo valore di y nella (α), si ottiene $3x+\frac{1}{2}=8$, ossia $3x={}^{15}/_{2}$, da cui $x={}^{5}/_{2}$.

Risposta. $x={}^{5}/_{2}$, $y=-{}^{1}/_{2}$.

Osservazione 1a. Quando in un' equazione si trova qualche espressione algebrica di cui si conosce già (o si può facilmente conoscere) il valore, è spesso utile sostituire a questa espressione il proprio valore, come abbiamo fatto nell'esempio precedente.

Osservazione 2a. Talora, non tutte le equazioni del sistema che si ha da risolvere contengono tutte le incognite. In questi casi, facendo un uso conveniente dei metodi di eliminazione che già conosciamo, possiamo assai rapidamente trovare la soluzione del sistema. Ne daremo un esempio.

Esempio 5o. *Si risolva il sistema* (I).

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 2x-3y+t=0 & \ldots\ldots\ldots\ (1)\\ 3x+5y-2t-4z=17 & \ldots\ldots\ldots\ (2)\\ x-6y+5t=-9 & \ldots\ldots\ldots\ (3)\\ 2y+t=7 & \ldots\ldots\ldots\ (4)\end{cases}$$

La z compare solamente nella (2); essa si può quindi considerare come già eliminata dalle altre equazioni, e la (2) sarà la prima equazione del sistema risolvente. La (1) contiene le tre sole incognite x, y, t; essa quindi può essere la seconda equazione del sistema risolvente. La (4) contiene le due sole incognite y, t; essa quindi può essere la terza equazione del sistema risolvente.

Per avere la quarta equazione del sistema risolvente, eliminiamo prima la x fra la (1) e la (3), ed otteniamo: $9y-9t=18$, ossia $y-t=2$. Eliminiamo ora t fra quest' equazione e la (4), ed otterremo (sommandole a membro a membro): $3y=9$, da cui $y=3$, la quale sarà la quarta equazione del sistema risolvente.

Il sistema risolvente potrebbe quindi essere il sistema (II).

$$(\mathrm{II})\begin{cases} 3x+5y-2t-4z=17\\ 2x-3y+t=0\\ 2y+t=7\\ y=3.\end{cases}$$

Questo sistema ha per radici $x=4$, $y=3$, $z=2$, $t=1$.

Osservazione. Un sistema di equazioni a coefficienti letterali si risolverà nello stesso modo che un sistema a coefficienti numerici. Eccone un esempio.

Esempio 6o. *Si risolva il sistema* (I).

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a-b}=1 & \ldots\ldots\ldots\ (1)\\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a}=1 & \ldots\ldots\ldots\ (2)\end{cases}$$

Comincio ad osservare che i denominatori devono essere tutti diversi da zero; e quindi dovrà essere a diverso da 0, ed inoltre a diverso da $\pm b$ Essendo diversi da zero a, $a+b$, $a-b$, potremo moltiplicare tutti i termini della (1) per il prodotto $a(a-b)$, e quelli della (2) per il prodotto $a(a+b)$ ed otterremo:

Dalla (1) $(a-b)x+ay=a(a-b)$, ossia $ax-bx+ay=a^2-ab$ . . (1')
Dalla (2) $ax+(a+b)y=a(a+b)$, ossia $ax+ay+by=a^2+ab$ . . (2')

Queste equazioni sono rispettivamente equivalenti alle equazioni date, e quindi il sistema formato dalla (1′) e dalla (2′) è equivalente al sistema dato. Per risolverlo, sottraggo la (1′) dalla (2′), ed ottengo $bx+by=2ab$; e se b è diverso da 0, dividendo tutti i termini per b, ho: $x+y=2a$, la quale equazione può sostituire la (1′) o la (2′). La sostituisco alla (1′ ed ottengo il sistema (II).

$$\text{(II)} \begin{cases} x+y=2a \quad \dots\dots\dots\dots (1'') \\ ax+ay+by=a^2+ab \quad \dots\dots\dots (2') \end{cases}$$

Osservo ora che la (2′) può scriversi anche così: $a(x+y)+by=a^2+ab$ e ponendo in luogo di $x+y$ il valore $2a$ dato dalla (1″), ottengo l'equazione: $2a^2+by=a^2+ab$, ossia $by=ab-a^2$, ossia $y=\frac{ab-a^2}{b}$ .... (2″)

La (2″) può sostituire la (2′) del sistema (II). Facendo la sostituzione, ottengo il sistema (III) equivalente al sistema (II), e quindi anche equivalente al sistema (I).

$$\text{(III)} \begin{cases} x+y=2a \quad \dots\dots\dots\dots (1'') \\ y=\dfrac{ab-a^2}{b} \quad \dots\dots\dots\dots (2'') \end{cases}$$

Sostituendo nella (1″) il valore di y dato dalla (2″), si ottiene: $x+\frac{ab-a^2}{b}=2a$, ossia $x=2a-\frac{ab-a^2}{b}$, ossia $x=\frac{2ab-ab+a^2}{b}$, ossia $x=\frac{ab+a^2}{b}$.

Risposta. La soluzione del sistema è: $x=\frac{ab+a^2}{b}$, $y=\frac{ab-a^2}{b}$, *ove si suppongono a, b diversi da zero, ed a diverso da $\pm b$.*

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1477. $\begin{cases} x+y=16 \\ x+z=22 \\ y+z=28. \end{cases}$

1478. $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=8 \\ z+u=9 \\ u+v=11 \\ x+v=9. \end{cases}$ *

1479. $\begin{cases} x+y+z=15 \\ x+y+t=16 \\ x+z+t=18 \\ y+z+t=20. \end{cases}$

1480. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+v=b \\ x+z+v=c \\ y+z+v=d. \end{cases}$

1481. $\begin{cases} cx+az=b \\ ay+bx=c \\ bz+cy=a. \end{cases}$

1482. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ \dfrac{2x-3y+364}{365}+\dfrac{4x-z+11}{2}=16 \\ 2x-3y=1. \end{cases}$

1483. $\begin{cases} x+y+z+t+u=a \\ x+y+z+t+v=b \\ x+y+z+u+v=c \\ x+y+t+u+v=d \\ x+z+t+u+v=e \\ y+z+t+u+v=f. \end{cases}$

1484. $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3t=m \\ x+by+b^2z+b^3t=n \\ x+cy+c^2z+c^3t=o \\ x+dy+d^2z+d^3t=p. \end{cases}$ **

---

* Dalla somma delle cinque equazioni si sottragga successivamente la somma di due equazioni le cui incognite sono tutte diverse.

** Se dalla 1ª equazione si sottrae la 2ª, dalla 2ª la 3ª, dalla 3ª la 4ª, si arriva a risultati che sono rispettivamente divisibili per $a-b$, $b-c$, $c-d$. Si ponga per maggior semplicità $\frac{m-n}{a-b}=m'$, $\frac{n-o}{b-c}=n'$, $\frac{o-p}{c-d}=o'$, $\frac{m'-n'}{a-c}=m''$, $\frac{n'-o'}{b-d}=n''$, $\frac{m''-n''}{a-d}=m'''$.

PROBLEMI CHE SI RISOLVONO CON SISTEMI DI EQUAZIONI DI 1° GRADO CON PIÙ DI DUE INCOGNITE.

PROBLEMA 1°. *Le capacità di tre recipienti stanno fra loro come i numeri 5, 2, 3. Se il primo recipiente contenesse 6 litri di più, ed il secondo 15 litri di meno, conterrebbero, fra tutti e tre, litri 71. Qual'è la capacità di ciascun recipiente?*

Risoluzione. Rappresentiamo rispettivamente con x, y, z le capacità dei singoli recipienti, ossia il numero di litri che contiene ciascun recipiente. Dire che le capacità stanno fra loro come i numeri 5, 2, 3, è lo stesso che dire che si ha: $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$. Queste eguaglianze equivalgono alle due equazioni $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}$ ed $\frac{x}{5}=\frac{z}{3}$. Si ha poi evidentemente l'equazione: $(x+6)+(y-15)+z=71$, ossia $x+y+z=80$. E si ha così il sistema (I).

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x+y+z=80 \\ \frac{x}{5}=\frac{y}{2} \\ \frac{x}{5}=\frac{z}{3} \end{cases}$$

Questo sistema, risolto coi metodi ordinari, dà $x=40$, $y=16$, $z=24$. Il valore di ciascuna incognita è unico, e quindi il problema ammette una sola soluzione.

Risposta. La capacità del primo recipiente è di 40 litri, quella del secondo è di 16 litri, e quella del terzo di 24 litri.

Osservazione. La risoluzione del problema si potrebbe ottenere più rapidamente introducendo un'incognita ausiliaria in questo modo. Poichè si ha: $\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, chiamo m il valore incognito di questi rapporti eguali, ed ho:

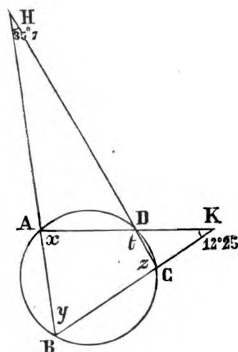
$$\frac{x}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=m,\quad \text{da cui}\quad x=5m,\quad y=2m,\quad z=3m \quad . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Sostituisco questi valori di x, y, z nell'equazione $x+y+z=80$ ottenuta precedentemente, ed ho: $5m+2m+3m=80$, ossia $10m=80$, da cui $m=8$. Sostituendo questo valore di m nelle equazioni (A), ottengo: $x=40$, $y=16$, $z=24$.

PROBLEMA 2°. *ABCD è un quadrilatero inscritto in un cerchio. I due lati opposti AB, DC prolungati fino al loro punto d'incontro H, forman[o] in H un angolo di 35° 7'. Invece i lati opposti AD, BC prolungati es[si] pure fino al loro punto d'incontro K, formano in K un angolo di 12° 2[...] Si trovi il valore di ciascuno dei quattro angoli del quadrilatero.*

Risoluzione. Sia x il valore dell'angolo in A del quadrilatero, y il valo[re] dell'angolo in B, z quello dell'angolo in C, e t quello dell'angolo in D. Sa[p]piamo che gli angoli opposti d'un quadrilatero inscritto in un cerchio so[no] supplementari; avremo quindi: $x+z=180^0$, $t+y=180^0$.

I lati AB, CD, incontrandosi in H, formano il triangolo HBC; e poichè la somma dei tre angoli di un triangolo è 180⁰, avremo:
$y+z+35^0\,7'=180^0$, ossia $y+z=180^0-35^0\,7'$,
ossia $y+z=144^0\,53'$.



Analogamente, nel triangolo KAB avremo $x+y+12^0\,25'=180^0$, ossia $x+y=180^0-12^0\,25'$; ossia $x+y=167^0\,35'$.

Fra le quattro incognite x, y, z, t avremo così quattro equazioni fra loro indipendenti, le quali formeranno il sistema (I), che è la trascrizione algebrica del problema.

$$
\text{(I)}\quad\left\{\begin{array}{lr}
x+z=180^0 \quad \ldots\ldots\ldots & (1)\\
y+t=180^0 \quad \ldots\ldots\ldots & (2)\\
y+z=144^0\,53' \quad \ldots\ldots & (3)\\
x+y=167^0\,35' \quad \ldots\ldots & (4)
\end{array}\right.
$$

Questo sistema si può risolvere molto facilmente in questo modo:

Dalla somma delle due ultime equazioni sottraendo la somma delle due prime, si ottiene l'equazione: $y-t=-47^0\,32'$ . . . . (α)

Sommando la (α) a membro a membro colla (2), si ottiene: $2y=132^0\,28'$, da cui $y=66^0\,14'$.

Sottraendo a membro a membro la (α) dalla (2), si ottiene: $2t=227^0\,32'$, da cui $t=113^0\,46'$.

Sostituendo nella (4) il valore di y, si ottiene: $x+66^0\,14'=167^0\,35'$, da cui $x=167^0\,35'-66^0\,14'$, ossia $x=101^0\,21'$.

Sostituendo nella (1) il valore trovato di x, si ottiene: $101^0\,21'+z=180^0$, da cui $z=180^0-101^0\,21'$, ossia $z=78^0\,39'$.

Il valore di ciascuna incognita è unico, e quindi il problema ammette una soluzione unica.

Risposta. I valori degli angoli del quadrilatero sono: $x=101^0\,21'$, $y=66^0\,14'$, $z=78^0\,39'$, $t=113^0\,46'$.

PROBLEMI.

1485. La somma delle tre cifre di un numero è 9; la 1ª cifra a sinistra è l'ottava parte del numero formato dalle altre due cifre a destra; e l'estrema cifra a destra è l'ottava parte del numero formato dalle altre due cifre a sinistra. Si trovi il numero.

1486. Si deve decomporre il numero 232 in tre altri tali che se al primo si aggiunge la metà della somma degli altri due, al secondo la 3ª parte della somma degli altri, ed al terzo la 4ª parte della somma dei due primi, si ottengano tre somme eguali.

1487. Un tale ha due botti piene ed una vuota. Per riempire quest'ultima deve versarvi o il contenuto della 1ª più $^1/_5$ del contenuto della 2ª, o il contenuto della 2ª più $^1/_3$ del contenuto della 1ª. Le tre botti insieme possono contenere 1440 litri. Quanti ne può contenere ciascuna di esse?

1488. Tre città A, B, C, stanno nei vertici di un triangolo. Da A fino a C, passando per B, vi sono 82 chilometri; da B ad A, passando per C, 97 chilometri; e da C a B, passando per A, 89 chilometri. Si trovino le vicendevoli distanze delle tre città.

1489. Si decomponga il numero 96 in tre parti tali che dividendo la 1ª per la 2ª si ottenga per quoziente 2 e per residuo 3, e dividendo la 2ª per la 3ª si ottenga per quoziente 4 e per residuo 5.

1490. Si deve trovare un numero tale che la somma delle sue tre cifre sia 6, e nel quale la prima cifra a sinistra sia $^1/_5$ del numero formato dalle altre due cifre, e l'estrema cifra a destra sia la metà del numero formato dalle altre due.

1491. Si deve trovare un numero tale che la somma delle sue tre cifre sia 3, e nel quale la 1ª cifra a sinistra sia $^1/_2$ del numero formato dalle altre due cifre, e l'estrema cifra a destra sia $^1/_5$ del numero formato dalle altre due.

1492. Un padre disse ai suoi due figli, dei quali uno aveva quattro anni più dell'altro: « Fra 2 anni io sarò il doppio più vecchio di voi due insieme, e 6 anni fa io era 6 volte più vecchio di voi due insieme ». Si determini l'età del padre e di ciascuno dei due figli.

1493. Tre giuocatori stabiliscono che ad ogni partita il perdente debba raddoppiare il danaro che ognuno degli altri possiede in quel momento. Ora dopo tre partite, perdute una da ciascuno, posseggono tutti la medesima somma di 128 lire. Quanto aveva ciascuno prima del giuoco?

1494. Tre fanciulli giuocavano alle noci. A disse a B: « Se tu mi dessi 5 noci, io ne avrei il doppio di quelle che rimarrebbero a te ». B disse a C: « Se tu dessi a me 13 delle tue noci, io ne avrei il triplo di quelle che rimarrebbero a te ». C disse ad A: « Se tu dessi a me 3 delle tue noci, io avrei il sestuplo di quelle che a te resterebbero ». Quante noci aveva ciascuno?

1495. Quattro giuocatori di carte, A, B, C, D, fanno 4 partite. Nella 1ª A, B, C guadagnano ciascuno tanto quanto possedevano prima del giuoco; nella 2ª guadagnano nello stesso modo A, B, D; nella 3ª A, C, D; nella 4ª B, C, D. A giuoco finito, contano il danaro, ed ognuno si trova possessore di 6 lire e 40 centesimi. Quanto possedeva ciascuno prima del giuoco?

1496. Si hanno sette canestri di mele. Passando dal 1° canestro in ciascuno degli altri tante mele quanti essi già ne hanno, e facendo su tutti i canestri la medesima operazione, alla fine si avranno 128 mele in ciascun canestro. Quante mele conteneva da principio ciascun canestro?

1497. L'anno in cui Gutenberg inventò la stampa è espresso da un numero di quattro cifre. La somma delle quattro cifre è 14; la cifra delle decine è la metà di quella delle unità; e la cifra delle centinaia è eguale alla somma della cifra delle decine e di quella delle migliaia. Si sa infine che aggiungendo 4905 al numero di cui si tratta, si ottiene un numero formato con le medesime cifre, ma scritte in ordine inverso. Si trovi l'anno in cui Gutenberg inventò la stampa

1498. Si trovino n numeri tali che se il 1° cede al 2° tante unità quant ne ha questo, ed il 2° così aumentato cede al 3° tante unità quant questo ne contiene, e così di seguito si fa la medesima operazione su tutti i numeri, si ottengano n numeri eguali ad a.

Equazioni la cui risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione delle equazioni di 1° e di 2° grado

EQUAZIONI FRAZIONARIE.

Esempio 1°. Si risolva l'equazione: $\frac{3}{4}\left(a-\frac{3}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{4a}$.

Cominciamo ad osservare che, siccome per $x=0$ e per $a=0$ alcuni termini dell'equazione prendono la forma $^m/_0$, dobbiamo escludere i valori $x=0$, $a=0$.

Eseguiamo prima le operazioni entro le parentesi, ed otterremo:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{ax-3}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-a}{ax}=\frac{1}{4a}, \quad \text{ossia} \quad \frac{3ax-9}{4x}-\frac{x-a}{2ax}=\frac{1}{4a} \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Si vede facilmente che un multiplo comune a tutti i denominatori è $4ax$. Moltiplicando per $4ax$ tutti i termini della (α), otterremo l'equazione:

$$3a^2x-9a-2(x-a)=x, \quad \text{ossia} \quad 3a^2x-9a-2x+2a=x, \quad \text{ossia}$$
$$3a^2x-3x=7a, \quad \text{ossia} \quad 3(a^2-1)x=7a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Se escludiamo quei valori di a che annullano a^2-1, ossia i valori $a=+1$, ed $a=-1$, sarà $3(a^2-1)$ diverso da zero; potremo allora dividere ambi i membri della (β) per $3(a^2-1)$, ed otterremo l'equazione equivalente:

$$x=\frac{7a}{3(a^2-1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Questo valore non annulla il moltiplicatore $4ax$, e quindi esso è radice dell'equazione data.

Risposta. L'equazione data ha la sola radice $x=\frac{7a}{3(a^2-1)}$.

Esempio 2°. Si risolva l'equazione: $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{5}{2}$.

Moltiplicandone tutti i termini pel prodotto dei denominatori, cioè per $2(x-5)(x+5)$, otterremo l'equazione:

$$2\frac{x+5}{x-5}(x-5)(x+5)+2\frac{x-5}{x+5}(x-5)(x+5)=2\frac{5}{2}(x-5)(x+5), \quad \text{ossia}$$
$$2(x+5)(x+5)+2(x-5)(x-5)=5(x-5)(x+5), \quad \text{ossia}$$
$$2(x+5)^2+2(x-5)^2=5(x^2-25), \quad \text{ossia}$$
$$2(x^2+10x+25+x^2-10x+25)=5x^2-125, \quad \text{ossia}$$
$$2(2x^2+50)=5x^2-125, \quad \text{ossia} \quad 4x^2+100=5x^2-125, \quad \text{ossia}$$

$x^2-225=0$, le cui radici sono $x'=+15$, $x''=-15$.

Questi valori non annullano il moltiplicatore $2(x-5)(x+5)$, epperciò sono entrambi radici dell'equazione data.

Risposta. L'equazione ha le due radici $x'=+15$, $x''=-15$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

Poichè pel valore $a+b+x=0$, cioè $x=-(a+b)$, e pei valori $a=0$, $b=0$, $x=0$, i termini dell'equazione prendono la forma $^m/_0$, escluderemo dalla nostra considerazione i valori $x=-(a+b)$, $a=0$, $b=0$, $x=0$. In tale ipotesi, il prodotto dei denominatori, cioè $abx(a+b+x)$, è diverso da zero; e quindi moltiplicando tutti i termini dell'equazione per $abx(a+b+x)$, e poi sopprimendo in ciascuna frazione i fattori comuni al numeratore ed al denominatore, otterremo l'equazione equivalente:

$abx=bx(a+b+x)+ax(a+b+x)+ab(a+b+x)$, ossia

$abx=abx+b^2x+bx^2+a^2x+abx+ax^2+a^2b+ab^2+abx$, ossia

$ax^2+bx^2+abx+abx+abx-abx+a^2x+b^2x+a^2b+ab^2=0$, ossia

$(a+b)x^2+(2ab+a^2+b^2)x+a^2b+ab^2=0$, ossia

$(a+b)x^2+(a+b)^2x+(a+b)ab=0$.

Dividendo tutti i termini di quest'equazione per $a+b$ che è diverso da zero, perchè tali sono a e b, avremo l'equazione equivalente:

$$x^2+(a+b)x+ab=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Questa è un'equazione di 2° grado in x, in cui $a+b$ è il coefficiente di x, ed ab il termine indipendente. Risolvendo la (2), si ha:

$$x=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{2}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}}{2}=$$

$$=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2}=\frac{-(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2}}{2}=\frac{-(a+b)\pm(a-b)}{2}.$$

Da cui: $$x'=\frac{-(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{-a-b+a-b}{2}=\frac{-2b}{2}=-b$$

$$x''=\frac{-(a+b)-(a-b)}{2}=\frac{-a-b-a+b}{2}=\frac{-2a}{2}=-a.$$

Le radici della (2) sono dunque $x'=-b$, ed $x''=-a$; e poichè esse non annullano il moltiplicatore $abx(a+b+x)$, esse saranno anche radici della equazione data.

Risposta. L'equazione ha le due radici $x'=-b$, $x''=-a$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1499. $\frac{3x-7}{4x+2}=\frac{3x-14}{4x-13}$.

1500. $\frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{70}+\frac{x}{3}$.

1501. $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}$.

1502. $\frac{1}{x-6}-\frac{2}{11-x}=\frac{3}{x-1}$.

1503. $\frac{6}{x-3}-\frac{2}{7-x}=\frac{8}{x-1}$.

1504. $\frac{1+3x}{5+7x}-\frac{9-11x}{5-7x}=14\,\frac{(2x-3)^2}{25-49x^2}$.

1505. $\frac{7x-6}{35}-\frac{x-5}{6x-101}=\frac{x}{5}$.

1506. $\frac{16x+7}{24}+\frac{x-16}{177-9x}=\frac{2x+1}{3}$.

1507. $\frac{9x+10}{11x-12}-\frac{8+5x}{40}=\frac{12}{13}-\frac{1}{8}x$.

1508. $\frac{25-{}^1/_3x}{x+1}+\frac{16x+4{}^1/_5}{3x+2}=5+\frac{23}{x+1}$.

1509. $(63x-2):\frac{374-77x}{676-143x}=117x-28.$

1510. $11-\frac{x+25}{x^2}=3-\frac{x-25}{x^2}.$ **1511.** $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}.$

1512. $\frac{a}{x}+\frac{x}{b}=\frac{b}{x}-\frac{x}{a}.$ **1513.** $\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x+2}-5.$

1514. $11-\frac{x+2}{x^2}=7+\frac{x-25}{x^2}.$ **1515.** $\frac{a}{x-b}-\frac{a}{x+b}=\frac{1}{b}.$

1516. $\frac{a+m}{x-m}-\frac{a-m}{x+m}=-\frac{2a}{m}.$ **1517.** $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x}.$

1518. $\frac{x-m}{x+m}=\frac{n-x}{n+x}.$ **1519.** $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{2}.$

1520. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{5}{2}.$ **1521.** $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{5}{2}.$

1522. Si risolva l'equazione $\frac{x+p}{x-p}+\frac{x-p}{x+p}=\frac{5}{2}$, e si ricavi la condizione a cui devono soddisfare le radici delle tre precedenti equazioni.

1523. $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2.$ **1524.** $x+\frac{1}{x-3}=5.$ **1525.** $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=\frac{47}{7}.$

1526. $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1.$ **1527.** $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2.$

1528. $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-2}.$ **1529.** $\frac{x+1}{x}+1=\frac{x}{x-1}.$

1530. $x+2-\frac{6}{x+2}=1.$ **1531.** $x+\frac{24}{x-1}=3x-4.$

1532. $\frac{15}{x}-\frac{72-6x}{2x^2}=2.$ **1533.** $3x^2=\frac{2}{5}\left(x+\frac{4}{5}\right)+2x^2.$

1534. $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1.$ **1535.** $\frac{x+8}{x-8}-2=\frac{24}{x-4}.$

1536. $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}.$ **1537.** $\frac{7}{x-2}+\frac{8}{x-5}=3.$

1538. $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}.$ **1539.** $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x+1}{x+1}.$

1540. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}.$ **1541.** $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}.$

1542. $\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}.$ * **1543.** $\frac{\frac{x}{2}-5}{\frac{x+8}{2}-8}+\frac{x-8}{2}+x=\frac{3x}{2}+\frac{49}{16}.$

1544. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}=d.$ **1545.** $\frac{a}{b-x}=\frac{b}{a-x}.$

1546. $a-\frac{m+n}{x}=b-\frac{m-n}{x}.$ **1547.** $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1.$

---

* Si cominci a ridurre la 2ª frazione in un'altra equivalente, ed avente i termini interi.

1548. $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}=\frac{4ab}{4b^2-x^2}$.

1549. $\frac{x}{a}\pm\frac{a}{x}=\frac{b}{x}\mp\frac{x}{b}$.

1550. $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)-(x-b)}=x$.

1551. $\frac{x-a}{a}=\frac{2a}{x-a}$.

1552. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}=0$.

1553. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3a^2+b^2}{a^2-3b^2}$.

1554. $\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$. *

1555. $\frac{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}{1-\frac{a-x}{a+x}}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$. **

1556. Si dimostri che, qualunque sia il valore di p, le due radici dell'equazione $\frac{x}{x+p}+\frac{x+p}{x}+2=0$ sono sempre eguali fra loro.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1557. $\begin{cases}\frac{x+1}{y}=\frac{1}{4}\\ \frac{x}{y+1}=\frac{1}{5}\end{cases}$

1558. $\begin{cases}\frac{13}{x+2y+3}=\frac{-3}{4x-5y+6}\\ \frac{3}{6x-5y+4}=\frac{19}{3x+2y+1}\end{cases}$

1559. $\begin{cases}\frac{5x+7y}{3x+11}=\frac{13}{7}\\ \frac{11x+27}{7x+5y}=\frac{19}{11}\end{cases}$

1560. $\begin{cases}\frac{5}{x-2y}=\frac{7}{2x-y}\\ \frac{3x-2}{7}=\frac{6+y}{5}\end{cases}$

1561. $\begin{cases}\frac{10}{2x+3y-29}+\frac{9}{7x-8y+24}=8\\ \frac{2x+3y-29}{2}=\frac{7x-8y}{3}+8\end{cases}$

1562. $\begin{cases}\frac{x+2y}{5x+6z}=\frac{7}{9}\\ \frac{3y+4z}{x+2y}=\frac{8}{7}\\ x+y+z=128\end{cases}$

1563. $\begin{cases}\frac{8}{2x-3y+17}+5x-8y+43=4\\ \frac{5}{2x-3y+17}+16y-\frac{1}{2}=10x+88\end{cases}$ ***

1564. $\begin{cases}x+y+z=a+b\\ \frac{1}{x-y}=\frac{1}{2b}\\ \frac{x}{y-z}-\frac{1}{2}=\frac{b}{a-b}\end{cases}$

1565. $\begin{cases}\frac{5x+7y}{x+y}=6\\ \frac{3(z-x)}{x-y+z}=1\\ \frac{2x+3y-z}{\frac{x}{2}+3}=4\end{cases}$

1566. $\begin{cases}\frac{1}{x+\frac{1}{y-\frac{a}{x}}}=\frac{1}{x-\frac{1}{y-\frac{b}{x}}}\\ \frac{1}{y}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1\end{cases}$ ****

---

* Si osservi che il numeratore del 1º membro è la differenza di due quadrati.

** Si cominci col moltiplicare per a^2-x^2 il numeratore ed il denominatore del 1º membro, eseguendo poi tutte le possibili riduzioni.

*** Si riguarderanno prima quali incognite da determinare $2x-3y+17$ e $5x-8y+43$.

**** Si cominci a ridurre a più semplice espressione ciascuno dei due membri della prima equazione.

EQUAZIONI BIQUADRATICHE.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1567. $x^4-5x^2+4=0$. **1568.** $x^4-10x^2+9=0$.
1569. $x^4-26x^2+25=0$. **1570.** $x^4-13x^2+36=0$.
1571. $x^4-8x^2-9=0$. **1572.** $x^4-24x^2-25=0$.
1573. $x^4-5x^2-36=0$. **1574.** $x^4-18x^2+81=0$. **1575.** $x^4-2x^2-3=0$.
1576. $4x^4-17x^2+4=0$. **1577.** $4x^4-37x^2+9=0$.
1578. $3x^4-26x^2-9=0$. **1579.** $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$.
1580. $x^4+4abx^2-(a^2-b^2)^2=0$. **1581.** $c^4x^4+(a^2c^2-b^2c^2)x^2-a^2b^2=0$.

EQUAZIONI IRRAZIONALI.

AVVERTENZE. 1ª. Se l'equazione contiene radicali al denominatore, in generale, conviene per prima cosa liberare l'equazione dai denominatori. Bisognerà poi ricordarsi di verificare (secondo la regola del § 328) se le radici dell'equazione intera risolvono l'equazione data.

2ª. Talvolta, quando vi sono varie frazioni contenenti radicali al denominatore, è più comodo cominciare a fare la somma di queste frazioni, semplificando poi, quanto è possibile, la frazione ottenuta.

3ª. Se l'equazione data è intera, e contiene non più di tre radicali quadrati, si potrà sempre liberarla dai radicali col metodo indicato. Se invece, pur essendo intera, contiene più di tre radicali quadrati (eccetto il caso in cui si possa mettere sotto la forma $\sqrt{M}\pm\sqrt{N}=\sqrt{P}\pm\sqrt{Q}$) per liberarla, se pure è possibile, dai radicali occorrono artifizi speciali di cui non possiamo occuparci.

Esempio 1º. *Si risolva l'equazione:*

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Comincio a fare la sottrazione indicata nel 1º membro, ed avrò l'equazione:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})-(x-\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=8\sqrt{x^2-1},\quad\text{ossia}$$

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}=8\sqrt{x^2-1},\quad\text{e sviluppando i quadrati,}$$

$$\frac{(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)-(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)}{x^2-(x^2-1)}=8\sqrt{x^2-1},\quad\text{ossia}$$

$$\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-x^2+2x\sqrt{x^2-1}-x^2+1}{x^2-x^2+1}=8\sqrt{x^2-1},\quad\text{ossia}$$

$$4x\sqrt{x^2-1}=8\sqrt{x^2-1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

Elevando al quadrato ambi i membri della (2), si ottiene: $16x^2(x^2-1)=64(x^2-1)$, ossia $16x^4-16x^2=64x^2-64$, ossia $16x^4-80x^2+64=0$; e dividendo tutti i termini per 16, si ha l'equazione biquadratica: $x^4-5x^2+4=0$, le cui radici sono: $x'=+1$, $x''=-1$, $x'''=+2$, $x''''=-2$.

Verificando, si trova che $x'=+1$, $x''=-1$, $x'''=+2$, soddisfano la (1), mentre $x''''=-2$ non la soddisfa. Dunque:

Risposta. Le radici dell'equazione sono $x'=+1$, $x''=-1$, $x'''=+2$.

Osservazione. Ottenuta la (2), la si poteva risolvere più speditamente così: La (2) è equivalente alla (1) perchè non è altro che la (1) in cui la sottrazione del 1° membro è eseguita invece di essere indicata. Essa si può scrivere così: $(4x-8)\sqrt{x^2-1}=0$, ed ha evidentemente per radici i valori di x che annullano il fattore $\sqrt{x^2-1}$, cioè $x'=+1$, ed $x''=-1$, e quelli che annullano il fattore $4x-8$, cioè $x'''=\frac{8}{4}=2$; e queste sono le radici precedentemente ottenute.

La radice estranea $x''''=-2$ fu introdotta coll'elevare al quadrato ambi i membri della (2).

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $x=\sqrt{x^2-2a\sqrt{a^2+x^2}}-a$ . . (1)

Isolando il radicale, si ha: $x+a=\sqrt{x^2-2a\sqrt{a^2+x^2}}$ . . . . . (2)

Elevando al quadrato ambi i membri della (2), si ha:

$(x+a)^2=\left(\sqrt{x^2-2a\sqrt{a^2+x^2}}\right)^2$, ossia $x^2+2ax+a^2=x^2-2a\sqrt{a^2+x^2}$, ossia

$2ax+a^2=-2a\sqrt{a^2+x^2}$ . . . . (3)

Elevando al quadrato ambi i membri della (3), si ha:

$(2ax+a^2)^2=\left(-2a\sqrt{a^2+x^2}\right)^2$, ossia $4a^2x^2+4a^3x+a^4=4a^2(a^2+x^2)$, ossia $4a^2x^2+4a^3x+a^4=4a^4+4a^2x^2$, ossia $4a^3x=3a^4$ . . . . . . (4)

Da cui $x=\frac{3a^4}{4a^3}$, ossia $x=\frac{3}{4}a$. Si vede così che la (4) ha la sola soluzione $x={}^3/_4a$.

Verificando, si trova che $x={}^3/_4a$ non soddisfa la (1). Dunque:

Risposta. L'equazione proposta non ammette soluzione.

Osservazione. La soluzione $x={}^3/_4a$ non soddisfa nè alla (1) nè alla (3), ma soddisferebbe all' equazione $x=\sqrt{x^2+2a\sqrt{a^2+x^2}}-a$, ed anche all'equazione $2ax+a^2=+2a\sqrt{a^2+x^2}$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1582. $\sqrt{x+4}=7$. **1583.** $x+\sqrt{25-x^2}=7$. **1584.** $x-\sqrt{25-x^2}=1$.

1585. $x-\sqrt{169-x^2}=17$. **1586.** $x+\sqrt{5x+10}=8$.

1587. $x+\sqrt{10x+6}=9$. **1588.** $4x+2\sqrt{5-4x}=5$.

1589. $3x+\sqrt{6x+10}=35$. **1590.** $\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}$.

1591. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$. **1592.** $\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}$.

1593. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-5}=\sqrt{2x+18}$. **1594.** $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

1595. $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$. **1596.** $\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2-a^2}}=x-a$.

1597. $\sqrt{3+\sqrt{x}}+\sqrt{4-\sqrt{x}}=\sqrt{7+2\sqrt{x}}$. **1598.** $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

1599. $\sqrt{5a+x}+\sqrt{5a-x}=\frac{12a}{\sqrt{5a+x}}$. **1600.** $\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{2x+1}}$.

1601. $x\sqrt{\frac{a}{x}-1}=\sqrt{x^2-b^2}$. **1602.** $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$.

1603. $\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=1$. **1604.** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$.

1605. $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **1606.** $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=1$.

1607. $\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}-\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{3}$.

1608. $\frac{1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=2x$.

1609. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **1610.** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1=\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x}+1}$.

1611. $\sqrt[4]{x+1}-1=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}+1}$. **1612.** $(2+x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=4(2+x)^{-\frac{1}{2}}$. *

Equazioni da risolversi facendo uso di particolari artifizi algebrici.

I.

Quando l'equazione è l'eguaglianza di due frazioni, può esser utile considerare l'equazione come una proporzione. In tal caso:

1°. Se i due termini dell'una sono rispettivamente l'uno la somma, e l'altro la differenza delle medesime quantità, conviene applicare il teor. 14° del § 261, che la somma dei due primi termini sta alla loro differenza come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.

2°. Se l'incognita forma da sola uno dei termini delle due frazioni, si può fare uso del teorema che in una proporzione un medio è eguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio; oppure che un estremo è eguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo. Così avendo p.e. $\frac{a}{x}=\frac{b+1}{2\sqrt{b}}$, si può scrivere subito $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$.

---

* Si può dare la forma di radicale alla potenza frazionaria, e poi operare come nei casi precedenti.

3°. Altre volte, è utile scrivere immediatamente che il prodotto dei medi è eguale al prodotto degli estremi. Così avendo p.e. $\frac{x+a}{x-b}=\frac{a+b}{a-b}$, si può scrivere immediatamente $(x+a)(a-b)=(x-b)(a+b)$.

Esempio. *Si risolva l'equazione:* $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$ . . . . (1)

Per trovarci nel caso sopra considerato, diamo a $\sqrt{b}$ per denominatore l'unità, ed avremo l'equazione $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}}{1}$.

Da quest'equazione, facendo uso del 1° dei tre principî sopra detti, avremo:

$$\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})+(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})-(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-1} \quad . \ . \ . \ (2)$$

Elevando al quadrato ambi i membri della (2), si ottiene:

$$\frac{(\sqrt{a+x})^2}{(\sqrt{a-x})^2}=\frac{(\sqrt{b}+1)^2}{(\sqrt{b}-1)^2}, \quad \text{ossia} \quad \frac{a+x}{a-x}=\frac{b+2\sqrt{b}+1}{b-2\sqrt{b}+1} \quad . \ . \ (3)$$

Applicando alla (3) il 1° principio, avremo:

$$\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)-(a-x)}=\frac{(b+2\sqrt{b}+1)+(b-2\sqrt{b}+1)}{(b+2\sqrt{b}+1)-(b-2\sqrt{b}+1)}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x}=\frac{b+2\sqrt{b}+1+b-2\sqrt{b}+1}{b+2\sqrt{b}+1-b+2\sqrt{b}-1}, \quad \text{ossia} \quad \frac{2a}{2x}=\frac{2b+2}{4\sqrt{b}}, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{2a}{2x}=\frac{2(b+1)}{4\sqrt{b}}, \quad \text{ossia} \quad \frac{a}{x}=\frac{b+1}{2\sqrt{b}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Applicando alla (4) il 2° principio, si ricava $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$. Provando, si trova che questo valore di x verifica l'equazione data.

Risposta. L'equazione proposta ha la sola radice $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1613. $\frac{(x+a)^2+(x-b)^2}{(x+a)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$. **1614.** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$.

1615. $\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{c}{x}$. **1616.** $\frac{x+a+2b}{x+a-2b}=\frac{b-2a+2x}{b+2a-2x}$.

1617. $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{a}$. **1618.** $\frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9(x+c)}{8c}$.

1619. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a}}=\dfrac{a}{x-a}$. **1620.** $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\dfrac{x}{2a}$.

1621. $\dfrac{x+\sqrt{12a^2-x}}{x-\sqrt{12a^2-x}}=\dfrac{a+1}{a-1}$. **1622.** $\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$. *

II.

La risoluzione di molte equazioni si semplifica introducendo delle incognite ausiliari opportunamente scelte. Ne daremo alcuni esempi.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $\left(\dfrac{a-x}{x-b}\right)^2=8\dfrac{a-x}{x-b}-15$ . . . (1)

Prendiamo per incognita ausiliaria la frazione $\dfrac{a-x}{x-b}$, ponendo $\dfrac{a-x}{x-b}=y$, e la (1) prenderà la forma: $y^2=8y-15$, ossia $y^2-8y+15=0$, le cui radici sono $y'=5$, $y''=3$.

Avremo quindi: $\dfrac{a-x}{x-b}=5$, ed $\dfrac{a-x}{x-b}=3$.

Risolvendo queste due equazioni, si ricava:

Dalla 1ª, $x'=\dfrac{a+5b}{6}$; dalla 2ª, $x''=\dfrac{a+3b}{4}$.

Provando, si trova che questi valori di x verificano l'equazione data.

Al numero b che è nei denominatori potremo dare qualsiasi valore, eccetto il valore $b=x$ che annullerebbe i denominatori. Poichè x ha uno dei due valori $\dfrac{a+5b}{6}$, $\dfrac{a+3b}{4}$, dire che si esclude il valore $b=x$, è lo stesso che dire che si esclude il valore $b=\dfrac{a+5b}{6}$, ossia il valore $6b=a+5b$, ossia il valore $6b-5b=a$, ossia il valore $b=a$; similmente che si esclude il valore $b=\dfrac{a+3b}{4}$, ossia il valore $4b=a+3b$, ossia il valore $4b-3b=a$, ossia il valore $b=a$. Dunque:

Risposta. Se a, b hanno valori diversi, le radici dell'equazione sono $x'=\dfrac{a+5b}{6}$, $x''=\dfrac{a+3b}{4}$. *Se è $a=b$, l'equazione non ha radici.*

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $2x^2+3x+9-5\sqrt{2x^2+3x+9}=6$ (1)

Considerando che $2x^2+3x+9=(\sqrt{2x^2+3x+9})^2$, possiamo prendere per incognita ausiliaria il radicale, e scrivere: $\sqrt{2x^2+3x+9}=y$ . . . (2)

La (1) allora si potrà scrivere $y^2-5y=6$, ossia $y^2-5y-6=0$, le cui radici sono $y'=-1$, $y''=6$.

Sostituendo questi valori di y' e di y'' nella (2), avremo:

$\sqrt{2x^2+3x+9}=-1$ . . . . (α) $\sqrt{2x^2+3+x9}=6$ . . . . . (β)

---

* Si osservi che se due frazioni di egual numeratore sono eguali, devono essere eguali i denominatori.

Poichè noi consideriamo solamente i radicali aritmetici, rigettiamo il valore $\sqrt{2x^2+3x+9} = -1$, e risolveremo solamente la (β). Per risolverla, eleviamone ambi i membri al quadrato, ed avremo l'equazione $2x^2+3x+9=36$, ossia $2x^2+3x-27=0$, le cui radici sono $x'=3$, $x''=-4\,{}^1/_2$.

Provando, si trova che questi valori di x verificano l'equazione data.

Risposta. Le radici dell'equazione data sono $x'=3$, $x''=-4\,{}^1/_2$.

Esempio 3°. Si risolva l'equazione: $3x+\sqrt{6x+10}=35$ . . . . (1)

Potremmo risolverla col metodo suggerito al § 337; però vogliamo, a titolo di esercizio, prendere per incognita $\sqrt{6x+10}$.

Poniamo dunque $\sqrt{6x+10}=y$ . . . . (A)

e procuriamo di avere un'equazione equivalente alla data, e tale che non contenga altri termini fuorchè termini noti e potenze dell'incognita $\sqrt{6x+10}$ non superiori alla 2ª. Osserviamo intanto che è $(\sqrt{6x+10})^2=6x+10$, e che nell'equazione abbiamo il termine $3x$. Cominciamo quindi a far comparire il termine $6x$. A tal fine, moltiplichiamo per 2 tutti i termini della (1), ed avremo l'equazione equivalente: $6x+2\sqrt{6x+10}=70$ . . . . (2)

Per far comparire l'espressione $6x+10$, si aggiunge 10 ai due membri della (2), e si ha l'equazione equivalente: $6x+10+2\sqrt{6x+10}=80$ . . (3)

Poichè si è posto $\sqrt{6x+10}=y$, sarà $6x+10=y^2$; e sostituendo questi valori nella (3), si avrà: $y^2+2y=80$, ossia $y^2+2y-80=0$, le cui radici sono $y'=8$, $y''=-10$.

Sostituendo questi valori di y' ed y'' nella (A), avremo le due equazioni:

$\sqrt{6x+10}=8$ . . . . (α) $\sqrt{6x+10}=-10$ . . . . . . (β)

Poichè ci occupiamo solo dei radicali aritmetici, rigettiamo il valore $\sqrt{6x+10}=-10$, e risolviamo solo la (α).

Elevando al quadrato ambi i membri della (α), si ha $6x+10=64$; da cui $6x=54$, ossia $x=9$, il qual valore soddisfa all'equazione proposta.

Risposta. L'equazione ha la sola radice $x=9$.

Esempio 4°. Si risolva l'equazione: $5x\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^3}=296$ . . . . (1)

Nel 1° termine porto il fattore x sotto il radicale, ed ottengo:

$5x\sqrt{x}=5\sqrt{x^2x}=5\sqrt{x^3}$. E l'equazione data si può scrivere così:

$$5\sqrt{x^3}-3\sqrt[4]{x^3}=296 \quad . . . . (2)$$

Osservo poi che $\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^2=\sqrt{x^3}$; e quindi, se prendo per incognita ausiliaria $\sqrt[4]{x^3}$, ponendo $\sqrt[4]{x^3}=y$ . . . . (A)

sarà $\sqrt{x^3}=y^2$, e l'equazione (2) si potrà scrivere: $5y^2-3y=296$, ossia $5y^2-3y-296=0$, le cui radici sono $y'=8$, $y''=-7{,}4$.

Sostituendo questi valori di y' ed y'' nella (A), si avranno le equazioni:

$\sqrt[4]{x^3}=8$ . . . . (α) $\sqrt[4]{x^3}=-7{,}4$ . . . . (β)

Rigettando il secondo valore, ci basterà risolvere la (α). A tal fine, eleviamo alla 4ª potenza ambi i membri della (α), ed avremo $x^3=4096$; da cui risulta $x=\sqrt[3]{4096}$.

Per trovare il valore di x bisognerebbe saper estrarre la radice cubica di un numero. Però, per tentativi, è facile trovare che è $\sqrt[3]{4096}=16$. È facile verificare che questo valore di x soddisfa all'equazione data.

Risposta. L'equazione data ha la soluzione $x=16$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1623. $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$. * **1624.** $x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24$. **

1625. $x^2+7x+\sqrt{x^2+7x+10}=100$. **1626.** $2x^2+3\sqrt{x^2-x+1}=2x+3$.

1627. $x^2+5=8x+2\sqrt{x^2-8x+40}$. **1628.** $6x^2+15x-49=\sqrt{2x^2+5x+7}$.

1629. $2x^2-15=4(\sqrt{x^2+12x-20}-6x)$.

1630. $\sqrt{x^2-3x+2}-4x^2+12x=8$.

1631. $\sqrt{3x^2-6x+9}-4x^2+8x=3$. ***

1632. $\sqrt{x^2-8x+31}+(x-4)^2=5$. **1633.** $ax^2+4\sqrt{ax^2+bx}=21-bx$.

1634. $\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{2}=\frac{12\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1635. $(x^2-3x+2)^2-(8x^2-3x+2)+12=0$.

1636. $(x^2-5x+4)^2-3(x^2-5x)=2$. **** **1637.** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$.

1638. $x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x-\frac{1}{x}\right)=4{,}75$. ** ***

1639. $(x^4+x^2+1)^2-38(x^4+x^2+1)+105=0$.

1640. $(x+\sqrt{x})^4+3(x+\sqrt{x})^2=20$. *** ***

1641. $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$. * *** ***

1642. $5\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=33$. **1643.** $3\sqrt{1+x}-2\sqrt[4]{1+x}=8$.

1644. $4\sqrt[3]{x}-\frac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$. **1645.** $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20$. ** *** ***

1646. $x^{10}+31x^5=32$. *** *** ***

1647. $\frac{x^2-2x-3}{5(x^2-2x-8)}+\frac{x^2-2x-15}{9(x^2-2x-24)}-\frac{2(x^2-2x-35)}{13(x^2-2x-48)}=\frac{92}{585}$. * *** *** ***

---

* Si prenda per incognita x^2+x.

** In questo e nei dieci esercizi seguenti si prenda per incognita il radicale.

*** Si isoli il radicale, poi si moltiplichino ambi i membri per 3; poscia si metta in evidenza il fattor comune $4x$.

**** Si prenda per incognita ausiliaria x^2-5x+4.

** *** Si osservi a che cosa è eguale $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$.

*** *** Pongasi $x+\sqrt{x}=y$.

* *** *** Si dividano tutti i termini dell'equazione per x^4, e si prenda per incognita $\frac{x^2-x+1}{x}$.

** *** *** Si porti il fattore x sotto il radicale.

*** *** *** Si prenda per incognita x^5.

* *** *** *** Si prenda per incognita x^2-2x+1.

III.

Quando il 1° membro d'un'equazione è la somma di due quantità reciproche (il cui prodotto è perciò eguale a $+1$) ed il 2° membro non ha incognite:

1°. Si può prendere per incognita ausiliaria una delle due quantità reciproche. Se una di esse si rappresenta con y, l'altra sarà $\frac{1}{y}$. Si continua poi come negli esempi precedenti.

2°. Oppure si possono considerare le due quantità reciproche come le due radici d'una equazione di 2° grado ad un'incognita. Di queste radici si conosce la somma ed il prodotto; e quindi si può facilmente costruire l'equazione di 2° grado che ha queste radici.

Esempio. *Si risolva l'equazione:* $\frac{3x^2+2}{2x+1}+\frac{2x+1}{3x^2+2}=\frac{221}{70}$ . . . (1)

Le due frazioni $\frac{3x^2+2}{2x+1}$ e $\frac{2x+1}{3x^2+2}$ sono reciproche; il loro prodotto è $+1$, e la loro somma è $\frac{221}{70}$.

Chiamando y' ed y'' i valori di queste due frazioni, saranno y' ed y'' le radici dell'equazione $y^2-\frac{221}{70}y+1=0$, ossia (moltiplicandone per 70 tutti i termini) $70y^2-221y+70=0$, le cui radici sono $y'=\frac{14}{5}$, $y''=\frac{5}{14}$.

Questi saranno i valori delle due frazioni $\frac{3x^2+2}{2x+1}$ e $\frac{2x+1}{3x^2+2}$.

Potremo quindi porre:

$\frac{3x^2+2}{2x+1}=\frac{14}{5}$ e $\frac{2x+1}{3x^2+2}=\frac{5}{14}$, oppure $\frac{3x^2+2}{2x+1}=\frac{5}{14}$ e $\frac{2x+1}{3x^2+2}=\frac{14}{5}$.

Per conoscere il valore di x, basta evidentemente considerare una sola delle due frazioni, ossia basta risolvere le due equazioni:

$\frac{3x^2+2}{2x+1}=\frac{14}{5}$ . . . . . (α) $\qquad$ $\frac{3x^2+2}{2x+1}=\frac{5}{14}$ . . . . . (β)

Liberandole dai denominatori, ed ordinandole, si ottiene:

Dalla (α) $5(3x^2+2)=14(2x+1)$, ossia $15x^2-28x-4=0$ . . (α')

Dalla (β) $14(3x^2+2)=5(2x+1)$, ossia $42x^2-10x+23=0$ . . (β')

Le radici della (α') sono $x'=2$, $x''=-\frac{2}{15}$. Le radici della (β') sono $x'=\frac{5+i\sqrt{941}}{42}$, $x''=\frac{5-i\sqrt{941}}{42}$. Ciascuna di queste radici soddisfa all'equazione data.

Risposta. *Le radici dell'equazione proposta sono:* $x'=2$, $x''=-\frac{2}{15}$ $x'''=\frac{5+i\sqrt{941}}{42}$, $x''''=\frac{5-i\sqrt{941}}{42}$.

Osservazione. Si poteva porre $\frac{3x^2+2}{2x+1}=y$, ed allora si avrebbe avuto $\frac{2x+1}{3x^2+2}=\frac{1}{y}$. E sostituendo questi valori nella (1), si sarebbe ottenuta l'equazione $y+\frac{1}{y}=\frac{221}{70}$, la cui risoluzione ci avrebbe condotto ai medesimi risultati precedentemente ottenuti.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1648. $\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}$.

1649. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$.

1650. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$.

1651. $\frac{x}{9-x}+\frac{9-x}{x}=2{,}5$.

1652. $\frac{x}{63-x}+\frac{63-x}{x}=2{,}05$.

1653. $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}=\frac{10}{3}$.

1654. $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}$.

1655. $\frac{2x-1}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{2x-1}=\frac{10}{3}$.

1656. $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}+\frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}$.

1657. $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}=2$.

1658. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}+2=0$.

1659. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}-2=\frac{4a^2}{2a+1}$.

1660. $\frac{(a-x)^2+(b-x)^2}{(a-x)(b-x)}=\frac{5}{2}$. *

1661. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=1$. **

1662. $\frac{3x-2}{2x-5}-\frac{2x-5}{3x-2}=\frac{8}{3}$.

1663. $\frac{(a-x)^2-(x-b)^2}{(a-x)(x-b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$.

IV.

Le equazioni di 3°, 4°, 5° grado, ridotte a zero, e tali che nel 1° membro i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi siano numericamente eguali e dello stesso segno, oppure numericamente eguali e di segno contrario, si risolvono facilmente nel seguente modo:

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $2x^3+3x^2+3x+2=0$ . . . (1)

Nel 1° membro raccogliamo in un sol termine tutti i termini equidistanti dagli estremi, scrivendo l'equazione così: $(2x^3+2)+(3x^2+3x)=0$, ossia

$$2(x^3+1)+3x(x+1)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Pel teor. 3° § 311 e per la regola § 312 si ha: $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

Sostituendo nella (2) questo valore di x^3+1, si ha:

$2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0$; e mettendo in evidenza il fattore $x+1$, $(x+1)[2(x^2-x+1)+3x]=0$, ossia $(x+1)(2x^2-2x+2+3x)=0$, ossia

$$(x+1)(2x^2+x+2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

* Si dia al 1° membro la forma di somma di due frazioni.

** Si osservi che il prodotto delle due frazioni è —1.

Poichè il 1° membro della (3) è un prodotto di due fattori, esso si annullerà annullandosi l'uno o l'altro dei due fattori. Dunque la (3) è equivalente all'insieme delle due equazioni:

$x+1=0$ . . . . (α) $2x^2+x+2=0$ . . . . . . (β)

Ma la (3) è equivalente alla (1); dunque la (1) è equivalente all'insieme delle due equazioni (α), (β). La (α) ha la sola radice $x=-1$. La (β) ha le due radici $x'=\frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, $x''=\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$.

Risposta. Le radici sono $x'=-1$, $x''=\frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$, $x'''=\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$.

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $2x^4-3x^3+3x-2=0$ . . . (1)

Operando come nell'esempio precedente, abbiamo: $2x^4-2-3x^3+3x=0$, ossia $(2x^4-2)-(3x^3-3x)=0$, ossia $2(x^4-1)-3x(x^2-1)=0$ . . (2)

Ma pel teor. 1° § 58, sarà: $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$.

Sostituendo nella (2) questo valore di x^4-1, si ha:

$2(x^2+1)(x^2-1)-3x(x^2-1)=0$, ossia (mettendo in evidenza il fattore x^2-1) $(x^2-1)[2(x^2+1)-3x]=0$, ossia $(x^2-1)(2x^2+2-3x)=0$ . . . . (3)

La (3) è equivalente all'insieme delle due equazioni:

$x^2-1=0$ . . . . (α) $2x^2-3x+2=0$ . . . . . . (β)

le quali sono due equazioni di 2° grado. Le radici della (α) sono $x'=+1$, ed $x''=-1$; le radici della (β) sono $x'=\frac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $x''=\frac{3-i\sqrt{7}}{4}$.

Risposta. Le radici dell'equazione data sono $x'=+1$, $x''=-1$, $x'''=\frac{3+i\sqrt{7}}{4}$, $x''''=\frac{3-i\sqrt{7}}{4}$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ . . (1)

Si vede subito che $x=0$ non è una radice dell'equazione; perchè ponendo *zero* al posto di x, il 1° membro non si annulla. Essendo dunque x diverso da zero, sarà pure x^2 diverso da zero; e potremo quindi dividere tutti i termini della (1) per x^2. Otterremo così l'equazione:

$\frac{6x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{38x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}=\frac{0}{x^2}$, ossia $6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0$. (2)

la quale (teor. 2° § 103 nota **) è equivalente alla (1).

Nel 1° membro riuniamo in un sol termine tutti i termini equidistanti dagli estremi, ed avremo successivamente: $\left(6x^2+\frac{6}{x^2}\right)+\left(5x+\frac{5}{x}\right)-38=0$, ossia

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Prendiamo ora per incognita ausiliaria $x+\frac{1}{x}$, ponendo $x+\frac{1}{x}=y$ (A)

Osservando che $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2x\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, si ve[de] subito che è: $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$.

Ponendo questi valori di $x+\frac{1}{x}$, e di $x^2+\frac{1}{x^2}$ nella (3), si ottie[ne] l'equazione: $6(y^2-2)+5y-38=0$, ossia $6y^2+5y-50=0$, la quale [è] di 2° grado ad un'incognita, ed ha per radici $y'={}^5/_2$, $y''=-{}^{10}/_3$.

Ponendo questi valori di y nella (A), si ottengono le due equazioni:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha) \qquad\qquad x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

L'equazione data è così equivalente all'insieme delle due equazioni (α), (β).

Moltiplicando ambi i membri della (α) per $2x$, si ottiene:

$$2x.x+2x.\frac{1}{x}=2x.\frac{5}{2}, \text{ ossia } 2x^2+2=5x, \text{ ossia } 2x^2-5x+2=0 \quad (\alpha')$$

Moltiplicando ambi i membri della (β) per $3x$, si ottiene:

$$3x.x+3x.\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}.3x, \text{ ossia } 3x^2+3=-10x, \text{ ossia } 3x^2+10x+3=0 \quad (\beta')$$

Le radici della (α') sono $x'=2$, $x''={}^1/_2$. Le radici della (β') sono $x'=-3$, $x''=-{}^1/_3$. *

Risposta. L'equazione data ha le quattro radici $x'=2$, $x''={}^1/_2$, $x'''=-3$, $x''''=-{}^1/_3$.

Esempio 4°. *Si risolva l'equazione:* $6x^5-x^4-43x^3+43x^2+x-6=0$ **

Il 1° membro dell'equazione è divisibile per $x-1$. Dividendolo per $x-1$, si ottiene per quoto $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6$. Avremo quindi: $6x^5-x^4-43x^3+43x^2+x-6=(x-1)(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)$; e l'equazione data potrà scriversi così: $(x-1)(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)=0$ . . (1)

Dalla (1) si vede facilmente che l'equazione data è equivalente all'insieme delle due equazioni:

$$x-1=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha) \qquad 6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

La (α) ha per radice $x=1$. La (β), come risulta dall'esempio precedente, ha per radici $x'=2$, $x''={}^1/_2$, $x'''=-3$, $x''''=-{}^1/_3$.

Risposta. L'equazione data ha le cinque radici $x'=1$, $x''=2$, $x'''={}^1/_2$, $x''''=-3$, $x'''''=-{}^1/_3$.

Osservazione 1ª. L'artifizio usato per risolvere quest'equazione permette spesso di risolvere equazioni complete ad un'incognita, di grado superiore al 2°. Si riduce a tal fine l'equazione ad essere intera, e ridotta a zero; e poi si prova per tentativi se il 1° membro è divisibile per qualche fattore della forma $x-a$, ossia se si annulla ponendo a al posto di x. Per a si scelgono ordinariamente numeri piccoli, p.e. ± 1, ± 2, ± 3, $\pm {}^1/_2$, $\pm {}^1/_3$, ecc.

Osservazione 2ª. Si osservi che le radici delle equazioni risolte negli esempi 1°, 2°, 3°, 4°, sono a due a due reciproche. ($+1$ è reciproco di sè stesso, e -1 è reciproco di se stesso). Per questo motivo, queste equazioni si chiamano *equazioni reciproche.* L'esempio 1° ci indica la via da seguire per risolvere le equazioni reciproche di 3° grado; l'esempio 2° quelle di 4° grado in cui manca il termine in x^2; l'esempio 3° quelle complete di 4° grado; e l'esempio 4° quelle complete di 5° grado.

---

* Poichè le radici della (α') non annullano il moltiplicatore $2x$, e quelle della (β') non annullano il moltiplicatore $3x$, esse (per la regola del § 328) saranno rispettivamente radici della (α) e della (β), e quindi saranno anche radici dell'equazione data.

** È facile riconoscere sperimentalmente, che un polinomio completo di 5° grado in x ed avente eguali i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi, si annulla ponendo -1 al posto di x, ossia è divisibile per $x+1$. Se invece i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono numericamente eguali, e di segno contrario, il polinomio si annulla ponendo $+1$ al posto di x, ossia è divisibile per $x-1$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1664. $x^3-x^2+x-1=0$. **1665.** $3x^3-13x^2+13x-3=0$.

1666. $2x^3+7x^2+7x+2=0$. **1667.** $5x^3-31x^2+31x-5=0$.

1668. $ax^3+bx^2+bx+a=0$. **1669.** $2x^4+5x^3-5x-2=0$.

1670. $3x^4-10x^3+10x-3=0$. **1671.** $4x^4-17x^3+17x-4=0$.

1672. $5x^4-26x^3+26x-5=0$. **1673.** $x^4-6x^3+6x-1=0$.

1674. $3x^4-4x^3+4x-3=0$. **1675.** $x^4-5x^3+5x-1=0$.

1676. $4x^4-6x^3+6x-4=0$. **1677.** $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

1678. $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=4$. **1679.** $x^4-x^3+\frac{5}{4}x^2-x+1=0$.

1680. $\frac{1+x^4}{(1+x)^4}=\frac{1}{2}$. * **1681.** $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$.

1682. $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$.

1683. $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$. **1684.** $x^3-1=0$. **

1685. $x^3+1=0$. **1686.** $x^4-1=0$. **1687.** $x^4+1=0$. ***

1688. $x^5-1=0$. **** **1689.** $x^5+1=0$. **1690.** $x^6-1=0$.

1691. $x^6+1=0$. *****

1692. Si risolva l'equazione $x^3-6x^2+11x-6=0$, sapendo che il 1° membro è divisibile per $x-3$. ******

1693. Si risolva l'equazione $x^3-5x^2-29x+105=0$ sapendo che una sua radice è eguale a 3.

1694. Si risolva l'equazione $2x^3-9x^2+10x-3=0$, sapendo che essa ha una radice in comune con l'equazione $(x+1)(x+3)=2(3x+1)$. *******

1695. Si determini a con la condizione che l'equazione $3x^3-5x^2+3x+a=0$ abbia una radice eguale ad 1, e poi si risolva l'equazione che ne risulta.

Sistemi di equazioni non tutte di 1° grado.

Il teorema fondamentale sui sistemi di equazioni ed i relativi corollari (§ 316) e la regola del § 321, sono applicabili ai sistemi aventi equazioni di qualsiasi grado, perchè la loro dimostrazione fu fatta indipendentemente dal grado delle equazioni. Se, negli esempi recati, abbiamo fatto uso dei sistemi di equazioni di 1° grado, fu solamente per amore di semplicità.

Quando, per risolvere un sistema in cui non entrano equazioni di grado superiore al 2°, si fa uso della regola del § 321, si ottiene, in generale, un sistema risolvente in cui compaiono equazioni di grado superiore al 2°; ep-

* Si ordini l'equazione, togliendo prima i denominatori, e poi eseguendo l'operazione $(1+x)^4$.

** Si scomponga il 1° membro in un prodotto di due fattori.

*** Si ponga $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-(x\sqrt{2})^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2$.

**** Si scomponga il 1° membro in un prodotto di due fattori.

***** Si ponga $x^6+1=x^3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$; si trovi il valore di $x^3+\frac{1}{x^3}$ in funzione di $x+\frac{1}{x}$; e poi invece di 3 si scriva $(\sqrt{3})^2$, e così si trasformerà x^6+1 in un prodotto di tre fattori di 2° grado in x.

****** Si scriva che il dividendo è eguale al prodotto del divisore pel quoto.

******* Le radici di quest'equazione sono manifeste. Si verifichi quale è la radice comune alle due equazioni; poi.....

perciò il sistema dato raramente si può risolvere per mezzo di sole equazioni di 1° o di 2° grado. Quando ciò è possibile, vi si perviene, in generale, facendo uso di artifizi che solo la pratica può suggerire. Ne daremo alcuni esempi.

SISTEMI DI DUE EQUAZIONI CON DUE INCOGNITE.

UN'EQUAZIONE È DI 2° GRADO, E L'ALTRA DI 1° GRADO.

1° Metodo. Si può risolvere l'equazione di 1° grado rispetto ad un'incognita, ed il valore trovato si sostituisce all'incognita stessa nell'altra equazione. Si otterrà così un'equazione di 2° grado ad un'incognita, la quale fornirà (in generale) due valori dell'incognita. Sostituendo successivamente questi due valori nell'equazione di 1° grado, si otterranno due valori per l'altra incognita.

2° Metodo. Servendoci dei teoremi dei §§ 60, 61, e sommando o sottraendo opportunamente, a membro a membro le equazioni, si può talora ottenere il valore della somma e del prodotto delle due incognite. Si potrà poi (§ 211) costruire un'equazione di 2° grado ad un'incognita, le cui radici saranno le radici del sistema dato.

3° Metodo. Servendoci dei medesimi mezzi indicati nel 2° metodo, si può ottenere il valore della somma e della differenza delle incognite; e poi si avranno immediatamente i valori delle incognite (Problema 1° pag. 301).

4° Metodo. Alcune volte, dopo aver isolato nel 2° membro i termini noti delle due equazioni, si può facilmente trasformare il 1° membro dell'equazione di 2° grado in un prodotto di fattori di 1° grado, uno dei quali fattori è il 1° membro dell'altra equazione. Sostituendone il valore, si otterrà un'equazione di 1° grado; e la risoluzione del sistema sarà ridotta alla risoluzione di un sistema di 1° grado.

Esempio. *Si risolva il sistema* (A) $\begin{cases} x^2+y^2=25 & \ldots\ldots (1) \\ x+y\ \ =1 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$

1° Metodo. Risolvendo la (2) rispetto ad y, si ha $y=1-x$; e sostituendo questo valore di y nella (1), si ottiene l'equazione: $x^2+(1-x)^2=25$, ossia $x^2+1-2x+x^2=25$, ossia $2x^2-2x-24=0$, ossia (dividendone per 2 tutti i termini) $x^2-x-12=0$ . . . . (α)

Le radici della (α) sono $x'=4$, $x''=-3$. Sostituendo ora nella (2) il valore di x', si ottiene $y'=-3$; sostituendo nella (2) il valore di x'', si ottiene $y''=4$.

Risposta. *Il sistema ammette le due soluzioni* $x'=4$, $y'=-3$, *ed* $x''=-3$, $y''=4$.

2° Metodo. Elevando al quadrato ambi i membri della (2), si ottiene: $(x+y)^2=1$, ossia $x^2+2xy+y^2=1$ . . . . (3)

Sottraendo a membro a membro la (1) dalla (3), si ottiene:
$x^2+2xy+y^2-x^2-y^2=1-25$, ossia $2xy=-24$, ossia $xy=-12$ (4)

La (2) e la (4) formano il sistema (B) $\begin{cases} x+y=1 & \ldots\ldots (2) \\ xy=-12 & \ldots\ldots (4) \end{cases}$

Delle due incognite x, y, conosciamo ora la somma 1, e il prodotto -12; i valori delle incognite saranno perciò le radici dell'equazione $x^2-x-12=0$, la quale è l'equazione (α) precedentemente ottenuta. Adesso si continua come nel caso precedente.

3° *Metodo.* Ottenuta (come col 2° metodo) l'equazione $2xy=-24$, possiamo sottrarre quest'equazione dalla (1), ed otteniamo:

$$x^2+y^2-2xy=25-(-24), \quad \text{ossia} \quad (x-y)^2=49.$$

Estraendo la radice quadrata da ambi i membri di quest'equazione, si ottiene: $x-y=\pm 7$ . . . . (5)

La (2) e la (5) formano il sistema (C), il quale è l'insieme dei due sistemi (I), (II).

$$(C)\begin{cases}x+y=1\\x-y=\pm 7\end{cases} \qquad (\text{I})\begin{cases}x+y=1\\x-y=7\end{cases} \qquad (\text{II})\begin{cases}x+y=1\\x-y=-7.\end{cases}$$

Rappresentando con x' ed y' la soluzione del sistema (I), e con x'' ed y'' la soluzione del sistema (II), avremo: $x'=4$, $y'=-3$, ed $x''=-3$, $y''=4$. Questi sono i valori trovati coi metodi precedenti.

4° *Metodo. Si risolva il sistema* $(a)\begin{cases}x^2+xy=35 & \text{. . . (1)}\\x+y=7 & \text{. . . . (2)}\end{cases}$

Potremmo far uso del 1° metodo; però, in questo caso, è più comodo operare nel seguente modo. Nel 1° membro della (1) si mette in evidenza il fattore x, comune a tutti i termini; e la (1) prende la forma $x(x+y)=35$ (1')

Allora il sistema dato assumerà la forma del sistema (b).

$$(b)\begin{cases}x(x+y)=35 & \text{. . . (1')}\\x+y=7 & \text{. . . . (2)}\end{cases} \qquad (c)\begin{cases}x=5 & \text{. . . . . . (1'')}\\x+y=7 & \text{. . . . . . (2)}\end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, basterà sostituire nella (1') il valore di $x+y$ dato dalla (2). La (1') prende la forma $x.7=35$, da cui $x=5$ . . (1'')

Siamo così ridotti a risolvere il sistema (c), la cui soluzione è $x=5$, $y=2$. Poichè la risoluzione del sistema dipende dalla risoluzione di un sistema di due equazioni di 1° grado, esso ammette una sola soluzione.

Risposta. Il sistema dato ammette la sola soluzione $x=5$, $y=2$.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1696. $\begin{cases}2x-5y=3\\x^2+xy=20.\end{cases}$ **1697.** $\begin{cases}x+y=7(x-y)\\x^2+y^2=100.\end{cases}$

1698. $\begin{cases}5(x^2-y^2)=4(x^2+y^2)\\x+y=8.\end{cases}$ **1699.** $\begin{cases}4x+9y=12\\2x^2+xy=6y^2.\end{cases}$

1700. $\begin{cases}x+y=7\\x^2+2y^2=34.\end{cases}$ **1701.** $\begin{cases}xy=x+y\\ax=by.\end{cases}$ **1702.** $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\\x^2+y^2=ax+by.\end{cases}$

1703. $\begin{cases}4x-5y=1\\2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47.\end{cases}$

1704. $\begin{cases}(x-6)^2+(x-5)^2+2xy=60\\5y-4x=1.\end{cases}$

1705. $\begin{cases}4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{5}{12}(4x+y)=41\\4x-y=4.\end{cases}$ **1706.** $\begin{cases}x+y=20\\xy=64.\end{cases}$

1707. $\begin{cases}x+y=a\\xy=b.\end{cases}$ **1708.** $\begin{cases}5x+3y=22\\xy=8.\end{cases}$ * **1709.** $\begin{cases}ax+by=c\\xy=d.\end{cases}$

* Si moltiplichino ambi i membri della 2ª per 5.3, e si osservi che è $5.3.xy=(5x)(3y)$.

1710. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2 \\ xy=ab. \; * \end{cases}$ **1711.** $\begin{cases} x-y=9 \\ xy\;=90. \; ** \end{cases}$ **1712.** $\begin{cases} x-y=a \\ xy\;=b. \end{cases}$

1713. $\begin{cases} x^2+y^2=1818 \\ x+y\;=60. \end{cases}$ **1714.** $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x+y\;=b. \end{cases}$ **1715.** $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. \; *** \end{cases}$

1716. $\begin{cases} x^2+y^2=3546 \\ x-y\;=6. \end{cases}$ **1717.** $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x-y\;=b. \end{cases}$ **1718.** $\begin{cases} x-\;y=1 \\ 2x-5y=3. \end{cases}$

1719. $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1 \\ x+y=2. \end{cases}$ **1720.** $\begin{cases} x^2+xy=2 \\ xy=1. \end{cases}$ **1721.** $\begin{cases} x^2+xy=6 \\ x+\;y=3. \end{cases}$

1722. $\begin{cases} x^2-xy=2 \\ x-\;y=1. \end{cases}$ **1723.** $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x+y\;=b. \end{cases}$ **1724.** $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x-y\;=b. \end{cases}$

LE DUE EQUAZIONI SONO ENTRAMBE DI 2° GRADO.

Possiamo risolvere un'equazione rispetto ad un'incognita, e sostituire il valore trovato nell'altra equazione. Si otterrà, in generale, un'equazione di 4° grado ad un'incognita, che non sempre sapremo risolvere. Ci limiteremo perciò alla considerazione di alcuni casi particolari.

1° CASO. Un'equazione dà il valore della somma o della differenza dei quadrati delle incognite, e l'altra dà il valore del prodotto delle incognite.

Si procura di ricavare prima il valore della somma e del prodotto, oppure della somma e della differenza delle incognite, e poi si procede come negli esempi precedenti.

Esempio. *Si risolva il sistema* $(A)\begin{cases} x^2+y^2=17 \quad \dots\dots\dots \quad (1) \\ xy\;=4 \quad \dots\dots\dots \quad (2) \end{cases}$

1° Metodo. Abbiamo il prodotto delle incognite; procuriamo di averne anche la somma. A tal fine moltiplichiamo per 2 ambi i membri della (2), ed otteniamo l'equazione $2xy=8$, la quale sommata a membro a membro colla (1), dà l'equazione: $x^2+2xy+y^2=17+8$, ossia $(x+y)^2=25$. Estraendo la radice quadrata da ambi i membri di questa equazione, si ottiene

$$x+y=\pm 5 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (\alpha)$$

Possiamo ora sostituire quest'equazione alla (1), ed il sistema dato si muta nel sistema (B), il quale è equivalente all'insieme dei sistemi (I), (II).

$$(B)\begin{cases} x+y=\pm 5 \\ xy\;=4. \end{cases} \qquad (\mathrm{I})\begin{cases} x+y=5 \\ xy\;=4. \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x+y=-5 \\ xy\;=4. \end{cases}$$

Il sistema (I) ha per soluzione le due radici dell'equazione $z^2-5z+4=0$, le quali sono $z'=4$, $z''=1$.

Dunque una delle incognite del sistema (I) ha il valore 4, e l'altra ha il valore 1; e poichè nel sistema (I) si può scambiare indifferentemente x in y, ed y in x, potremo porre: $x'=4$, $y'=1$, od anche $x''=1$, $y''=4$, e queste sono le due soluzioni del sistema (I).

---

* Si dividano ambi i membri della 2ª per ab, e si prendano per incognite $\dfrac{x}{a}$ ed $\dfrac{y}{b}$.

** Si scriva la prima equazione così: $x+(-y)=9$, e si prendano per incognite x e $-y$. Oppure si metta $-y=z$, e si prendano per incognite x e z.

*** Si prendano per incognite $\dfrac{x}{a}$ ed $\dfrac{y}{b}$.

Analogamente, pel sistema (II) si trovano le due soluzioni $x'''=-4$, $y'''=-1$, ed $x''''=-1$, $y''''=-4$. Verificando, si trova che tutte queste coppie di valori soddisfano il sistema dato.

Risposta. Il sistema proposto ammette le soluzioni $x'=4$, $y'=1$, $x''=1$, $y''=4$, $x'''=-4$, $y'''=-1$, $x''''=-1$, $y''''=-4$.

2° Metodo. Il sistema dato (A) si poteva anche risolvere trovando il valore della somma e della differenza delle incognite.

Dopo aver trovato l'equazione $x+y=\pm 5$ . . . . (α)

potevamo procedere nel seguente modo:

Dall'equazione (1) si sottrae a membro a membro l'equazione $2xy=8$, e si ottiene $x^2-2xy+y^2=17-8$, ossia $(x-y)^2=9$. Estraendone la radice quadrata da ambi i membri, si ottiene l'equazione $x-y=\pm 3$ . . (β)

Sostituiamo nel sistema dato la (α) alla (1) e la (β) alla (2), ed otteniamo il sistema (A'), il quale equivale all'insieme dei quattro sistemi (a), (b), (c), (d).

$$(A')\begin{cases} x+y=\pm 5 \\ x-y=\pm 3 \end{cases}\qquad (a)\begin{cases} x+y=+5 \\ x-y=+3 \end{cases}\qquad (b)\begin{cases} x+y=+5 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-3 \end{cases}\qquad (d)\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=+3 \end{cases}$$

Rappresentando con x', y' le radici del sistema (a), con x'', y'' quelle del sistema (b), con x''', y''', quelle del sistema (c), e con x'''', y'''' quelle del sistema (d), si ottiene: $x'=4$, $y'=1$; $x''=1$, $y''=4$; $x'''=-4$ $y'''=-1$; $x''''=-1$, $y''''=-4$, come si era ottenuto col 1° metodo.

2° CASO. Le due equazioni contengono solamente termini di 2° grado, e termini noti.

Si portano nel 2° membro tutti e soli i termini noti; e poi s'introduce un' incognita ausiliaria, opportunamente scelta, e si procede come nel seguente esempio:

Esempio. Si risolva il sistema $(A)\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=13 & \ldots\ (1) \\ 3x^2-xy+2y^2=52 & \ldots\ (2) \end{cases}$

Introduciamo un'incognita ausiliaria t, e poniamo p.e. $y=tx$ . . . (α)

Sostituendo questo valore di y nella (1) e nella (2), si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2x^2+3x.tx-(tx)^2=13 \\ 3x^2-x.tx+2(tx)^2=52 \end{cases}\quad \text{ossia}\quad \begin{cases} 2x^2+3tx^2-t^2x^2=13 \\ 3x^2-tx^2+2t^2x^2=52 \end{cases}$$

e mettendo in evidenza il fattore x^2, si ha il sistema (A') equivalente al sistema dato.

$$(A')\begin{cases} x^2(2+3t-t^2)=13 & \ldots\ (1') \\ x^2(3-t+2t^2)=52 & \ldots\ (2') \end{cases}\qquad (A'')\begin{cases} x^2=\dfrac{13}{2+3t-t^2} & \ldots\ (1'') \\ x^2=\dfrac{52}{3-t+2t^2} & \ldots\ (2'') \end{cases}$$

Escludendo quei valori di t che annullano i fattori $2+3t-t^2$ e $3-t+2t^2$, potremo dividere ambi i membri della $(1')$ per $2+3t-t^2$, ed ambi membri della $(2')$ per $3-t+2t^2$, ed avremo il sistema (A''). Eguagliando questi due valori di x^2, si ottiene l'equazione $\dfrac{13}{2+3t-t^2}=\dfrac{52}{3-t+2t^2}$.

Moltiplicando ambi i membri di quest'equazione per $(2+3t-t^2)(3-t+2t^2)$ che è diverso da zero, perchè tali sono i fattori, si ha l'equazione equivalente:

$$\frac{13}{2+3t-t^2}(2+3t-t^2)(3-t+2t^2)=\frac{52}{3-t+2t^2}(2+3t-t^2)(3-t+2t^2),\qquad \text{ossia}$$

$$13(3-t+2t^2)=52(2+3t-t^2),\quad \text{ossia}\quad 39-13t+26t^2=104+156t-52t^2,$$

$$\text{ossia}\quad 78t^2-169t-65=0\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (\beta)$$

Le radici di quest'equazione sono $t'=5/2$, $t''=-1/3$. Questi due valori di t non annullano nè il polinomio $2+3t-t^2$, nè il polinomio $3-t+2t^2$. Li potremo perciò sostituire a t nella (1″) oppure nella (2″), e ricaveremo così il valore di x.

Sostituendo nella (2″) a t il valore di t', si ottiene:

$$x^2=\frac{52}{3-5/2+2(5/2)^2}=\frac{52}{3-5/2+25/2}=\frac{52}{3+20/2}=\frac{52}{3+10}=4.$$

Da cui: $x=\pm 2$, ossia $x'=+2$, $x''=-2$.

Sostituendo nell'equazione (α) a t il valore t', e poi successivamente i valori di x', x'', e rappresentando con y' ed y'' i corrispondenti valori di y, si ottiene: $y'=t'x'=\frac{5}{2}.2=5$, $y''=t'x''=\frac{5}{2}.(-2)=-5$.

Sostituendo poi nella (2″) a t il valore di t'', si ottiene:

$$x^2=\frac{52}{3-(-1/3)+2(-1/3)^2}=\frac{52}{3+1/3+2/9}=\frac{52}{32/9}=\frac{52.9}{32}=\frac{13.9}{8}=\frac{117}{8}.\ \text{Da cui:}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{117}{8}}=\pm\sqrt{\frac{117.2}{8.2}}=\pm\sqrt{\frac{234}{16}}=\pm\frac{1}{4}\sqrt{2.13.3^2}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{2.13}=$$

$$=\pm\frac{3}{4}\sqrt{26}.\quad \text{Ossia}\quad x'''=+\frac{3}{4}\sqrt{26},\quad x''''=-\frac{3}{4}\sqrt{26}.$$

Sostituendo ora nella equazione $y=tx$ a t il valore t'', e ad x i valori x''' ed x'''', e rappresentando con y''', y'''' i corrispondenti valori di y, si ottiene: $y'''=t''x'''=-\frac{1}{3}.\frac{3}{4}\sqrt{26}=-\frac{1}{4}\sqrt{26}$.

$$y''''=t''x''''=-\frac{1}{3}.\left(-\frac{3}{4}\right)\sqrt{26}=+\frac{1}{4}\sqrt{26}.$$

È facile constatare che le quattro coppie di valori di x e di y verificano le equazioni date.

Risposta. Il sistema ammette le quattro seguenti soluzioni:

$x'=2$, $y'=5$; $x''=-2$, $y''=-5$; $x'''=\frac{3}{4}\sqrt{26}$, $y'''=-\frac{1}{4}\sqrt{26}$; $x''''=-\frac{3}{4}\sqrt{26}$, $y''''=\frac{1}{4}\sqrt{26}$.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1725. $\begin{cases} x^2+y^2=a \\ xy=b. \end{cases}$ **1726.** $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ xy=b. \end{cases}$ **1727.** $\begin{cases} x^2+xy=10 \\ y^2+xy=15. \end{cases}$

1728. $\begin{cases} x^2+xy=66 \\ xy-y^2=5. \end{cases}$ **1729.** $\begin{cases} x^2+3y^2=7/9 \\ 4x^2+2y^2=2. \end{cases}$

1730. $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17 \\ y^2-x^2=16. \end{cases}$ **1731.** $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=24 \\ x^2+3xy-10y^2=32. \end{cases}$

1732. $\begin{cases} x^2+y^2+6xy=153 \\ 2x^2+2y^2-3xy=36. \end{cases}$ **1733.** $\begin{cases} x(x+y)+y(x-y)=158 \\ 7x(x+y)=72x(x-y). \end{cases}$

1734. $\begin{cases} x^2y(x+y)=80 \\ x^2y(2x-3y)=80. \end{cases}$

UNA DELLE EQUAZIONI È DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO.

Generalmente, anche quì si procura di ottenere la somma ed il prodotto delle incognite. Vi si perviene spesso elevando a potenza conveniente ambi i membri d'una delle equazioni, e poi sommando o sottraendo le equazioni a membro a membro. Si cerca inoltre (col mettere in evidenza certi fattori comuni) di far comparire in molti termini la somma o la differenza delle incognite, o le potenze di queste somme o differenze, e poi si sostituiscono a queste i loro valori già conosciuti.

Esempio. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\begin{cases} x^3+y^3=35 \quad \dots \quad (1) \\ x+y=5 \quad \dots \quad (2) \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

1° Metodo. Elevando al cubo ambi i membri della (2), si ottiene:

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=5^3$, ossia $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=125$.

Mettendo ora in evidenza il fattore $3xy$ comune ai due ultimi termini del 1° membro, si ha: $(x^3+y^3)+3xy(x+y)=125$ . . . . (3)

Abbiamo così messo in evidenza x^3+y^3 ed $x+y$. Sostituendo nella (3) questi valori ricavati dalla (1) e dalla (2), si ha $35+3xy.5=125$, ossia $15xy=90$ ossia $xy=6$ . . . . (4)

La (2) dà la somma, e la (4) il prodotto delle incognite. Ci rimarrà quindi a risolvere il sistema (B) il quale ha per soluzione $x'=3$, $y'=2$; $x''=2$, $y''=3$. È facile vedere che questi valori verificano il sistema dato.

Risposta. *Il sistema ha le soluzioni* $x'=3$, $y'=2$; $x''=2$, $y''=3$.

2° Metodo. Il sistema dato si poteva anche risolvere nel seguente modo: Pel teor. 3° § 311 e per la regola del § 312, x^3+y^3 è divisibile per $x+y$, e dà per quoto x^2-xy+y^2. Sarà dunque $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

L'equazione (1) può allora scriversi così: $(x+y)(x^2-xy+y^2)=35$.

Sostituendo in quest'equazione ad $x+y$ il suo valore 5 dato dalla (2), si ottiene: $5(x^2-xy+y^2)=35$, ossia $x^2-xy+y^2=7$ . . . . (5)

Siamo così ridotti a risolvere il sistema (C).

$$(C)\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \quad \dots \quad (5) \\ x+y=5 \quad \dots \quad (2) \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Eleviamo ora al quadrato ambi i membri della (2), ed otteniamo:

$x^2+2xy+y^2=25$. . . . . (6)

Sottraendo a membro a membro la (5) dalla (6), si ottiene:

$3xy=18$, ossia $xy=6$ . . . . (7)

La (2) dà la somma, e la (7) dà il prodotto delle incognite; e siamo così ridotti alla soluzione del sistema (B) che è quello ottenuto col 1° metodo.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1735. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^3-y^3=98. \end{cases}$ **1736.** $\begin{cases} x^3-y^3=39(x-y) \\ x^3+y^3=19(x+y). \end{cases}$ *

* Si dividano ambi i membri della 1ª per $x-y$, ed ambi i membri della 2ª per $x+y$.

1737. $\begin{cases} x^3y+y^3x=290 \\ x^2+y^2=29. \end{cases}$ * 1738. $\begin{cases} x^4+x^2y=16 \\ 2x^2-x^2y=8. \end{cases}$ **

1739. $\begin{cases} x^5-y^5=2882 \\ x-y=2. \end{cases}$ *** 1740. $\begin{cases} x^5+y^5=1056 \\ x+y=6. \end{cases}$

1741. $\begin{cases} 4(x^4+y^4)=17x^2y^2 \\ x+y=9. \end{cases}$ **** 1742. $\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=73 \\ x-y=-2. \end{cases}$ *****

1743. $\begin{cases} x^2y^2+xy=a \\ x+y=b. \end{cases}$ ****** 1744. $\begin{cases} x^3+y^3=a \\ x+y=b. \end{cases}$

SISTEMI DI n EQUAZIONI CON n INCOGNITE.

UNA SOLA EQUAZIONE È DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO.

Considereremo due casi particolari.

1° CASO. Le $n-1$ equazioni di 1° grado contengono solamente $n-1$ incognite.

Si risolve il sistema formato dalle $n-1$ equazioni con $n-1$ incognite, e si ottengono i valori di queste $n-1$ incognite. Sostituendo questi valori nell'equazione di grado superiore al 1°, si ottiene un'equazione ad una sola incognita, la quale somministra il valore di questa incognita.

Esempio. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\begin{cases} 2x^2-xy+y^2-z^2+3t^2=43 & \ldots\ldots (1) \\ 2x-3y+z=-1 & \ldots\ldots (2) \\ x+y-5z=-12 & \ldots\ldots (3) \\ 3x-5y-2z=-13 & \ldots\ldots (4) \end{cases}$$

Il sistema formato dalle equazioni (2), (3), (4) ha per radici $x=1$, $y=2$, $z=3$. Sostituendo questi valori di x, y, z nella (1), si ottiene $t=\pm4$. I valori trovati soddisfano tutti al sistema dato.

Risposta. Le soluzioni del sistema sono: $x'=1$, $y'=2$, $z'=3$, $t'=4$; *ed* $x''=1$, $y''=2$, $z''=3$, $t''=-4$.

2° CASO. Le $n-1$ equazioni di 1° grado contengono tutte le n incognite.

Si risolve il sistema delle $n-1$ equazioni di 1° grado, supponendo noto il valore d'un'incognita scelta ad arbitrio, p.e. della z. Si hanno così i valori delle altre $n-1$ incognite in funzione di z. Sostituendo questi valori nell'equazione di grado superiore al 1°, si ottiene un'equazione avente la sola incognita z. Quest'equazione ci darà il valore di z; trovato il quale, si troveranno poi facilmente i valori di tutte le altre incognite.

Esempio. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\begin{cases} 2x+3y-5z=-13 & \ldots\ldots (1) \\ x+4y+3z=26 & \ldots\ldots (2) \\ 3x^2+2y^2-2yz=15 & \ldots\ldots (3) \end{cases}$$

* Si metta nella 1ª equazione in evidenza il fattore xy.

** Si sommi, e si prenda per incognita x^2.

*** Si sottragga a membro a membro dalla 1ª equazione la 5ª potenza dei membri della 2ª equazione, e poi si trovi anche il valore di x^3-y^3 elevando al cubo ambi i membri della 2ª equazione.

**** Si cominci con elevare alla 4ª potenza ambi i membri della 2ª equazione.

***** Dalla 2ª equazione si ricavi il valore di x^2+y^2, e poi lo si elevi al quadrato.

****** Si ponga $xy=z$, e si cominci col risolvere la 1ª equazione.

Risolviamo il sistema formato dalla (1) e dalla (2) supponendo noto il valore di z, ed otteniamo: $x=\frac{29z-130}{5}$, $y=\frac{65-11z}{5}$ . . . . . . (α)

Sostituendo questi valori di x e di y nella (3), e facendo tutte le riduzioni, si ottiene l'equazione: $575z^2-5226z+11755=0$ . . . . . . (3')

la quale è di 2° grado in z, e dà per z i valori $z'=5$; $z''=\frac{2351}{575}$.

Sostituendo nella (α) il valore di z', si ottiene $x'=3$, $y'=2$. Dunque $x'=3$, $y'=2$, $z'=5$ sono una soluzione del sistema (A).

Sostituendo nella (α) il valore di z'', si ottiene: $x''=-\frac{6571}{2875}$, $y''=\frac{11514}{2875}$.

Dunque $x''=-\frac{6571}{2875}$, $y''=\frac{11514}{2875}$, $z''=\frac{2351}{575}$ sono un'altra soluzione del sistema (A). Provando, si trova che tutte queste radici verificano il sistema (A).

Risposta. Il sistema dato ammette le radici $x'=3$, $y'=2$, $z'=5$; *ed* $x''=-\frac{6571}{2875}$, $y''=\frac{11514}{2875}$, $z''=\frac{2351}{575}$.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1745. $\begin{cases} 4x-11y=9 \\ 2x+3y=13 \\ x^2-y^2+3z^2=36. \end{cases}$ **1746.** $\begin{cases} xy+3yz=56 \\ 3x+2y=23 \\ 5y-2x=29. \end{cases}$

1747. $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-y=16 \\ x^2+2xy-z^2=80. \end{cases}$ **1748.** $\begin{cases} 3x+4y=3 \\ xy=z \\ x+y=8. \end{cases}$

1749. $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ xy=1 \\ x+y=z. \end{cases}$ **1750.** $\begin{cases} x-y=7\sqrt{5} \\ xy=z^2 \\ x+y=3z. \end{cases}$

1751. $\begin{cases} 11x+7y=108+12\sqrt{5} \\ xy=z^2 \\ x+y=3z. \end{cases}$ **1752.** $\begin{cases} 3x^2-2y^2=43 \\ 5x+3z=34 \\ 4y-5z=1. \end{cases}$

1753. $\begin{cases} \frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2} \\ 5xz+2y=z^2+3xy+4x. \end{cases}$ **1754.** $\begin{cases} x+y=a \\ z+x=b \\ x^2=y^2+z^2. \end{cases}$

NEL SISTEMA VI È PIÙ DI UNA EQUAZIONE DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO.

Ci contenteremo di esaminare il caso in cui vi sono tre sole equazioni ed in cui da due di esse si può facilmente, sia esplicitamente, sia in funzion d'una incognita, ricavare il valore della somma e del prodotto delle altr due incognite. Trovato il valore della somma e del prodotto di due incognite si scrive un'equazione di 2° grado ad un'incognita che abbia per radici valori delle incognite di cui si tratta. I valori così trovati si sostituiscon in un'equazione del sistema dato, e si ha un'equazione ad una sola inco gnita, la cui soluzione (nei casi che considereremo) non presenta difficoltà

Esempio. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\ \begin{cases} x+y+z=36 & \ldots (1) \\ xy=108 & \ldots (2) \\ x^2+y^2=z^2 & \ldots (3) \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} x+y=36-z & \ldots (1') \\ xy=108 & \ldots (2) \\ x^2+y^2=z^2 & \ldots (3) \end{cases}$$

La (1) può scriversi così: $x+y=36-z$ . . . . (1′)
ed il sistema (A) prende la forma (B). La (1′) dà la somma $x+y$ in funzione di z, e la (2) dà il prodotto xy. Potremo perciò scrivere un'equazione di 2° grado ad un'incognita che abbia per radici i valori di x e di y.

Rappresentando con t l'incognita di quest'equazione, essa si potrà scrivere:

$$t^2-(36-z)t+108=0 \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

la quale dà: $t=\dfrac{36-z\pm\sqrt{(36-z)^2-4.108}}{2}=\dfrac{36-z}{2}\pm\dfrac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}$.

Ossia: $t'=\dfrac{36-z}{2}+\dfrac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}$, $\quad t''=\dfrac{36-z}{2}-\dfrac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}$.

Potremo porre indifferentemente $t'=x$, $t''=y$; oppure $t''=x$, $t'=y$, perchè il sistema dato non muta quando si mette x al posto di y, ed y al posto di x. Poniamo p.e. $t'=x$, $t''=y$, ed avremo:

$$x=\frac{36-z}{2}+\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2} \quad \ldots (4) \qquad y=\frac{36-z}{2}-\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2} \quad \ldots (5)$$

Sostituendo questi valori di x e di y nella (3), si ottiene l'equazione:

$$\left(\frac{36-z}{2}+\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}\right)^2+\left(\frac{36-z}{2}-\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}\right)^2=z^2, \quad \text{ossia}$$

$$\left(\frac{36-z}{2}\right)^2+2.\frac{36-z}{2}\cdot\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}+\frac{(36-z)^2-432}{4}+$$

$$+\left(\frac{36-z}{2}\right)^2-2.\frac{36-z}{2}\cdot\frac{\sqrt{(36-z)^2-432}}{2}+\frac{(36-z)^2-432}{4}=z^2, \quad \text{ossia}$$

$$2.\left(\frac{36-z}{2}\right)^2+2.\frac{(36-z)^2-432}{4}=z^2, \quad \text{ossia} \quad \frac{(36-z)^2}{2}+\frac{(36-z)^2-432}{2}=z^2,$$

$$\text{ossia} \quad 72z-1080=0, \quad \text{ossia} \quad z-15=0 \quad \ldots\ldots (\beta)$$

la quale dà $z=15$.

Sostituendo questo valore di z nella (4) e nella (5), si ottiene:

$$x=\frac{36-15}{2}+\frac{\sqrt{(36-15)^2-432}}{2}=\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{21^2-432}}{2}=\frac{21}{2}+\frac{\sqrt{9}}{2}=12.$$

$$y=\frac{36-15}{2}-\frac{\sqrt{(36-15)^2-432}}{2}=\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{21^2-432}}{2}=\frac{21}{2}-\frac{\sqrt{9}}{2}=9.$$

Avremo quindi $x'=12$, $y'=9$, $z'=15$.

Ma avremmo potuto mettere $t'=y$, e $t''=x$; ed allora, corrispondentemente al medesimo valore $z=15$, si avrebbe avuto $x''=9$, $y''=12$. Verificando, si vede che i due sistemi di radici soddisfano entrambi al sistema dato.

Risposta. *Il sistema dato ammette le due soluzioni* $x'=12$, $y'=9$, $z'=15$; ed $x''=9$, $y''=12$, $z''=15$.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1755. $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ xy=z \\ x+y=8. \end{cases}$ 1756. $\begin{cases} x^2-y^2=48 \\ xy=z \\ x+y=8. \end{cases}$ 1757. $\begin{cases} x^2+y^2=24 \\ xy=6 \\ x+y=z. \end{cases}$

1758. $\begin{cases} x^2-y^2=35 \\ xy=6 \\ x+y=z. \end{cases}$ 1759. $\begin{cases} x^2+y^2=28 \\ xy=z^2 \\ x+y=3z. \end{cases}$ 1760. $\begin{cases} x^3+y^3=108 \\ xy=z^2 \\ x+y=6z. \end{cases}$

1761. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+y+z=84 \\ xy=588. \end{cases}$ 1762. $\begin{cases} x+y+z=29 \\ x^2+y^2+z^2=289 \\ xy=72. \end{cases}$

1763. $\begin{cases} x+y+z=132 \\ x^2=y^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2=6050. \end{cases}$ *

LE EQUAZIONI DEL SISTEMA SONO FRAZIONARIE.

Esamineremo solamente alcuni casi particolari.

Esempio 1º. Si risolva il sistema (I).

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=3 \end{cases}$$

Per liberare le equazioni dai denominatori col metodo ordinario, dovremmo moltiplicare tutti i termini di ciascuna equazione per il prodotto xyz, ed otteremmo il sistema (II), le cui equazioni sono di 3º grado in x, y, z.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} yz+xz+xy=4xyz \\ yz-xz+xy=7xyz \\ yz-xz-xy=3xyz \end{cases} \qquad \text{(III)} \quad \begin{cases} x'+y'+z'=4 \quad . \quad . \quad (1) \\ x'-y'+z'=7 \quad . \quad . \quad (2) \\ x'-y'-z'=3 \quad . \quad . \quad (3) \end{cases}$$

Ci conviene perciò tenere quest'altra via: Poniamo $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, ed il sistema dato si trasforma nel sistema (III). Questo sistema si risolve facilmente secondo le regole generali; e ci dà, sommando a membro a membro la (1) colla (3), $2x'=7$; da cui: $x'={}^7/_2$.

Sommando poi a membro a membro la (2) colla (1), otteniamo: $2x'+2z'=11$; e, ponendo in luogo di $2x'$ il suo valore $2x'=7$, si ottiene:

$$7+2z'=11, \quad \text{ossia} \quad 2z'=4; \quad \text{da cui:} \quad z'=2.$$

Ponendo nella (1) in luogo di x' e di z' i loro valori, si ottiene:

$\frac{7}{2}+y'+2=4$, ossia $y'=4-2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2}$. Abbiamo dunque:

$x'={}^7/_2$, $y'=-{}^3/_2$, $z'=2$.

---

* Si cominci a sottrarre a membro a membro la 2ª equazione dalla 3ª.

Ricordando ora che abbiamo posto $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, abbiamo:
$\frac{1}{x}=\frac{7}{2}$, $\frac{1}{y}=-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{z}=2$; da cui:

Risposta. $x=\frac{2}{7}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{1}{2}$.

Esempio 2°. *Si risolva il sistema* (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=5 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=9 \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} 3x'-4y'=5 \\ 2x'+y'=9 \end{cases}$$

Poniamo anche quì $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, ed il sistema (I) si trasforma nel sistema (II) che, risolto coi metodi ordinari, dà $x'=\frac{41}{11}$, $y'=\frac{17}{11}$.

Essendo $\frac{1}{x}=x'$, ed $\frac{1}{y}=y'$, si ha: $\frac{1}{x}=\frac{41}{11}$, $\frac{1}{y}=\frac{17}{11}$, da cui:

Risposta. $x=\frac{11}{41}$, $y=\frac{11}{17}$.

Esempio 3°. *Si risolva il sistema* (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} \frac{4}{3x}-\frac{5}{2y}+\frac{1}{z}=-7 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{3}{5z}=6\frac{2}{5} \\ \frac{3}{4x}+\frac{4}{5y}+\frac{2}{5z}=4\frac{29}{40} \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} \frac{4}{3}x'-\frac{5}{2}y'+z'=-7 \\ 2x'+y'-\frac{3}{5}z'=6\frac{2}{5} \\ \frac{3}{4}x'+\frac{4}{5}y'+\frac{2}{5}z'=4\frac{29}{40} \end{cases}$$

Poniamo $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, ed il sistema (I) si trasforma nel sistema (II) che si risolverà secondo le regole ordinarie. Eliminiamo prima i denominatori moltiplicando tutti i termini della 1ª equazione per 6, tutti quelli della 2ª per 5, e tutti quelli della 3ª per 40, ed otteniamo il sistema (III) equivalente al sistema (II).

$$\text{(III)} \begin{cases} 8x'-15y'+6z'=-42 \\ 10x'+5y'-3z'=32 \\ 30x'+32y'+16z'=189 \end{cases}$$

Questo sistema ci dà i valori $x'=\frac{3}{2}$, $y'=4$, $z'=1$; e poichè è $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$, avremo: $\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$, $\frac{1}{y}=4$, $\frac{1}{z}=1$; da cui:

Risposta. $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=1$.

Esempio 4°. *Si risolva il sistema* (I).

$$
\text{(I)}\quad \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{4y} + \dfrac{2}{3z} = 10\dfrac{7}{36} \\[2mm] 3x + \dfrac{1}{y} - \dfrac{5}{2z} = 4\dfrac{2}{3} \\[2mm] 2x + \dfrac{4}{3y} + \dfrac{1}{3z} = 4\dfrac{2}{3} \end{cases}
\qquad\qquad
\text{(II)}\quad \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{4}y' + \dfrac{2}{3}z' = 10\dfrac{7}{36} \\[2mm] 3x + y' - \dfrac{5}{2}z' = 4\dfrac{2}{3} \\[2mm] 2x + \dfrac{4}{3}y' + \dfrac{1}{3}z' = 4\dfrac{2}{3} \end{cases}
$$

Poniamo $\dfrac{1}{y} = y'$, $\dfrac{1}{z} = z'$, ed otterremo il sistema (II). Risolvendo questo sistema, si ottiene: $x = 2$, $y' = \dfrac{1}{3}$, $z' = \dfrac{2}{3}$. Per cui la soluzione del sistema proposto sarà:

Risposta. $x = 2$, $y = 3$, $z = 3/2$.

Si risolvano i seguenti sistemi di equazioni:

1764. $\begin{cases} x + y = 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$ *

1765. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \\ x + y = 2. \end{cases}$

1766. $\begin{cases} xy = a^2 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{b}. \end{cases}$

1767. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}. \end{cases}$

1768. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \dfrac{25}{7} \\ xy = 48. \end{cases}$

1769. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 90. \end{cases}$

1770. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{15}. \end{cases}$

1771. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = m \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = n. \end{cases}$ **

1772. $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-2y+1} + \dfrac{1}{x+2y-3} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x+2y-3} - \dfrac{1}{3x-2y+1} = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$ ***

1773. $\begin{cases} \dfrac{3}{ax+by} + \dfrac{2}{by+cz} = 2 \\ \dfrac{3}{by+cz} + \dfrac{4}{cz+ax} = \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{2}{cz+ax} + \dfrac{3}{ax+by} = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$ ****

1774. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{12}{5} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{18}{5} \\ \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{36}{13}. \end{cases}$ *****

---

* Si eseguisca l'operazione $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, e poi si sostituisca il valore di $x+y$.

** Si ponga p.e. $x-y = u$, $x+y = t$, considerando t, u come incognite ausiliarie.

*** Si ponga $x+2y-3 = u$, $3x-2y+1 = t$.

**** Si ponga $\dfrac{1}{ax+by} = t$, $\dfrac{1}{by+cz} = u$, $\dfrac{1}{cz+ax} = v$.

***** Si cominci con applicare il principio che se due frazioni sono eguali fra loro, le loro inverse sono pure eguali fra loro.

1775. $\begin{cases} \dfrac{xy}{5x+4y}=6 \\ \dfrac{xz}{3x+2z}=8 \\ \dfrac{yz}{3y+5z}=6. \end{cases}$ . . 1776. $\begin{cases} \dfrac{xy}{ay+bx}=c \\ \dfrac{xz}{az+cx}=b \\ \dfrac{yz}{bz+cy}=a. \end{cases}$

Equazioni esponenziali

EQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLVIBILI SENZA FAR USO DELLE TAVOLE LOGARITMICHE.

Alcune equazioni esponenziali si possono facilmente risolvere senza far uso delle tavole logaritmiche. A tal fine giova:

1°. Far uso del teor. 5° del § 194 il quale dice che se due potenze d'egual base sono eguali, sono pure eguali gli esponenti.

2°. Introdurre un'incognita ausiliaria, e ciò specialmente quando l'incognita compare ad esponente in vari termini di un polinomio.

Osservazione. Sarà sempre sottinteso che si tratta di logaritmi decimali, e che le espressioni algebriche di cui si prendono i logaritmi sono tutte positive. Risolveremo alcuni facili esempi.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $(5^{2-x})^{(x+3)}=1$.

L'equazione data si può scrivere: $5^{(2-x)(x+3)}=1$; e poichè $5^0=1$, potremo ancora scrivere: $5^{(2-x)(x+3)}=5^0$. Avendo l'eguaglianza di due potenze d'egual base, si avranno eguali gli esponenti, ossia si avrà: $(2-x)(x+3)=0$, la qual equazione ha evidentemente per radici: $x'=2$, $x''=-3$.

Risposta. ***L'equazione data ha le due radici*** $x'=2$, $x''=-3$.

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $5^{x+3}+25^{x+1}=406250$.

Scrivendo 5^2 al posto di 25, avremo: $25^{x+1}=5^{2(x+1)}=5^{2x+2}=5^{2x}.5^2=$ $=25.5^{2x}=25.(5^x)^2$. Similmente avremo: $5^{x+3}=5^x.5^3=125.5^x$. L'equazione data può allora scriversi così: $125.5^x+25.(5^x)^2=406250$ . . . (α)

Prendiamo per incognita ausiliaria 5^x, e poniamo $5^x=y$ . . . . (β)

Allora l'equazione (α) prende la forma $125y+25y^2=406250$, ossia $25y^2+125y-406250=0$, ossia (dividendone tutti i termini per 25) $y^2+5y-16250=0$, le cui radici sono: $y'=125$, $y''=-130$.

Sostituendo nella (β) il valore di y', si ha $5^x=125$, ossia $5^x=5^3$, da cui $x=3$. Evidentemente il valore di y'' (essendo negativo) non può soddisfare all'equazione (α), e quindi neppure all'equazione data.

Risposta. ***L'equazione data ha la sola soluzione*** $x=3$.

Esempio 3°. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\begin{cases} a^x.a^{5y}=a^{22} & \ldots (1) \\ a^{7x}:a^6=a^{2y} & \ldots (2) \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} a^{7x}.a^{35y}=a^{22\cdot 7} & \ldots (1') \\ a^{7x}=a^{2y}.a^6 & \ldots (2') \end{cases}$$

Moltiplicando ambi i membri della (2) per a^6, si ha l'equazione:

$$a^{7x} = a^{2y}.a^6 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2')$$

Eleviamo ora ambi i membri della (1) alla 7ª potenza, ed avremo:

$$(a^x.a^{5y})^7 = (a^{22})^7, \quad \text{ossia} \quad a^{7x}.a^{35y} = a^{22\cdot 7} \quad . \; . \; . \; . \quad (1')$$

Siamo così ridotti alla risoluzione del sistema (B). Per risolverlo, sostituiamo nella (1') il valore di a^{7x} dato dalla (2'), ed otterremo l'equazione $a^{2y}.a^6.a^{35y} = a^{22\cdot 7}$; e dividendo ambi i membri per a^2, si avrà: $a^{2y}.a^3.a^{35y} = a^{11\cdot 7}$, ossia $a^{2y+3+35y} = a^{77}$, ossia $a^{37y+3} = a^{77}$ . . . (3)

La (3) dà immediatamente $37y+3 = 77$, da cui $y = 2$. Sostituendo questo valore di y nella (1), si ha: $a^x.a^{5\cdot 2} = a^{22}$, ossia $a^x.a^{10} = a^{22}$, ossia $a^{x+10} = a^{22}$. Da cui $x+10 = 22$, ossia $x = 22-10 = 12$.

*Risposta. **Il sistema dato ha per soluzione*** $x = 12$, $y = 2$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1777. $(a^x)^x = (a^8)^2$. **1778.** $(a^x)^2 = (a^x)^x$. **1779.** $5^{x^2-3x} = 5^4$.

1780. $7^{x^2-5x+9} = 7^3$. **1781.** $(a^{b-x})^x = a^x$. **1782.** $(4^{3-x})^{2-x} = 1$.

1783. $x^{x^2-7x+12} = x^0$. **1784.** $(10^{5-x})^{6-x} = 10^6$. **1785.** $\sqrt[x]{a} = a^x$. *

1786. $100.10^x = \sqrt[x]{1000^5}$. **1787.** $2^x + 4^x = 272$. **1788.** $2^{x+1} + 4^x = 80$.

1789. $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$. **1790.** $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$.

1791. $5^{2x} - 7.5^x - 450 = 0$. **1792.** $5.3^{2x} - 7.3^x - 3456 = 0$.

1793. $2.5^x - \frac{779375}{5^x} - 3 = 0$. ** **1794.** $3^{x+1} + 3^{x-2} - \frac{15}{3^{x-1}} = \frac{247}{3^{x-2}}$. ***

1795. $3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$. ****

1796. $(a^{5x+1})^5 = (a^{7x-1})^7 : (a^{x-6})^9$. **1797.** $\sqrt[3+x]{a^{20}} = a^5$.

1798. $c^3\sqrt[x]{c^{7+5x}} = \sqrt[x]{c^{23}}$. **1799.** $a^{-\frac{1}{2}-x}a^{-\frac{3}{4}} = 1 : a^{-\frac{5}{6}}$.

1800. $\sqrt{a^{3-4x}} : \sqrt[5]{a^{6-7x}} = \sqrt[8]{a^{9-10x}}$. **1801.** $\dfrac{\sqrt[a-x]{m^{b+x}}}{\sqrt[a+x]{m^{b-x}}} = \sqrt[a^2-x^2]{m^2}$.

1802. $\begin{cases} a^x a^{5y} = a^{28} \\ a^{7x} : a^6 = a^{3y}. \end{cases}$ **1803.** $\begin{cases} \sqrt[x]{a} \cdot \sqrt[y]{a} = \sqrt[12]{a^7} \\ \sqrt[x]{a^3} : \sqrt[y]{a^4} = 1. \end{cases}$

1804. $\begin{cases} \sqrt[x+1]{a^3} \cdot a^{y+2} = \sqrt[4]{a^{27}} \\ \sqrt[x+1]{a^7} : a^{y-5} = a^2\sqrt[4]{a^3}. \end{cases}$ **1805.** $\begin{cases} a^x a^y a^z = a^3 \\ a^x a^{-y} a^z = a \\ a^x a^y a^{-z} = a. \end{cases}$

1806. $\begin{cases} a^x b^y = c \\ m^x n^y = p. \end{cases}$ **1807.** $\begin{cases} 10^{3x}.10^{5y} = 10^{11} \\ 10^{2x}.10^{-y} = 10. \end{cases}$ **1808.** $\begin{cases} a^x b^y c^z = m \\ a^{-x} b^y c^z = n \\ a^x b^{-y} c^z = p. \end{cases}$

---

* Si faccia uso dell'esponente frazionario.

** Si prenda per incognita ausiliaria $5^x = y$.

*** Si ricordi che $3^{x-2} = 3^x : 3^2 = \frac{3^x}{3^2}$.

**** Nel 1º membro si metta in evidenza il fattor comune 3^{x-4}.

EQUAZIONI ESPONENZIALI DA RISOLVERSI FACENDO USO DELLE TAVOLE LOGARITMICHE.

Per risolvere le equazioni esponenziali che ora studieremo, basterà, ordinariamente, prendere il logaritmo d'ambi i membri dell'equazione, una o più volte successivamente; e si arriverà ad un'equazione di 1° o di 2° grado che si saprà risolvere. Si osservi però che per poter (quando si prendono i logaritmi d'ambi i membri) far uso dei teoremi dei §§ 226, 227, 228, 229, bisogna che i due membri dell'equazione siano monomi.

Esempio 1°. Si risolva l'equazione: $3{,}52^x = 15$.

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha: $\log 3{,}52^x = \log 15$, ossia $x \log 3{,}52 = \log 15$, ossia $x = \frac{\log 15}{\log 3{,}52} = \frac{1{,}17609}{0{,}54654} = 2{,}15188$.

Risposta. $x = 2{,}15188$.

Esempio 2°. Si risolva l'equazione: $7{,}28^{2x-1} = 3$.

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha: $\log 7{,}28^{2x-1} = \log 3$, ossia $(2x-1)\log 7{,}28 = \log 3$, ossia $2x-1 = \frac{\log 3}{\log 7{,}28} = \frac{0{,}47712}{0{,}86213} = 0{,}55342$; da cui: $2x = 1{,}55342$, ed $x = \frac{1{,}55342}{2} = 0{,}77671$.

Risposta. $x = 0{,}77671$.

Esempio 3°. Si risolva l'equazione: $100^{x^2+2x-0{,}855} = 6{,}166$.

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha:
$\log 100^{x^2+2x-0{,}855} = \log 6{,}166$, ossia $(x^2+2x-0{,}855)\log 100 = \log 6{,}166$, ossia $x^2+2x-0{,}855 = \frac{\log 6{,}166}{\log 100} = \frac{0{,}79}{2} = 0{,}395$, ossia $x^2+2x-0{,}855-0{,}395 = 0$, ossia $x^2+2x-1{,}25 = 0$.

Risolvendo quest'equazione di 2° grado in x, si ha:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+1{,}25.4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-2 \pm 3}{2};$$ da cui:
$x' = 1/2$, $x'' = -5/2$.

Risposta. I due valori cercati sono $x' = 1/2$, $x'' = -5/2$.

Esempio 4°. Si risolva l'equazione: $a^{c^x} = b$ . . . . (1)

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha: $c^x \log a = \log b$ . . (2)

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri della (2), si ha:
$\log [c^x \log a] = \log \log b$, ossia $\log c^x + \log \log a = \log \log b$, ossia $x \log c + \log \log a = \log \log b$, ossia $x \log c = \log \log b - \log \log a$. Da cui:

Risposta. $x = \frac{\log \log b - \log \log a}{\log c}$.

Esempio 5°. Si risolva l'equazione: $a^{b^{c^{d^x}}} = m$ . . . . (1)

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha:

og $a^{b^{c^{d^x}}} = \log m$, ossia $b^{c^{d^x}} \log a = \log m$, ossia $b^{c^{d^x}} = \frac{\log m}{\log a}$ . . . (2)

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri della (2), si ha:

$$\log b^{c^{d^x}} = \log \frac{\log m}{\log a}, \quad \text{ossia} \quad c^{d^x} \log b = \log\log m - \log\log a, \quad \text{ossia}$$

$$c^{d^x} = \frac{\log\log m - \log\log a}{\log b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Prendiamo ora il logaritmo d'ambi i membri della (3), ed otterremo:

$$\log c^{d^x} = \log \frac{\log\log m - \log\log a}{\log b}, \quad \text{ossia}$$

$$d^x \log c = \log(\log\log m - \log\log a) - \log\log b, \quad \text{ossia}$$

$$d^x = \frac{\log(\log\log m - \log\log a) - \log\log b}{\log c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Prendiamo ora il logaritmo d'ambi i membri della (4), ed avremo:

$$\log d^x = \log \frac{\log(\log\log m - \log\log a) - \log\log b}{\log c}, \quad \text{ossia}$$

$x \log d = \log[\log(\log\log m - \log\log a) - \log\log b] - \log\log c$. Da cui:

Risposta. $$x = \frac{\log[\log(\log\log m - \log\log a) - \log\log b] - \log\log c}{\log d}.$$

Esempio 6°. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A) \begin{cases} 3^x.4^y = 3981312 & . \ . \quad (1) \\ 5^x.2^y = 400000 & . \ . \quad (2) \end{cases} \qquad (A') \begin{cases} 3^x.2^{2y} = 3981312 & . \ . \quad (1') \\ 5^x.2^y = 400000 & . \ . \quad (2) \end{cases}$$

Poichè 4 non è un numero primo, ci conviene scomporlo in fattori primi, ed invece di scrivere 4^y ci è utile scrivere $(2^2)^y$, ossia 2^{2y}.

Allora il sistema (A) si può scrivere sotto la forma (A').

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri delle due equazioni, si ha:

Dalla (1'): $\log(3^x.2^{2y}) = \log 3981312$, ossia $\log 3^x + \log 2^{2y} = \log 3981312$, ossia $x\log 3 + 2y\log 2 = \log 3981312$ . . . . (1″)

Dalla (2): $\log(5^x.2^y) = \log 400000$, ossia $\log 5^x + \log 2^y = \log 400000$, ossia $x\log 5 + y\log 2 = \log 400000$ . . . (2')

Siamo così ridotti a risolvere il sistema (A''):

$$(A'') \begin{cases} x\log 3 + 2y\log 2 = \log 3981312 & . \ . \ . \ . \quad (1'') \\ x\log 5 + \ \ y\log 2 = \log 400000 & . \ . \ . \ . \quad (2') \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, moltiplichiamo ambi i membri della (2') per 2, ed avremo l'equazione: $2x\log 5 + 2y\log 2 = 2\log 400000$ . . . (3)

Sottraendo la (1″) a membro a membro dalla (3), si ha l'equazione:

$$2x\log 5 - x\log 3 = 2\log 400000 - \log 3981312, \quad \text{ossia}$$

$$x(2\log 5 - \log 3) = 2\log 400000 - \log 3981312, \quad \text{ossia}$$

$$x = \frac{2\log 400000 - \log 3981312}{2\log 5 - \log 3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Prendendo adesso i logaritmi di questi numeri, si ha:

$2\log 400000 - \log 3981312 = 4{,}60410$. E $2\log 5 - \log 3 = 0{,}92082$.

La (α) prende allora la forma: $x = \frac{4{,}60410}{0{,}92082} = 5$.

Sostituendo questo valore di x nella (2), si ha: $5^5.2^y = 400000$, ossia

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4.100000}{5^5} = \frac{4.10^5}{5^5} = \frac{4.(2.5)^5}{5^5} = \frac{4.2^5.5^5}{5^5} = 4.2^5 = 2^2.2^5 = 2^7.$$

Si ha perciò $2^y = 2^7$; da cui $y = 7$. È facile verificare che $x = 5$, $y = 7$ soddisfano al sistema (A).

Risposta. Il sistema dato ha per soluzione $x = 5$, $y = 7$.

Osservazione. In questo caso speciale, potevamo anche risolvere il sistema dato nel seguente modo. Scomponendo 3981312 e 400000 nei loro fattori primi, si trova $3981312 = 3^5.2^{14} = 3^5.2^{2\cdot 7}$ e $400000 = 5^5.2^7$; ed il sistema (A') si può scrivere sotto la forma (A'''):

$$(A''') \begin{cases} 3^x.2^{2y} = 3^5.2^{2\cdot 7} & \dots\dots\dots (1''') \\ 5^x.2^y = 5^5.2^7 & \dots\dots\dots (2''') \end{cases}$$

Dal sistema (A''') risulta immediatamente $x = 5$, $y = 7$.

Si risolvano le seguenti equazioni, ed i seguenti sistemi di equazioni:

1809. $2^x = 5$. **1810.** $2^x = 7$. **1811.** $10^x = 3{,}14159$. **1812.** $(5/7)^x = 9/11$.

1813. $a^x = b$. **1814.** $\sqrt[x]{a} = b$. **1815.** $a^x = bc$. **1816.** $a^x b^{2x} = m$.

1817. $a^{-x} = b$. **1818.** $a^{-\frac{3}{x}} = b$. **1819.** $a^{x+m} = b^{x+n}$.

1820. $a^{x-m} = b^{x-n}$. **1821.** $3^{\frac{x}{2}} = 768$. **1822.** $24^{3x-2} = 10000$.

1823. $2^{x^2-9x-24} = 4096$. **1824.** $6^{x^4-18x^2-86} = 7776$.

1825. $7^{2x} - 6.7^x + 5 = 0$. * **1826.** $3^{2x}.5^{2x-3} = 7^{x-1}.4^{x+3}$.

1827. $3.2^{x+3} = 192.3^{x-3}$. **1828.** $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \dfrac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$.

1829. $3^{\sqrt{x}} = 243$. **1830.** $\sqrt[x]{a} = b$. **1831.** $\sqrt[x+1]{2} = 3^{x+2}$.

1832. $\sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[x+1]{3} \cdot \sqrt[x+2]{4} = 1$. **1833.** $3^{5^x} = 7$. **1834.** $ma^x + na^{-x} = p$. **

1835. $\begin{cases} 7^x.2^y = 128 \\ 3^y.14^x = 100. \end{cases}$ **1836.** $\begin{cases} 5^{3x-2y} = 3125 \\ 11^{6x-7y} = 14641. \end{cases}$

1837. $\begin{cases} (64)^{\frac{1}{x}} . 3^y = 36 \\ (1728)^{\frac{1}{x}} . 5^y = 300. \end{cases}$ **1838.** $\begin{cases} 5^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{y}} = 1 \\ (4{,}92)^{\frac{1}{x}} : (1{,}23)^{\frac{1}{y}} = 4. \end{cases}$

1839. $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = [(2/3)^x]^2. \end{cases}$ **1840.** $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ 3^x(x+y) = 279936. \end{cases}$ ***

1841. $\begin{cases} 2^x.3^y = 18 \\ 4^x.5^z = 400 \\ 6^y.7^z = 12348. \end{cases}$

---

* Si prenda per incognita ausiliaria $y = 7^x$.

** Si moltiplichino ambi i membri per a^x, e poi si prenda per incognita ausiliaria $y = a^x$.

*** Si sostituisca nella 2^a equazione il valore $x+y$ ricavato dalla 1^a.

Equazioni logaritmiche.

Per risolvere le equazioni logaritmiche che noi considereremo, basterà:

1°. Far uso della definizione di logaritmo (§ 224).

2°. Far uso dei teoremi (dei §§ 226, 227, 228, 229) che danno il valore del logaritmo d'un prodotto, d'un quoto, d'una potenza, d'un radicale aritmetico.

3°. Far uso del teorema 6° del § 225, il quale dice che se due logaritmi sono eguali, sono pure eguali le espressioni di cui si sono presi i logaritmi.

4°. Se il logaritmo dell'incognita compare ad esponente, si dà a ciascun membro dell'equazione la forma di monomio; e poi si prende il logaritmo d'ambi i membri dell'equazione.

Osservazione. È sottinteso che si parla sempre di logaritmi decimali. Poichè i numeri negativi e gli immaginari non hanno logaritmo reale, affinchè le soluzioni trovate siano soluzioni dell'equazione proposta, è necessario che sostituendo poi queste soluzioni all'incognita nell'equazione, le quantità di cui nell'equazione si prende il logaritmo siano numeri *reali, positivi.*

EQUAZIONI LOGARITMICHE RISOLVIBILI SENZA FAR USO DELLE TAVOLE LOGARITMICHE.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $\log x = \frac{1}{2}$.

Per la definizione di logaritmo, l'equazione data si può scrivere anche così: $10^{\frac{1}{2}} = x$, ossia $\sqrt{10} = x$. Estraendo la radice quadrata di 10, si ha $x \doteq 3{,}162$ (coll'approssimazione di $^1/_{1000}$).

Risposta. L'equazione data ha la soluzione $x = 3{,}162$.

Esempio 2°. *Si risolva l'equazione:* $2\log 4x + 1 = 7$.

Si ha $2\log 4x = 7 - 1 = 6$, e quindi $\log 4x = 3$. Per la definizione di logaritmo, l'equazione $\log 4x = 3$ si può anche scrivere $10^3 = 4x$, ossia $1000 = 4x$; da cui: $x = 250$.

Risposta. L'equazione ha per radice $x = 250$.

Esempio 3°. *Si risolva l'equazione:* $\log(x-5) + \log(x+2) = 0$ . . (1)

Pel teor. 8° § 226, si ha: $\log(x-5) + \log(x+2) = \log[(x-5)(x+2)]$. E quindi la (1) si può scrivere: $\log[(x-5)(x+2)] = 0$ . . . . . (2)

Ma pel teorema 1° § 225 è $\log 1 = 0$. Dunque possiamo nella (2) porre $\log 1$ al posto di *zero*, e si ha l'equazione equivalente: $\log[(x-5)(x+2)] = \log 1$. Da quest'equazione si ha immediatamente:

$$(x-5)(x+2) = 1, \quad \text{ossia} \quad x^2 - 3x - 11 = 0, \text{ le cui radici sono:}$$

$$x' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{53}, \qquad x'' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{53}.$$

Affinchè i valori di x' e di x'' verifichino la (1) è necessario e sufficien che x' ed x'' siano reali, e che $x-5$ ed $x+2$ siano positivi. Ora x' ed x

sono ambedue reali; ed è facile vedere che x' è positivo e maggiore di 5, e che $x'-5$ ed $x'+2$ sono positivi. Dunque $x'=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{53}$ è una radice dell'equazione. È facile vedere che x'' è negativo, ed in valore assoluto maggiore di 2, e quindi $x''+2$ è negativo. Dunque $x''=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{53}$ non è una radice dell'equazione.

Risposta. L'equazione data ha la sola soluzione $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{53}$.

Esempio 4°. *Si risolva l'equazione:* $3\log x=\frac{5}{4}+2\log\frac{x}{3}$ . . . (1)

Pel teor. 10° § 228 si ha:

$$3\log x=\log x^3 \quad \text{e} \quad 2\log\frac{x}{3}=\log\left(\frac{x}{3}\right)^2=\log\frac{x^2}{9}.$$

Perciò la (1) può scriversi così: $\log x^3=\frac{5}{4}+\log\frac{x^2}{9}$, ossia

$$\log x^3-\log\frac{x^2}{9}=\frac{5}{4} \quad . . . . (2)$$

Pel teor. 9° § 227 si ha:

$$\log x^3-\log\frac{x^2}{9}=\log\left(x^3:\frac{x^2}{9}\right)=\log\left(\frac{x^3.9}{x^2}\right)=\log(9x).$$

Dunque la (2) si può scrivere: $\log(9x)={}^5/_4$ . . . . (3)

Siamo così condotti alla soluzione dell'equazione (3), la quale ha la forma dell'equazione dell'Esempio 1°, e la risolveremo col medesimo metodo.

Per la definizione di logaritmo, la (3) può scriversi: $10^{\frac{5}{4}}=9x$ . . . (4)

Ora $10^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{10^5}=\sqrt[4]{10^4.10}=10\sqrt[4]{10}$. Inoltre $\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}$. Volendo p. e. avere $\sqrt[4]{10}$ coll'approssimazione a meno di ${}^1/_{100}$, cerchiamo prima il valore di $\sqrt{10}$ con quattro cifre decimali esatte, ed avremo: $\sqrt{10}=3,1622$.

Si ha poi $\sqrt{3,1622}=1,77$. Quindi $\sqrt[4]{10}=1,77$; e perciò $10\sqrt[4]{10}=17,7$.
La (4) si può allora scrivere così: $17,7=9x$ . . . . (5)

La (5) dà: $x=\frac{17,7}{9}=1,9$. Poichè questo valore di x è reale e positivo, esso sarà radice dell'equazione data.

Risposta. L'equazione data ha la sola radice $x=1,9$.

Si risolvano le seguenti equazioni:

1842. $\log x=2$. **1843.** $\log x=3$. **1844.** $\log x=\frac{3}{2}$.

1845. $\log x=-\frac{1}{2}$. **1846.** $\log x=-\frac{5}{2}$. **1847.** $\log x=-\frac{2}{3}$.

1848. $\log x=\log 36+\log 58$. **1849.** $\log x+\log 216=\log 2160$.

1850. $\log x=5\log 2$. **1851.** $3\log x=\log 21$. **1852.** $3\log x=4\log 3$.

1853. $\log x=\log 12+\log 46-\log 5$. **1854.** $2\log x=4\log 8-3\log 7$.

1855. $\log x=\log a-\log b$. **1856.** $\log x=n\log a+n\log b$.

1857. $\log x = \log 24 - \log 8.$ **1858.** $\log x = 3\log 18 - 4\log 12.$

1859. $2\log x = \log 192 + \log \frac{3}{4}.$ **1860.** $2\log x = \log \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$

1861. $5\log x - \log 288 = 3\log \frac{1}{2}x.$

1862. $\log x + \log x^2 + \log x^3 = \log 2 + \log 3^2 + \log 4^3.$

1863. $\log \sqrt{x} + \log \sqrt[3]{x} - \log \sqrt{x} = 6\log 14400.$

1864. $2\log x - 2\log(x-1) = \log 7.$ **1865.** $\log(x-2) + \log(x+2) = 0.$

1866. $\dfrac{\log x}{\log(2-x)} = 2.$ **1867.** $\log^2 x - 3\log x + 2 = 0.$

EQUAZIONI LOGARITMICHE DA RISOLVERSI FACENDO USO DELLE TAVOLE LOGARITMICHE.

Esempio 1°. *Si risolva l'equazione:* $x^{3+\log x} = 10000$ . . . . . (1)

Prendendo il logaritmo d'ambi i membri, si ha: $(3+\log x)\log x = \log 10000$, ossia $(3+\log x)\log x = 4$ . . . . (2)

Prendiamo per incognita ausiliaria y, ponendo: $y = \log x$ . . . (α)

Sostituendo questo valore di y nella (2), si ottiene: $(3+y)y = 4$, ossia

$$y^2 + 3y - 4 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

la quale ha per radici $y' = 1$, $y'' = -4$.

Ponendo nella (α) il valore $y' = 1$, si ha $\log x = 1$, ossia $x' = 10$. Questo valore verifica anche l'equazione data. Ponendo nella (α) il valore $y'' = -4$, si ha $\log x = -4$, ossia $x'' = 10^{-4} = \frac{1}{10000}$. È facile vedere che anche questo valore di x verifica l'equazione data.

Risposta. *L'equazione data ha le due soluzioni* $x' = 10$, $x'' = \frac{1}{10000}$.

Esempio 2°. *Si risolva il sistema* (A).

$$(A)\begin{cases} x^4 + y^4 = 641 & \ldots\ldots (1) \\ 2\log x + 2\log y = 2 & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

L'equazione (2) si può scrivere così: $\log x^2 + \log y^2 = 2$, ossia $\log(x^2y^2) = 2$; e per la definizione di logaritmo decimale (§ 233) si avrà:

$$x^2y^2 = 10^2 = 100 \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

Siamo così ridotti a risolvere il sistema (B).

$$(B)\begin{cases} x^4 + y^4 = 641 & \ldots (1) \\ x^2y^2 = 100 & \ldots (2') \end{cases} \qquad (C)\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 & \ldots (4) \\ x^2y^2 = 100 & \ldots (2') \end{cases}$$

Per risolverlo, possiamo moltiplicare per 2 ambi i membri della (2'), e si ha: $2x^2y^2 = 200$. Sommando quest'equazione a membro a membro colla (1) si ha: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 841$, ossia $(x^2+y^2)^2 = 841$ . . . . . (3)

Estraendo la radice quadrata aritmetica da ambi i membri della (3), si ha

$$x^2 + y^2 = 29 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ci rimane ora a risolvere il sistema (C). Prendendo per incognite x^2 ed y^2 si ha la somma ed il prodotto delle incognite. Dunque x^2 ed y^2 sarann[o] le due radici dell'equazione: $X^2 - 29X + 100 = 0$ . . . . (5)

Dalla (5) si ha: $X' = 25$, $X'' = 4$. Ponendo $x^2 = 25$ ed $y^2 = 4$, si ha: $x' = \pm 5$, $y' = \pm 2$. E poichè i valori negativi non possono soddisfare la (2), si hanno i soli valori positivi $x' = 5$, $y' = 2$.

Ponendo invece $x^2 = 4$ ed $y^2 = 25$, si avrebbe $x'' = 2$, $y'' = 5$.

Risposta. Il sistema dato ammette le due soluzioni $x' = 5$, $y' = 2$; *ed* $x'' = 2$, $y'' = 5$.

Osservazione. La simmetria delle equazioni del sistema dato ci poteva far prevedere che era possibile scambiare il valore di x con quello di y.

Si risolvano le seguenti equazioni ed i seguenti sistemi di equazioni:

1868. $3^{\log x} = 5$. **1869.** $x^{\log x} = 10$. **1870.** $x^{\log x} = a$.

1871. $x^{2+\log x} = 15{,}20153$. **1872.** $x^{a+b\log x} = c$. **1873.** $\dfrac{\log 3 + \log x}{\log(x+1)} = 2$. *

1874. $\begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0{,}5 \\ y^2 + xy = 159. \end{cases}$ ** **1875.** $\begin{cases} \log x - \log 5 = \log 10 \\ \log x^3 + \log y^2 = \log 32. \end{cases}$

1876. $\begin{cases} \log \sqrt{x} - \log \sqrt{5} = 0{,}5 \\ 3 \log x + 2 \log y = 1{,}50515. \end{cases}$ **1877.** $\begin{cases} \log x + \log y = {}^3/_2 \\ \log x - \log y = {}^1/_2. \end{cases}$

1878. $\begin{cases} 2 \log y - \log x = 0{,}12494 \\ \log 3 + 2 \log x + \log y = 1{,}73239. \end{cases}$ ***

1879. $\begin{cases} 2 \log y - \log x = 0{,}12494 \\ \log 3x^2 + \log y = 1{,}73239. \end{cases}$ **1880.** $\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3. \end{cases}$ ****

1881. $\begin{cases} x + y = a \\ \log x + \log y = b. \end{cases}$ **1882.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2. \end{cases}$

1883. $\begin{cases} \log x + \log y = 2{,}25527 \\ 5x - 4y = 64. \end{cases}$ **1884.** $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 5x^2 - 3y^2 = 11300. \end{cases}$

1885. $\begin{cases} x^4 + y^4 = a^2 \\ \log x + \log y = b. \end{cases}$ **1886.** $\begin{cases} xy = 20 \\ x^{\log y} = 2. \end{cases}$ *****

Problemi che si risolvono con equazioni di 2° grado a più incognite.

Nella risoluzione algebrica dei problemi a più incognite, bisogna ricordare che si devono avere tante equazioni quante sono le incognite.

PROBLEMA 1°. *Si trovi un numero di due cifre sapendo che se lo si aumenta di* 36 *si ottiene un numero formato da quelle medesime cifre*

---

* Si liberi l'equazione dal denominatore, e poi si raccolgano in un sol termine tutti i termini contenenti l'incognita.

** Si ricaverà dalla 1ª equazione il valore di x.

*** Si eguaglino prima i valori numerici dei coefficienti di $\log x$.

**** Si ricavi dalla 2ª equazione il valore di xy.

***** Si prenda il logaritmo d'ambi i membri della 2ª equazione, e poi vi si sostituisca il valore di y ricavato dalla 1ª.

scritte in ordine inverso; e che la somma dei quadrati delle due cifre è eguale al numero cercato, aumentato del prodotto delle sue due cifre.

Risoluzione. Se x è la cifra delle decine, ed y la cifra delle unità del numero cercato, questo si potrà rappresentare con $10x+y$. Il numero colle cifre scritte in ordine inverso, si potrà rappresentare con $10y+x$. Allora la 1ª condizione del problema ci dà l'equazione: $10x+y+36=10y+x$, ossia

$$9x-9y+36=0, \quad \text{ossia} \quad x-y+4=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

La 2ª condizione del problema ci dà l'equazione $x^2+y^2=10x+y+xy$,

$$\text{ossia} \quad x^2+y^2-xy-10x-y=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Il problema si potrà perciò trascrivere per mezzo del sistema (A).

$$(A) \begin{cases} x-y+4=0 & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ x^2+y^2-xy-10x-y=0 & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \end{cases}$$

Poichè la (1) è di 1° grado, ci è più comodo risolverla rispetto ad una incognita, p.e. rispetto ad y, e sostituirne il valore nella (2).

Dalla (1) si ha: $y=x+4$.

Sostituendo questo valore di y nella (2), si ottiene:

$$x^2+(x+4)^2-x(x+4)-10x-(x+4)=0, \quad \text{ossia}$$

$x^2+x^2+8x+16-x^2-4x-10x-x-4=0$, ossia $x^2-7x+12=0$, le cui radici sono: $x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4.12}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$. Ossia:

$$x'=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4, \qquad x''=\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Se nella (1) si sostituisce il valore x', si ricava $y'=8$; se invece si sostituisce il valore x'', si ottiene $y''=7$. Avremo quindi le due coppie di valori $x'=4$, $y'=8$, ed $x''=3$, $y''=7$, a cui corrispondono i due numeri 48 e 37. Verificando, si trova che entrambi soddisfano alle condizioni imposte dal problema.

Risposta. *Due numeri rispondono al problema, e sono* 48 *e* 37.

Osservazione. L'equazione che si ottiene sostituendo nella (2) il valore di un'incognita ricavata dalla (1), essendo di 2° grado ad un'incognita, non può ammettere più di due soluzioni. Ciascuna di queste sostituita nella (1) (la quale è di 1° grado in x ed in y) darà un solo valore per l'altra incognita. Dunque il problema non può avere più di due soluzioni.

PROBLEMA 2°. *Spesi lire* 1800 *nella compera d'una pezza di stoffa. Nel ricevere la merce, mi accorgo che per isbaglio, mi hanno mandato una pezza di stoffa d'altra qualità, la quale costa lire* 2,50 *di meno al metro, ma è lunga* 15 *metri di più. Vedendo che questo errore non mi reca danno, accetto la merce speditami. Quanti metri era lunga, e quanto costava al metro la pezza comperata? E quanto la pezza ricevuta?*

Risoluzione. Sia x il prezzo di un metro della pezza comperata, ed y la lunghezza (in metri) della stessa pezza. Sia poi u il prezzo di un metro della pezza ricevuta, e v la lunghezza (in metri) della pezza stessa.

Poichè la 1ª pezza costa lire 1800, si ha l'equazione: $xy=1800$ . . (1

Poichè la 2ª pezza costa pure lire 1800, si ha l'altra equazione:

$$uv=1800 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Poichè un metro della 2ª costa lire 2,50 meno della 1ª, la quale costa lire x, si avrà l'equazione: $u=x-2,50$ . . . . (3)

Poichè la 2^a è lunga metri 15 più della 1^a, la quale è lunga metri y, si avrà l'equazione: $v = y + 15$ . . . . (4)

Il problema si potrà perciò trascrivere per mezzo del sistema (A).

$$(A) \begin{cases} xy = 1800 & \dots\dots\dots\dots (1) \\ uv = 1800 & \dots\dots\dots\dots (2) \\ u = x - 2{,}50 & \dots\dots\dots\dots (3) \\ v = y + 15 & \dots\dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

Il modo più semplice di **risolvere** questo sistema, è di sostituire nella (2) i valori di u e di v ricavati dalla (3) e dalla (4). La (2) allora prende la forma: $(x - 2{,}50)(y + 15) = 1800$ . . . . (2')

Siamo così ridotti alla **risoluzione** del sistema (B).

$$(B) \begin{cases} xy = 1800 & \dots\dots\dots\dots (1) \\ (x - 2{,}50)(y + 15) = 1800 & \dots\dots (2') \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, basta sostituire nella (2') ad y il valore $y = \dfrac{1800}{x}$ ricavato dalla (1), e si ha: $(x - 2{,}50)\left(\dfrac{1800}{x} + 15\right) = 1800$, ossia

$$x \cdot \frac{1800}{x} - 2{,}50 \cdot \frac{1800}{x} + 15x - 2{,}50 \times 15 = 1800, \quad \text{ossia}$$

$1800 - \dfrac{4500}{x} + 15x - 37{,}5 = 1800$. Sopprimendo 1800 in ambi i membri, e moltiplicando tutti i termini per x, si ha: $-4500 + 15x^2 - 37{,}5x = 0$, ossia $15x^2 - 37{,}5x - 4500 = 0$, ossia (dividendone tutti i termini per 15)

$$x^2 - 2{,}50x - 300 = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Quest'equazione è di 2° **grado** in x, e dà:

$$x = \frac{2{,}50 \pm \sqrt{2{,}50^2 - 4(-300)}}{2} = \frac{2{,}50 \pm \sqrt{6{,}25 + 1200}}{2} = \frac{2{,}50 \pm \sqrt{1206{,}25}}{2}.$$

Poichè 1206, 25 non è **quadrato**, possiamo contentarci di estrarne la radice quadrata a meno di $1/_{100}$ per difetto, ed avremo: $\sqrt{1206{,}25} = 34{,}73$.

Avremo quindi: $x = \dfrac{2{,}50 \pm 34{,}73}{2}$; da cui:

$$x' = \frac{2{,}50 + 34{,}73}{2} = 18{,}61, \qquad x'' = \frac{2{,}50 - 34{,}73}{2} = -16{,}11.$$

Il valore x'', essendo **negativo**, non soddisfa alle condizioni del problema. Riterremo il solo valore $x = 18{,}61$.

Sostituendo quest'unico **valore** di x nella (1), si ottiene $18{,}61y = 1800$, la quale, essendo di 1° grado **in** y, dà per y l'unico valore $y = \dfrac{1800}{18{,}61} = 96{,}72$. Sostituendo l'unico valore di x nella (3), si ottiene l'unico valore di u, cioè $u = 18{,}61 - 2{,}50 = 16{,}11$. Sostituendo nella (4) l'unico valore di y, si ottiene l'unico valore di v, cioè $v = 96{,}72 + 15 = 111{,}72$.

Risposta. *La pezza comperata era di metri* 96,72, *e costava lire* 18,61 *al metro. La pezza ricevuta* ***è*** *di metri* 111,72, *e costa lire* 16,11 *al metro.*

PROBLEMI.

1887. Si trovino tre numeri interi consecutivi e tali che il quadrato del maggiore sia eguale alla somma dei quadrati degli altri due.

1888. La somma di due numeri moltiplicata per quella dei loro quadrati dà 1484; la differenza dei medesimi moltiplicata per quella dei loro quadrati dà 224. Quali sono questi due numeri?

1889. Si divida il numero 27 in due parti tali che il quadruplo del quadrato della prima sommato col quintuplo del quadrato della seconda dia 1620.

1890. Un operaio riceve lire 80; ed un altro, che ha lavorato 5 giorni di meno, riceve lire 45. Se ciascuno avesse lavorato il numero di giorni dell'altro, avrebbero ricevuto la medesima somma. Quanti giorni lavorò ciascun operaio, e qual fu la paga giornaliera di ciascuno?

1891. Si trovino due numeri tali che la loro somma, il loro prodotto, e la differenza dei loro quadrati siano eguali fra loro.

1892. In un numero di tre cifre la somma dei quadrati delle cifre è 104 il quadrato della cifra di mezzo supera di 4 il doppio prodotto delle altre due; e sottraendo 594 dal numero cercato, le tre cifre compariscono in ordine inverso rispetto alla primitiva posizione. Qual è il numero?

1893. La somma dei 4 termini d'una proporzione è 62,5, il 1° termine supera il 2° di 4, ed il 3° supera il 4° di 3. Si trovi la proporzione. *

1894. In una proporzione continua la somma dei due primi termini è 15, e la somma dei due termini estremi è 13. Si trovi la proporzione.

1895. In una proporzione continua la somma dei tre termini è 28, e la differenza dei due primi è 8. Si trovi la proporzione.

1896. La somma degli antecedenti d'una proporzione è 12, la somma dei conseguenti è 9, e la differenza fra la somma dei quadrati dei tre primi termini ed il quadrato del quarto è 107. Si scriva la proporzione.

APPLICAZIONI GEOMETRICHE.

Moltissime questioni di geometria si possono risolvere assai comodamente per mezzo dell'Algebra. Se si rappresentano con numeri i segmenti, le distanze di un punto da una retta, ecc. e poi si scrivono le relazioni esistenti fra questi enti geometrici, si ottengono equazioni le cui soluzioni rappresentano, in generale, le soluzioni cercate.

Bisogna ricordare che le grandezze devono essere riferite tutte alla medesima unità di misura fondamentale: p.e. le lunghezze, le superficie, i volumi, devono essere riferiti rispettivamente al m. al m^2, al m^3; oppure al cm, al cm^2, al cm^3, ecc.

La discussione si fa come quella dei problemi algebrici. Ne daremo alcuni facili esempi.

---

* Si applichi il teorema che il prodotto degli estremi è eguale al prodotto dei medi.

PROBLEMA 1°. *Si costruisca il rettangolo, di cui si conosce l'area q, ed il perimetro $2p$.*

Risoluzione. Per risolvere il problema, basta conoscere la lunghezza di due lati consecutivi del rettangolo. Poichè il perimetro è $2p$, il semiperimetro sarà p. Ma sappiamo che la somma di due lati adiacenti è eguale al semiperimetro p; e che l'area, la quale è q, è eguale al prodotto di due lati adiacenti. Dunque, di questi due lati conosciamo la somma p ed il prodotto q; e quindi (pei teor. dei §§ 209, 210, osserv.) essi saranno le due radici dell'equazione $x^2-px+q=0$. Se rappresentiamo con x' uno dei due lati, e con x'' l'altro, avremo:

$x'=+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $\quad x''=+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Conosciuta la lunghezza di due lati consecutivi, si potrà con tutta facilità costruire il rettangolo.

Discussione. I due lati devono essere rappresentati da due numeri *reali, positivi*. Dunque il radicando deve essere positivo, e quindi deve essere $\frac{p^2}{4}\geqq q$, ossia $\left(\frac{p}{2}\right)^2\geqq q$. Dalle osservazioni 2ª e 3ª fatte al problema 2°, pag. 333, risulta che per un dato semiperimetro p l'area q è massima quando le due parti di p sono eguali, ossia quando i lati del rettangolo sono eguali; e che per una data area q il semiperimetro p è minimo quando le due parti di p sono eguali fra loro, ed eguali a $\sqrt{q}$. E quindi:

TEOREMA. *Di tutti i rettangoli che hanno un dato perimetro $2p$, quello che ha l'area massima è il quadrato.*

TEOREMA. *Di tutti i rettangoli che hanno una data area q, quello che ha il perimetro minimo $2p$ è il quadrato che ha per lato $\sqrt{q}$.*

Esempio. *Si costruisca il rettangolo la cui area è 45 cm^2, ed il cui perimetro è 28 cm.*

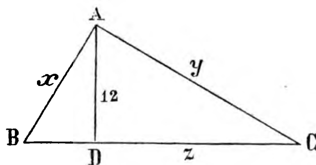
Risoluzione. Il semiperimetro sarà 14 cm., ed i due lati adiacenti saranno le due radici dell'equazione $x^2-14x+45=0$, le quali sono:

$x=\frac{14}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2-45}=7\pm\sqrt{7^2-45}=7\pm\sqrt{4}=7\pm 2.$ Cioè:

$x'=7+2=9, \quad x''=7-2=5.$

Costruzione. Costruendo un rettangolo che abbia i due lati adiacenti l'uno di 9 cm. e l'altro di 5 cm., si avrà il rettangolo cercato.

PROBLEMA 2°. *La somma dei tre lati di un triangolo rettangolo è 60 m., e la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sopra l'ipotenusa è 12 m. Si trovi la lunghezza di ciascuno dei tre lati del triangolo.*



Risoluzione. Se x, y sono i due cateti, e z l'ipotenusa, abbiamo:

$$x+y+z=60 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Pel teorema di Pitagora, abbiamo:

$$x^2+y^2=z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dalla Geometria sappiamo che la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sopra l'ipotenusa è quarta proporzionale dopo l'ipotenusa ed i due cateti; abbiamo quindi la proporzione: $z:x=y:12$, da cui (essendo il prodotto dei medi eguale al prodotto degli estremi) $xy=12z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

La risoluzione del problema è così ridotta alla risoluzione del sistema (A).

$$(A)\ \begin{cases} x+y+z=60 \ldots. (1) \\ x^2+y^2=z^2 \ldots. (2) \\ xy=12z \ldots. (3) \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} x+y=35 \ldots.. (\alpha) \\ xy=300 \ldots.. (\beta) \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema, possiamo fare così. Moltiplichiamo ambi i membri della (3) per 2, ed otteniamo: $2xy=24z$ . . . . (3′)

Sommando, a membro a membro la (2) con la (3′), si ha l'equazione: $x^2+2xy+y^2=z^2+24z$, ossia $(x+y)^2=z^2+24z$ . . . . (4)

Dalla (1) si ha: $x+y=60-z$. Sostituendo quindi nella (4) ad $x+y$ il valore $60-z$, si ottiene l'equazione: $(60-z)^2=z^2+24z$, ossia $3600-120z+z^2=z^2+24z$, ossia $144z=3600$, da cui: $z=25$. Sostituendo questo valore di z nella (1), si ottiene $x+y+25=60$, ossia

$$x+y=35 \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

E sostituendolo nella (3), si ottiene: $xy=300$. . . . . . . (β)

Rimane ora a risolvere il sistema (B).

I valori cercati di x, y sono le radici dell'equazione:

$$X^2-35X+300=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

Le radici della (γ) sono: $X=\frac{35\pm\sqrt{35^2-4.300}}{2}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1200}}{2}=$

$=\frac{35\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{35\pm5}{2}$. Ossia: $X'=\frac{35+5}{2}=20$, $X''=\frac{35-5}{2}=15$.

I due cateti x, y sono l'uno di 15 metri e l'altro di 20 metri. L'ipotenusa sarà perciò di 25 metri.

Risposta. *I due cateti sono l'uno di* 15 *metri e l'altro di* 20 *metri. L'ipotenusa è di* 25 *metri.*

PROBLEMI.

1897. La superficie di un triangolo rettangolo è di 54 m²., e l'ipotenusa è di 15 metri. Se ne trovino i cateti.

1898. L'ipotenusa di un triangolo è di 25 metri, e la differenza fra i due cateti è di 17 metri. Si trovi la lunghezza dei cateti.

1899. La superficie di un triangolo rettangolo è di 20 m²., e la differenza dei quadrati dei due cateti è di 39 m². Si trovi la lunghezza dei cateti.

1900. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è di 25 metri e la somma dei due cateti e dell'altezza abbassata dal vertice dell'angolo retto è di 47 metri. Si trovi la lunghezza dei due cateti.

1901. Il perimetro di un triangolo rettangolo è di 36 metri, e la superficie di 54 m². Se ne trovino i cateti.

1902. Il perimetro di un triangolo rettangolo è di 60 metri, e l'altezza abbassata sull'ipotenusa è di 12 metri. Se ne trovino i cateti.

1903. Si divida un segmento lungo metri a in due parti tali che il rettangol da esse formato sia eguale ad un rettangolo di n m². di area. Qual è la lunghezza di ciascuna delle due parti? In qual caso la risolu zione del problema è impossibile? *

* Il problema è risolto quando si è trovata una formola che esprima la lunghezza di un delle due parti del segmento.

1904. Sul prolungamento d'un segmento lungo a cm. si trovi un punto tale che il rettangolo delle sue distanze dalle estremità del segmento abbia n cm^2. di area.

1905. La diagonale di un rettangolo il quale è 119 metri più lungo che largo è di 221 metri. Quali sono i lati del rettangolo?

1906. Il perimetro di un campo rettangolare è di 1034 metri; la distanza di due vertici opposti è di 407 metri. Quali sono i lati di quel campo?

1907. Qual è l'area del massimo rettangolo che si può formare con un cordone lungo 36 metri?

1908. Qual è l'area del massimo di tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro n?

1909. Costruendo con due dati segmenti un triangolo rettangolo, se i due segmenti si mettono per cateti, l'ipotenusa risulta lunga 17 cm.; e se uno dei segmenti si mette per ipotenusa, e l'altro per cateto, il quadrato descritto sull'altro cateto ha 161 cm^2. di area. Qual è la lunghezza dei due segmenti?

1910. La diagonale di un rettangolo è di 20,4 metri. Se si aumenta di 14 metri la lunghezza, e si diminuisce di metri 2,4 la larghezza, la diagonale cresce di metri 12,4. Si trovino le dimensioni del rettangolo.

1911. Due corde di un cerchio di 15 metri di raggio si tagliano in un punto. Il prodotto dei due segmenti di ciascuna delle due corde è 200. Qual è la distanza del punto d'incontro dal centro? *

1912. Due corde di un cerchio si tagliano in un punto. Una di esse è lunga metri 22, ed i due segmenti dell'altra sono metri 12 e metri 8. Qual è la lunghezza dei due segmenti della prima?

1913. Sopra una retta tangente nel punto A ad un cerchio di centro O e di 3 metri di raggio, si trovi un punto P tale che la parte del segmento PO che è esterna al cerchio sia eguale alla metà di PA.

1914. Da un punto che dista 25 metri dal centro d'un cerchio di 15 metri di raggio si tira una tangente al cerchio. Qual è la lunghezza di questa tangente?

1915. Da un punto situato nel piano di un cerchio di raggio R e posto alla distanza d dal centro si tira al cerchio una secante, della quale la parte interna al cerchio è lunga metri $2c$. Quanto è lungo il segmento esterno della secante?

1916. I tre lati di un triangolo rettangolo sono rappresentati da tre numeri interi consecutivi. Qual è la lunghezza di ciascun lato, e l'area?

1917. La somma delle aree di due quadrati è 8621 m^2., ed il prodotto delle loro diagonali (espresse in metri) è 8540. Si trovino i lati dei due quadrati.

1918. Un rettangolo ha 3200 m^2. di area, e la lunghezza supera la larghezza di 14 metri. Se ne trovino i lati.

1919. L'area di un rettangolo è di 120 m^2., e la diagonale ha 17 metri di lunghezza. Se ne trovino i lati.

1920. In un cerchio di 25 metri di diametro si inscriva un rettangolo tale che la differenza fra la lunghezza di due lati consecutivi sia di 17 metri. **

---

* Si tiri il diametro che passa pel punto d'incontro, e si osservi che sono eguali i prodotti dei due segmenti di tutte le corde che si tagliano nel medesimo punto.

** Basta trovare la lunghezza dei lati del rettangolo.

Problemi che si risolvono con equazioni frazionarie.

PROBLEMA 1º. *Si trovi un numero che aggiunto al numeratore ed al denominatore di* $^5/_6$, *trasformi questa frazione in un'altra equivalente.*

Risoluzione. Se x è il numero cercato, si deve avere $\frac{5+x}{6+x}=\frac{5}{6}$.

Moltiplicando ambi i membri dell'equazione pel prodotto $6(6+x)$ dei denominatori, otterremo: $\frac{5+x}{6+x}\cdot 6(6+x)=\frac{5}{6}\cdot 6(6+x)$, ossia $(5+x).6=5(6+x)$ la cui radice è $x=0$. Poichè questo valore di x non annulla il moltiplicatore, esso sarà radice dell'equazione data.

Risposta. *Il numero cercato è lo zero.*

Osservazione. Ed infatti noi sappiamo che aggiungendo un medesimo numero, diverso da zero, al numeratore ed al denominatore d'una frazione, si ottiene una frazione che non è più equivalente alla prima.

PROBLEMA 2º. *Tre macchine tipografiche, lavorando contemporaneamente, stamperebbero un libro in* 24 *giorni. Lavorando solamente la 1ª e la 2ª, impiegherebbero* 40 *giorni. Ma se invece lavorassero solamente la 1ª e la 3ª, impiegherebbero* 36 *giorni. Quanto tempo impiegherebbe ciascuna macchina a stampare da sola il libro?*

Risoluzione. Sia x il numero dei giorni che impiegherebbe la 1ª, y quelli della 2ª, e z quelli della 3ª. Poichè la 1ª stamperebbe l'intero libro in x giorni, in un giorno stamperà $\frac{1}{x}$ del libro. Similmente la 2ª in un giorno stamperà $\frac{1}{y}$ del libro, e la 3ª. $\frac{1}{z}$ del libro; e tutte tre insieme, in un giorno stamperanno $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ del libro.

Siccome tutte e tre insieme impiegherebbero 24 giorni a stampare l'intero libro, in un giorno stamperanno $\frac{1}{24}$ del libro; ma abbiamo visto che stampano $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ del libro; dunque sarà: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24}$.

Similmente la 1ª e la 2ª insieme, in un giorno stamperanno $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ libro; e poichè esse due impiegano 40 giorni a stampare l'intero libro, in giorno stamperanno $\frac{1}{40}$ del libro. Sarà dunque: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{40}$.

Analogamente avremo: $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{36}$.

Fra le tre incognite x, y, z, esisteranno dunque tre equazioni, le quali formeranno il sistema (I).

$$\text{(I)}\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{24} & \dots\dots\dots\ (1)\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{40} & \dots\dots\dots\ (2)\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{36} & \dots\dots\dots\ (3)\end{cases}$$

Questo sistema si potrebbe risolvere coi metodi ordinari, considerando come incognite non x, y, z, ma $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. In questo caso però ci è più comodo tenere la via seguente:

Si sottrae a membro a membro la (2) dalla (1), e si ottiene:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{24}-\frac{1}{40}=\frac{40-24}{24.40}=\frac{16}{960}=\frac{1}{60}; \quad \text{da cui:} \quad z=60.$$

Sottraendo, a membro a membro la (3) dalla (1), si ottiene:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{24}-\frac{1}{36}=\frac{36-24}{24.36}=\frac{12}{24.36}=\frac{1}{2.36}=\frac{1}{72}; \quad \text{da cui:} \quad y=72.$$

Sostituiamo ora il valore di z nella (3), ed otteniamo $\frac{1}{x}+\frac{1}{60}=\frac{1}{36}$, ossia

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{36}-\frac{1}{60}=\frac{60-36}{36.60}=\frac{24}{2160}=\frac{1}{90}; \quad \text{da cui:} \quad x=90.$$

Come si vede, il valore di ciascun'incognita è unico; epperciò il problema ammetterà una sola soluzione.

Risposta. *La 1ª macchina da sola stamperebbe il libro in 90 giorni; la 2ª in 72 giorni; e la 3ª in 60 giorni.*

PROBLEMA 3º. *Distribuisco 147 lire in parti eguali fra un certo numero di poveri. Se questi fossero 5 di più, la somma del numero dei poveri e di quanto avrebbe ciascuno sarebbe 23. Quanti sono i poveri?*

Risoluzione. Sia x il numero dei poveri; se fossero 5 di più, sarebbero $x+5$, e ciascuno avrebbe lire $\frac{147}{x+5}$. Il problema dice che $\frac{147}{x+5}$ sommato col numero x dei poveri dà 23. Si avrà perciò il problema trascritto per mezzo della seguente equazione: $\frac{147}{x+5}+x=23$, ossia $x^2-18x+32=0$, le cui radici sono $x'=16$, $x''=2$.

Verificando, si trova che entrambe le radici dell'equazione soddisfano al problema dato. Infatti: prendendo $x'=16$, i poveri sono 16; e se fossero 5 di più, sarebbero 21. In tal caso, ciascuno avrebbe lire $\frac{147}{21}=7$; e si ha appunto $16+7=23$. Prendendo $x''=2$, i poveri sono 2; e se fossero 5 di più, sarebbero 7. In tal caso, ciascuno avrebbe lire $\frac{147}{7}=21$; e si ha appunto $21+2=23$.

Risposta. *I poveri erano 2 oppure 16.*

PROBLEMA 4º. *Devo distribuire* 400 *lire in parti eguali fra un certo numero di persone. Ma, al momento della distribuzione, si vede che ne mancano* 4*; ed in conseguenza, ciascuna persona riceve* 5 *lire di più. Quante persone parteciparono alla distribuzione?*

Risoluzione. Sia x il numero delle persone che parteciparono alla distribuzione. Quelle che dovevano partecipare erano $x+4$. Se tutte avessero partecipato alla distribuzione, ciascuna avrebbe avuto lire $\frac{400}{x+4}$. Ma essendovene solamente x, ciascuna ebbe lire $\frac{400}{x}$. In questo 2º caso, ciascuna ebbe 5 lire di più che nel 1º caso. Potremo dunque trascrivere il problema per mezzo della seguente equazione: $\frac{400}{x}=\frac{400}{x+4}+5$, ossia $x^2+4x-320=0$, le cui radici sono $x'=16$, $x''=-20$.

La radice $x''=-20$ è da rigettarsi, perchè il numero delle persone non può essere negativo. Verificando, si trova che $x'=16$ soddisfa al problema.

Risposta. *Alla distribuzione parteciparono* 16 *persone.*

PROBLEMA 5º. *La somma di* 5 *termini consecutivi d'una progressione aritmetica è* 45, *e la somma dei loro inversi è* $\frac{137}{180}$. *Si trovino i* 5 *numeri.*

Risoluzione. Se x è il numero di mezzo, e d la ragione, i 5 numeri cercati saranno: $x-2d$, $x-d$, x, $x+d$, $x+2d$, ed i loro inversi saranno: $\frac{1}{x-2d}$, $\frac{1}{x-d}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x+d}$, $\frac{1}{x+2d}$. Avremo quindi:

$(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d)=45$, ossia $5x=45$; da cui: $x=9$.

Si avrà pure: $$\frac{1}{x-2d}+\frac{1}{x-d}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+d}+\frac{1}{x+2d}=\frac{137}{180} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

La somma dei termini del 1º membro della (α) si può eseguire così:

$$\left(\frac{1}{x-2d}+\frac{1}{x+2d}\right)+\left(\frac{1}{x-d}+\frac{1}{x+d}\right)+\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{x+2d+x-2d}{x^2-(2d)^2}+\frac{x+d+x-d}{x^2-d^2}+\frac{1}{x}=\frac{2x}{x^2-4d^2}+\frac{2x}{x^2-d^2}+\frac{1}{x}.$$

La (α) si potrà allora scrivere così:

$$\frac{2x}{x^2-4d^2}+\frac{2x}{x^2-d^2}+\frac{1}{x}=\frac{137}{180} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Sostituendo nella (β) ad x il suo valore 9, si ha l'equazione:

$$\frac{18}{81-4d^2}+\frac{18}{81-d^2}+\frac{1}{9}=\frac{137}{180}, \text{ ossia } \frac{18}{81-4d^2}+\frac{18}{81-d^2}=\frac{13}{20} \quad \ldots (\gamma)$$

Ordinando l'equazione (γ) rispetto a d considerata come incognita, si ha l'equazione biquadratica $52d^4-3465d^2+26973=0$, la quale ha per radic

$$d'=+3, \quad d''=-3, \quad d'''=+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}}, \quad d''''=-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}}.$$

Se nelle espressioni $x-2d$, $x-d$, x, $x+d$, $x+2d$ si sostituiscon i valori $x=9$, $d'=+3$, si hanno i numeri 3, 6, 9, 12, 15.

Se si sostituiscono i valori $x=9$, $d''=-3$, si hanno i numeri 15, 12, 9, 6, 3.

Se si sostituiscono i valori $x=9$, $d'''=+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}}$, si hanno i numeri

$$9-9\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9,\quad 9+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9+9\sqrt{\frac{37}{13}}.$$

Se si sostituiscono i valori $x=9$, $d'''=-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}}$, si hanno i numeri

$$9+9\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9,\quad 9-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9-9\sqrt{\frac{37}{13}}.$$

Risposta. *I numeri cercati sono* 3, 6, 9, 12, 15; *oppure i numeri*

$$9-9\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9-\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9,\quad 9+\frac{9}{2}\sqrt{\frac{37}{13}},\quad 9+9\sqrt{\frac{37}{13}}.$$

PROBLEMI.

1921. Qual numero bisogna aggiungere ai due termini di $^{20}/_{10}$ per ottenere $^{2}/_{3}$?

1922. Si trovino due frazioni la cui somma sia $^{29}/_{36}$, la differenza $^{11}/_{36}$, la somma dei numeratori 6, e quella dei denominatori 13.

1923. Si trovino due numeri la cui somma ed il cui quoto siano eguali a 5.

1924. Si trovino due numeri la cui differenza ed il cui quoto siano eguali a 5.

1925. Prima della battaglia, le forze numeriche di due eserciti stavano :: 6 : 7; ma dopo la zuffa, in cui il primo perdette 8000 uomini ed il secondo 24000, stavano :: 5 : 4. Di quanti uomini si componeva da principio ciascun esercito?

1926. Si chiedono tre numeri che adempiano a queste condizioni: il prodotto del 1° pel 2° diviso per la somma dei medesimi sia $2\,^{2}/_{5}$; il prodotto del 2° pel 3° diviso per la loro somma sia $3\,^{3}/_{5}$; il prodotto del 1° pel 3° diviso per la loro somma sia $2\,^{10}/_{13}$.

1927. La somma dei valori reciproci di due numeri è 5; $^{1}/_{2}$ d'uno dei due numeri più $^{1}/_{3}$ dell'altro eguaglia il doppio del loro prodotto. Quali sono questi due numeri?

1928. Un negoziante ha vino di due qualità. Se mescola i due vini nel rapporto di 4 a 5, ottiene un miscuglio del valore di L. 50 l'ettolitro. Ma se li mescola nel rapporto di 3 a 2, il miscuglio vale solamente L. 48,60 l'ettolitro. Qual è il prezzo di un ettolitro di vino di ciascuna qualità?

1929. La somma di 3 numeri è 14250; il 1° sta al 3° come 3 sta ad 11, e ne differisce di 600. Quali sono essi?

1930. Per qual numero bisogna dividere 96 per avere un quoto che superi di 4 il divisore?

1931. Un divisore supera di n il dividendo; ed il quoto dei due numeri aggiunto al valore reciproco del quoto stesso dà n per somma. Si chiede il dividendo.

1932. Qual è il dividendo precedente se è $n=2\,^{1}/_{2}$?

1933. Alcune persone promisero di contribuire in parti eguali ad un' opera buona che monta 240 lire: ma tre di esse mancarono all'impegno; e per supplirvi, le altre dovettero pagare ciascuna 18 lire di più. Quante persone si erano impegnate, e per qual somma?

1934. Per comperare in tutto 170 pecore, due pastori spesero la medesima somma, benchè il 1° ne abbia comperato un numero maggiore. Quelle

del 1°, pagate al prezzo di quelle del 2°, costerebbero L. 1012,50; e queste, pagate al prezzo delle prime, costerebbero L. 800. Quante ne comperò ciascuno, ed a qual prezzo?

1935. Due pezze di stoffa costano ciascuna L. 540; ma la 2ª contiene 3 metri di più, e fu pagata 15 lire di meno ogni metro. Quanto costa un metro della 1ª pezza?

1936. Un serbatoio si vuota in 15 ore quando siano aperte le sue due valvole; la minore, per vuotarlo da sola, impiegherebbe 16 ore più della maggiore. Quanto tempo impiegherebbe questa?

1937. Si chiede quanti salti abbia fatto una lepre prima di essere raggiunta da un cane, sapendo che 12 salti del cane equivalgono a 17 salti della lepre; nel tempo che il cane avrebbe messo a fare tanti salti quanti sono richiesti, la lepre ne avrebbe fatti 216 di più; e quando questa cominciò a fuggire era distante dal cane 77 salti di lepre.

1938. Esiste un numero di due cifre tale, che dividendolo per la somma di esse, poi scambiando di posto le due cifre, e dividendo il nuovo numero per la medesima somma, la differenza dei due quoti è eguale alla differenza delle cifre, ed il prodotto dei quoti eguaglia il numero stesso. Si cerchi questo numero.

1939. La somma di due numeri è 63, e la somma del quoto del 1° pel 2° e del quoto del 2° pel 1° è 2,05. Si trovino i due numeri.

1940. Due fontane, versando contemporaneamente, potrebbero empire una vasca in due ore e 24 minuti. La seconda impiegherebbe da sola due ore di meno di quello che impiega da sola la prima. Quanto tempo impiega ciascuna fontana ad empire da sola la vasca?

1941. Si trovino due numeri tali che il quoto della loro somma pel loro prodotto sia $^2/_3$, e che la somma dei loro quadrati sia il quintuplo della somma dei numeri stessi. *

1942. Alcuni fratelli ereditarono 46800 lire; ma, prima di farne la divisione in parti eguali, due fratelli morirono, e perciò ognuno dei superstiti ricevette lire 1950 di più. Quanti erano i fratelli?

1943. Qual è il numero che sommato col proprio valore reciproco dà m?

1944. Qual è il numero che sottratto dal proprio valore reciproco dà n?

1945. Qual è il quoziente il cui dividendo è di n unità più piccolo del divisore, e che sommato col proprio valore reciproco dà n?

1946. La somma di 4 termini consecutivi d'una progressione aritmetica è 20, e la somma dei loro inversi è $^{25}/_{24}$. Si trovino i quattro numeri.

1947. Si trovino tre numeri in progressione geometrica la cui somma sia 7, e la somma dei valori reciproci sia $1\,^3/_4$. **

1948. Di quanto aumenta o diminuisce il valore d'una frazione quando si aggiunge m ai suoi due termini?

1949. Sono dati quattro numeri a, b, c, d. Si trovi un numero tale che, aggiungendolo a ciascuno di essi, si ottengano quattro numeri in proporzione.

1950. Le età di due persone sono rispettivamente a e b. Dopo quanti anni il rapporto delle due età sarà $^m/_n$?

1951. Si divida un segmento in due parti disuguali in modo che il quoto

---

* Se x, y sono i due numeri, si prendano per incognite ausiliarie $x+y$ ed xy.

** Si hanno due equazioni. Si moltiplichino tutti i termini di una per il 2° dei numeri cercati, e si dividano tutti i termini dell'altra equazione pel medesimo numero; poi.....

dell'intero segmento per la parte maggiore sia eguale al quoto della parte maggiore per la parte minore. *

1952. Si determini sul prolungamento del segmento AB un punto C tale che si abbia $AC:BC::m:n$.

1953. I lati non paralleli d'un trapezio vengono prolungati finchè s'incontrino. Si cerchi l'altezza del maggior triangolo risultante.

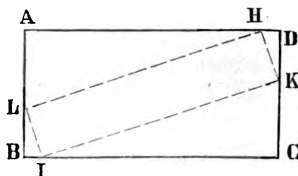
1954. Due sorgenti luminose le cui intensità sono rispettivamente a e b sono situate in due punti fissi di una retta. Si trovi sulla stessa retta un punto che sia egualmente illuminato da ciascuna delle due sorgenti luminose. **

1955. Lasciando cadere una pietra in un pozzo, si sente dopo t secondi il rumore che fa la pietra battendo sul fondo del pozzo. Qual'è la profondità del pozzo? ***

ESEMPIO DI DISCUSSIONE DI UN PROBLEMA A PIÙ INCOGNITE.

PROBLEMA. *In un rettangolo dato si inscriva un altro rettangolo i cui due lati adiacenti stiano fra loro in un dato rapporto.*

Risoluzione. Supponiamo risolto il problema, e sia $ABCD$ il rettangolo dato, ed $HKIL$ il rettangolo cercato. È evidente che il problema si riduce a trovare i punti H, K, I, L che sono i vertici del rettangolo cercato. Dalla figura è facile vedere che i due triangoli HAL, ICK sono eguali per avere le ipotenuse HL, IK eguali, ed un angolo acuto eguale. Sarà dunque: $AH = CI$, e $AL = CK$. Perciò potrò dire di aver risolto il poblema se trovo le lunghezze AH ed AL.



Poniamo a tal fine $AD = a$, $AB = b$, essendo a, b numeri positivi, ed $a > b$; $AH = x$, $AL = y$; e sia m il rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo inscritto, sia cioè: $\frac{LH}{LI} = m$. ****

Essendo noti i valori di a, b, m, basterà trovare i valori di x, y. Osservo che i due triangoli HAL ed LBI essendo simili (perchè hanno i tre angoli rispettivamente eguali) avranno i lati omologhi proporzionali, cioè:

$$\frac{AH}{BL} = \frac{AL}{BI} = \frac{LH}{LI} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Ma $AH = x$, $AL = y$, $BL = b - y$, $BI = a - x$, $\frac{LH}{LI} = m$; e sostituendo questi valori nella (α), si ha: $\frac{x}{b-y} = \frac{y}{a-x} = m$ . . . (β)

* Questa divisione si chiama *divisione aurea*, od anche *divisione in media ed estrema ragione*.

** Si ricordi che l'intensità luminosa varia in ragione inversa del quadrato della distanza.

*** Si trascuri il ritardo della caduta della pietra dovuto alla resistenza dell'aria, e si scriva che il tempo percorso è eguale alla somma del tempo impiegato dalla pietra a cadere, e di quello impiegato dal suono a salire. Il moto della pietra è uniformemente accelerato; quello del suono è uniforme.

**** Noi conveniamo di esprimere con numeri positivi le lunghezze dei lati LH, LI; epperciò il numero m sarà positivo, ed inoltre non sarà minore dell'unità.

Le eguaglianze (β) equivalgono al sistema (I).

$$\text{(I)} \begin{cases} \dfrac{x}{b-y} = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\[2ex] \dfrac{y}{a-x} = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x + my = mb \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1') \\ mx + y = ma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2') \end{cases}$$

Essendo $b-y>0$ ed $a-x>0$, * potremo moltiplicare ambi i membri della (1) per $b-y$, ed ambi i membri della (2) per $a-x$, ed otterremo:

dalla (1) $\quad x = m(b-y), \quad$ ossia $\quad x + my = mb$
dalla (2) $\quad y = m(a-x), \quad$ ossia $\quad mx + y = ma$

le quali (pel teor. 2° § 103 e coroll. 2°, § 102) sono rispettivamente equivalenti alle (1), (2); e quindi il sistema (II) sarà equivalente al sistema (I).

Per risolvere il sistema (II), moltiplichiamo tutti i termini della (2′) per m; dall'equazione ottenuta sottraiamo a membro a membro la (1′), ed otteniamo:

$m^2x - x = m^2a - mb, \quad$ ossia $\quad (m^2-1)x = m(ma-b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'')$

Analogamente, moltiplicando tutti i termini della (1′) per m, e poi dall'equazione ottenuta sottraendo a membro a membro la (2′), otteniamo:

$m^2y - y = m^2b - ma, \quad$ ossia $\quad (m^2-1)y = m(mb-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'')$

Se m^2-1 è diverso da zero, potremo dividere per m^2-1 ambi i membri della (1″) e della (2″), ed otterremo il sistema (III) equivalente al sistema (II), e quindi anche equivalente al sistema dato.

$$\text{(III)} \begin{cases} x = m\,\dfrac{ma-b}{m^2-1} \\[2ex] y = m\,\dfrac{mb-a}{m^2-1} \end{cases}$$

Ma se è $m^2-1=0$, non possiamo più dividere ambi i membri della (1″) e della (2″) per m^2-1, e quindi non possiamo più avere il sistema (III). Ne segue che il sistema (III) è equivalente al sistema dato solo quando m^2-1 è diverso da zero.

Affinchè i valori di x, y risolvano il problema, è necessario e sufficiente che siano entrambi positivi, e che inoltre sia $a>x$, e $b>y$, ossia $a-x>0$ e $b-y>0$.

Sostituendo in $a-x$ ed in $b-y$ i valori di x, y dati dal sistema (III), e facendo le riduzioni, otteniamo:

$$a-x = \frac{mb-a}{m^2-1}, \qquad b-y = \frac{ma-b}{m^2-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Le formole che dobbiamo discutere, sono adunque le equazioni del sistema (III) e le (A) quando m^2-1 è diverso da zero; sono le equazioni del sistema (II) e le (A) quando è $m^2-1=0$.

DISCUSSIONE.* 1° Caso.** m^2-1 ***diverso da zero.

Affinchè x, y siano positivi, e sia $a-x>0$ e $b-y>0$, è necessario e sufficiente che siano positivi $\dfrac{ma-b}{m^2-1}$ ed $\dfrac{mb-a}{m^2-1}$. **

---

* Poichè il punto H deve essere fra A e D, sarà $AD>AH$, ossia $a>x$; e quindi $a-x>0$. Similmente, dovendo il punto L essere fra A e B, sarà $AB>AL$, ossia $b>y$; e quindi $b-y>0$.

** Per semplicità di esposizione consideriamo lo zero come numero positivo.

Ora il denominatore m^2-1 essendo, per ipotesi, diverso da zero, * sarà $m^2-1>0$, e quindi basterà che siano positive le differenze $ma-b$ ed $mb-a$ che sono a numeratore.

Essendo $m^2-1>0$, sarà $m^2>1$, e quindi $m>1$; e per conseguenza sarà $ma>a$, ed a fortiori $ma>b$; e quindi $ma-b>0$, e quindi $ma-b$ è sempre positivo. Resta dunque solo ad esaminare il valore di $mb-a$.

Affinchè anche $mb-a$ sia positivo, deve essere $mb>a$, oppure $mb=a$; ossia $m>\frac{a}{b}$, oppure $m=\frac{a}{b}$. Potremo quindi distinguere i due sottocasi.

1º Sottocaso. $m>\frac{a}{b}$. Sarà $mb>a$, e quindi $mb-a>0$. I numeratori ed i denominatori delle equazioni del sistema (III) e delle equazioni (A) sono tutti positivi e diversi da zero; ed inoltre avendo a, b, m ciascuno un valore unico, x, y avranno ciascuno un valore unico e maggiore di zero. Saranno inoltre positive e maggiori di zero le differenze $a-x$, $b-y$; e quindi i valori trovati di x, y soddisferanno al problema.

Costruzione. (*Fig. 1*). Prendendo $AH=CI=x$ e $AL=CK=y$, e tirando HL, LI, IK, KH, si ha il rettangolo inscritto $HLIK$ che soddisfa alle condizioni richieste.

Prendendo invece $DH'=BI'=x$ e $DL'=BK'=y$, e tirando poi $H'L'$, $L'I'$, $I'K'$, $K'H'$, si ha il rettangolo $H'L'I'K'$, il quale è evidentemente eguale al rettangolo $HLIK$, ed anch'esso soddisfa al problema. Abbiamo quindi un solo rettangolo inscrivibile, il quale si può collocare in due posizioni diverse.

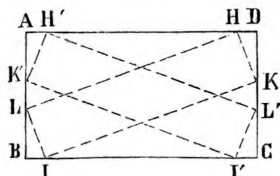


Fig. 1.

Osservazione. Se è $a>b$, ricordando che $\frac{a}{b}$ è il rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo dato, e che m è il rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo inscritto, abbiamo il seguente teorema:

TEOREMA. *In un rettangolo che non sia quadrato, è sempre possibile inscrivere due e due soli rettangoli eguali, qualunque sia il rapporto del maggiore al minor lato dei rettangoli inscritti, purchè questo rapporto sia superiore al rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo dato.*

Se è $a=b$, il rettangolo dato è un quadrato; è inoltre $\frac{a}{b}=1$, e quindi $m>1$: epperciò abbiamo il seguente teorema:

TEOREMA. *In un quadrato è sempre possibile inscrivere due e due soli rettangoli eguali fra loro, in cui il rapporto del maggiore al minor lato abbia un valore arbitrario maggiore dell'unità.*

2º Sottocaso. $m=\frac{a}{b}$. Sarà allora $mb=a$, e quindi $mb-a=0$. La 1ª delle equazioni (A) dà $a-x=\frac{0}{m^2-1}=0$, ossia $x=a$; e la 2ª equazione

---

* Per ipotesi m è positivo e non minore di 1; e quindi m^2 sarà positivo e non minore di 1; e perciò m^2-1 non potrà essere negativo. Dunque sarà sempre $m^2-1>0$, oppure $m^2-1=0$; e siccome in questo primo caso escludiamo l'ipotesi di $m^2-1=0$, ne segue che sarà $m^2-1>0$.

del sistema (III) dà $y = m\frac{0}{m^2-1} = 0$. Ne segue che il punto H coinciderà col punto D, ed il punto L col punto A; ed il rettangolo inscritto coinciderà col rettangolo dato: ma allora non vi è più rettangolo inscritto.

Osservazione. Avendo supposto $m = \frac{a}{b}$, se fosse $a = b$, sarebbe $\frac{a}{b} = 1$, e quindi $m = 1$, e quindi $m^2 = 1$, da cui $m^2 - 1 = 0$, il che è contro l'ipotesi fatta di considerare ora solo il caso $m^2 - 1$ diverso da zero. Sarà quindi $a > b$; ed il rettangolo dato, e quello da inscriversi non saranno quadrati. Ne segue:

TEOREMA. *In un rettangolo non quadrato, non è mai possibile inscrivere un altro rettangolo tale che il rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo inscritto sia eguale al rapporto del maggiore al minor lato del rettangolo dato. (Perchè, in tal caso, il rettangolo inscritto coinciderebbe col rettangolo dato).*

2° Caso. $m^2 - 1 = 0$. Sarà $m^2 = 1$, ossia $m = 1$. Ponendo questo valore di m nelle equazioni del sistema (II), si ha il sistema (II').

$$(\text{II}') \begin{cases} x + y = b \\ x + y = a. \end{cases}$$

Dal sistema (II') risulta che deve essere $a = b$; ma allora si ha una sola equazione fra due incognite, ed il problema è indeterminato.

Osservazione. Essendo $m^2 - 1 = 0$, ossia $m = 1$, il rettangolo che si vuol inscrivere è un quadrato, e le equazioni del sistema (II') ci dicono che se a è diverso da b (ossia se il rettangolo dato non è quadrato), il problema non è possibile. Avremo quindi il seguente teorema:

TEOREMA. *In un rettangolo non quadrato, non si può inscrivere un quadrato.*

Se è $a = b$, il rettangolo dato è un quadrato, ed il sistema (II') ci dice che vi è un numero illimitato di soluzioni. Avremo quindi il seguente teorema:

TEOREMA. *In un quadrato si può inscrivere un numero illimitato di quadrati.*

Costruzione. Stabilito un valore positivo arbitrario di x, tale però che sia $x < a$, si prende sui lati del quadrato $ABCD$ (*Fig. 2*) $AH = DK = CI = BL = x$. I punti H, K, I, L sono i vertici d'uno dei quadrati che si volevano inscrivere.

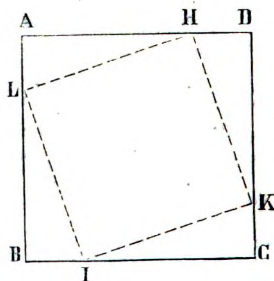


Fig. 2

Osservazione 1ª. Qualunque siano i valori positivi di x e di y, purchè sia $x < a$, si può avere un quadrato inscritto nel quadrato dato. Si osservi però che x, y non sono arbitrari tutti e due contemporaneamente; poichè fra x ed y esiste una relazione semplicissima, tale che dato x resta necessariamente determinato il valore di y; e viceversa. Immaginiamo infatti che nel quadrato $ABCD$ sia inscritto uno qualunque dei quadrati inscrivibili, p.e. il quadrato $HKIL$. Essendo $HL = LI = IK = KH$, i triangoli HAL, LBI, ICK, KDH sono eguali e quindi è p.e. $AL = HD$; e ponendo $AD = a$, $AH = x$, $AL = y$, si ha: $a - x = AD - AH = HD = AL = y$. Dunque:

Costruzione. Per inscrivere uno qualunque dei quadrati inscrivibili, basterà prendere un segmento qualsiasi $x<a$, e poi prendere $AH=DK==CI=BL=x$. Il quadrilatero $HKIL$ sarà il quadrato cercato.

Osservazione 2ª. Abbiamo convenuto che x, y dovessero essere positivi. Vediamo ora che cosa avviene se ammettiamo anche valori negativi di x e di y.

Per le ipotesi fatte, m non è mai minore di 1, e quindi m^2-1 non è mai negativo. Similmente non essendo mai $a<b$, il numeratore $ma-b$ non è mai negativo. Ne segue che x è sempre positivo.

Il valore di y sarà negativo quando tale sarà il numeratore $mb-a$, ossia quando sarà $mb<a$, ossia $m<\frac{a}{b}$. In questo caso, $a-x$ sarà negativo, epperciò sarà $x>a$. Inoltre, poichè, per ipotesi, non è mai $m<1$, dovendo essere $m<\frac{a}{b}$ non può essere $a=b$, e quindi il rettangolo dato non deve essere un quadrato.

Costruzione. Se conveniamo di chiamare positivo il segmento y quando è portato su di un lato del rettangolo a partire dal vertice, e negativo quando è portato sul prolungamento del lato a partire pure dal vertice, prendendo *(Fig. 3)* sui lati di $ABCD$ i segmenti $AH==CI=x$, e poi sul prolungamento dei lati di $ABCD$ i segmenti AL e CK eguali al valore numerico di y, otterremo il rettangolo $HKIL$.

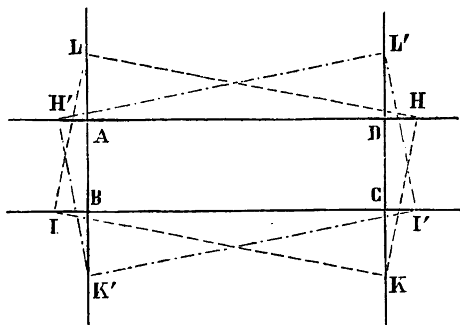


Fig. 3

Prendendo poi similmente sui lati i segmenti $DH'=BI'=x$, e sui prolungamenti i segmenti DL', BK' eguali al valore numerico di y, otterremo il rettangolo $H'K'I'L'$. I due rettangoli $HKIL$ ed $H'K'I'L'$ sono evidentemente eguali, hanno i lati nel rapporto voluto m, ma non sono inscritti nel rettangolo dato; hanno però i vertici sul prolungamento dei lati del rettangolo dato. Avremo perciò il seguente teorema:

TEOREMA. *In un rettangolo non quadrato, non è mai possibile inscrivere un altro rettangolo tale che il rapporto m del maggiore al minor lato del rettangolo inscritto sia inferiore al rapporto* $\frac{a}{b}$ *del maggiore al minor lato del rettangolo dato. In ogni caso però, qualunque siano i valori di m e di* $\frac{a}{b}$, *purchè sia* $m<\frac{a}{b}$, *esisteranno due soli rettangoli eguali fra loro, aventi i lati nel rapporto m ed i vertici sui prolungamenti dei lati del rettangolo dato.*

PROBLEMI.

1956. Si hanno due qualità di frumento. Se si mescolano a ettolitri di frumento della 1ª qualità con b ettolitri della 2ª qualità, un ettolitro del miscuglio vale lire d. E se si mescolano b ettolitri della 1ª qualità con a ettolitri della 2ª qualità, un ettolitro del miscuglio vale lire d'. Qual è il prezzo di ciascuna qualità di frumento?

1957. Si scomponga ciascuno dei numeri a, b in due parti, per modo che la 1ª parte di a contenga m volte la 1ª parte di b, e che la 2ª parte di b contenga m volte la 2ª parte di a.

1958. Si trovino due numeri il cui rapporto è $m:n$, ed il cui prodotto non cambia quando si aumenta il 1° numero di a e si diminuisce il 2° numero di b.

1959. In un triangolo dato si inscriva un rettangolo di perimetro dato.

1960. Sulla retta MN è fissata la posizione del punto O, e fuori della retta la posizione del punto P. Due mobili partono nel medesimo istante da O, e percorrono la retta con moto uniforme. Dopo t minuti, i due mobili si trovano l'uno in A e l'altro in B, e la posizione di A e di B è tale che il triangolo PAB è isoscele, e la sua area è eguale ad s. In qual verso ciascuno dei due mobili percorre la retta MN, e qual è la velocità di ciascuno?

Interesse composto.

1961. Quale sarà, dopo 80 anni, il montante di lire 3200 poste all'interesse composto annuale del 3 %?

1962. Quale sarà, dopo 8 anni ed 8 mesi, il montante di L. 4000 poste all'interesse composto annuale del 6 %?

1963. Metto lire 15000 all'interesse composto semestrale del $3\frac{1}{2}$ %. Quale ne sarà il montante dopo 10 anni?

1964. Quale interesse mi daranno, dopo 8 anni ed 8 mesi, lire 100000 poste all'interesse composto annuale del 4 %?

1965. Si calcoli il montante che nel 1870 avrebbe prodotto un soldo (5 centesimi) posto al principio dell'Êra Volgare all'interesse composto annuale del 5 %.

1966. Qual somma conviene collocare all'interesse composto annuale del $7\frac{1}{2}$ % per riscuotere, dopo 25 anni, lire 60983?

1967. Qual è quella somma che, essendo stata posta all'interesse composto annuale del 6 %, produsse, dopo 20 anni, il montante di lire 20645,50?

1968. Mio figlio ha 8 anni. Qual somma devo collocare all' interesse composto annuale del 5 % affinchè a 20 anni egli possa riscuotere lire 30000?

1969. Qual somma conviene collocare all'interesse composto del 4 % affinchè dopo 20 anni si possano riscuotere lire 20000?

1970. Collocai lire 8000 all'interesse composto annuale del 5 % per 12 anni. Qual somma avrei dovuto collocare all'interesse semplice annuale

del 5,50 % per riscuotere, dopo il medesimo tempo, il medesimo interesse? *

1971. Imprestai lire 50000 all'interesse composto annuale, parte al 5 % e parte al 10 %; e dopo 3 anni riscossi in tutto 59615 lire. Quali erano le due parti della somma imprestata? **

1972. Quanti anni, mesi e giorni conviene lasciare all'interesse composto annuale del 6 % la somma di lire 3428 per avere un montante di lire 5000?

1973. Due negozianti posero all'interesse composto del 6 %, il 1° lire 12000, ed il 2° lire 11800. Fra quanti anni i due montanti saranno eguali, supposto che pel primo gli interessi si capitalizzino alla fine di ogni anno, e pel secondo alla fine di ogni mese? ***

1974. In quanto tempo si raddoppia un capitale, quando gl'interessi del 5 % si capitalizzano: 1° ogni anno; 2° ogni mese; 3° ogni giorno? ****

1975. Quanto tempo si richiede affinchè una somma a collocata all'interesse composto annuale del 4 %, del 5 %, del 6 %, sia aumentata della metà?

1976. Quanto tempo si richiede affinchè una somma a collocata all'interesse composto annuale del 3,50 % possa essere raddoppiata, triplicata, quadruplicata, quintuplicata?

1977. Ed in generale: Quanto tempo si richiede affinchè la somma a collocata all'interesse composto annuale, ed alla tassa unitaria r, diventi m volte maggiore?

1978. Collocai lire 15000 all'interesse composto annuale del $4\frac{1}{2}$ %, per 20 anni. Per quanti anni avrei dovuto collocare la medesima somma all'interesse semplice annuale del 5 % per ottenere il medesimo interesse? *****

1979. A qual tassa conviene collocare lire 8000 all'interesse composto annuale per avere, dopo 12 anni, un montante di lire 21239?

1980. Collocai all'interesse composto annuale ed alla medesima tassa, lire 25000 per 6 anni, e lire 36 per tre anni, e riscossi il montante complessivo di lire 102427,40. A qual tassa furono calcolati gli interessi? ******

1981. A qual tassa conviene collocare un capitale c all'interesse composto annuale affinchè sia quadruplicato alla fine di anni 31?

1982. Ho due somme, l'una di lire 6000, e l'altra di lire 5000, da collocare all'interesse composto annuale; ma non le posso collocare alla medesima tassa. Se colloco la somma maggiore alla tassa maggiore, e la somma minore alla tassa minore, ritiro, dopo 4 anni, un montante complessivo di lire 13141,30. Se invece colloco la somma maggiore alla tassa minore, e la somma minore alla tassa maggiore, riscuoto, dopo

---

* Si calcoli prima l'interesse prodotto dalle 8000 lire.

** Si rappresentino con x, y le due parti della somma. Si avranno due equazioni di 1° grado con due incognite; poi.....

*** Si supponga noto il numero n d'anni richiesto, e si scriva il valore di ciascuno dei due montanti.

**** Si supponga noto il valore del tempo n, e si scriva che il montante è eguale al doppio del capitale.

***** Si trovi prima l'interesse prodotto nei 20 anni all'interesse composto.

****** Si supponga nota la tassa unitaria r, si scriva il valore dei due montanti, e si avrà un'equazione di 2° grado in $(1+r)^3$.

4 anni, un montante complessivo di lire 13096,70. Quali sono le due tasse? *

1983. Un negoziante comincia il suo commercio con lire 16000, e vede che il suo patrimonio si accresce ogni anno di $^1/_{11}$. Quale sarà il suo patrimonio dopo 18 anni? **

1984. In una città la popolazione cresce ogni anno di $^1/_{80}$ di quanto era l'anno precedente. Fra quanti anni la popolazione sarà raddoppiata?

1985. Una città aveva, al principio dell'anno, 8000 abitanti; alla fine dell'anno ne aveva 160 di meno. Se la diminuzione continua ogni anno in questa proporzione, fra quanti anni avrà solamente 5000 abitanti? ***

1986. Sedici anni fa la popolazione d'una città era di 600000 abitanti; e diminuì annualmente sempre nella stessa proporzione, finchè attualmente è di 570000. In qual proporzione diminuì annualmente la popolazione? ****

Annualità.

1987. Qual montante avrebbe, dopo 12 anni, colui che annualmente ponesse lire 1500 all' interesse composto annuale del 6 $^0/_0$?

1988. Un operaio colloca ogni anno lire 300 all'interesse composto annuale del 3 $^0/_0$. Quanto potrà riscuotere un anno dopo il 25° pagamento?

1989. Un fumatore, dall'età di 15 anni in poi, spende in media lire 0,20 al giorno in tabacco. Se alla fine di ogni anno ponesse questa somma all'interesse composto annuale del 5 $^0/_0$, qual somma potrebbe riscuotere all'età di 60 anni?

1990. Qual somma conviene collocare ogni anno all' interesse composto annuale del 5 $^0/_0$ per avere, dopo 15 anni, un montante di lire 19032,32?

1991. Un operaio che ha presentemente 21 anno, domanda qual somma deve collocare ogni anno all'interesse composto annuale del 3,50 $^0/_0$ per poter riscuotere, a 60 anni, un capitale di lire 30000.

1992. Cominciando alla nascita d'un figlio, si vuol collocare ogni anno all'interesse composto annuale del $4\,^1/_2\,^0/_0$ una somma tale che a 21 anno il figlio possa riscuotere un capitale, il quale, messo all'interesse semplice annuale del $4\,^1/_2\,^0/_0$, gli dia una rendita annuale di lire 3000. Qual'è l'annualità che bisogna pagare?

1993. Per quanti anni consecutivi bisogna porre ogni anno lire 500 all'interesse composto annuale del 3 $^0/_0$ per avere un montante di lire 30000?

1994. Un giovane dissipato, il quale ha un capitale di lire 157879 collocato all'interesse composto annuale del 5,50 $^0/_0$, ne consuma ogni anno lire 10000. Dopo quanti anni avrà egli consumato tutto questo suo capitale?

---

* Si rappresenti con x la tassa unitaria maggiore, con y la minore, e si avranno due equazioni le quali, se si pone $(1+x)^4=u$. ed $(1+y)^4=v$, diventano di 1° grado in u e v.

** Nel 1° anno si accresce di $\frac{16000}{11}$, epperciò alla fine del 1° anno avrà la somma di lire $16000+\frac{16000}{11}=16000\left(1+\frac{1}{11}\right)$; e si continua come al teorema del § 339.

*** Nel 1° anno diminuì di $\frac{160}{8000}=\frac{1}{50}$; poi.....

**** In ogni anno è diminuita di $\frac{1}{m}$; si supponga noto il valore $\frac{1}{m}$, e si scriva l'equazione

1995. Da un capitale di lire 6000 impiegate all'interesse composto annuale del 5 $^0/_0$ si tolgono ogni anno lire 500. Quanto rimarrà dopo 10 anni?

1996. Ho collocato lire 4000 all'interesse composto annuale del 4 $^0/_0$, ed ogni anno aggiungo al montante la somma di lire 400. Qual montante potrò riscuotere dopo 10 anni?

1997. Un negoziante ha presentemente 35 anni, e desidera avere a 50 anni un capitale di lire 40000. Qual somma deve egli collocare ogni anno all'interesse composto annuale del 4 $^0/_0$ per poter realizzare il suo progetto?

Ammortimenti.

1998. Qual è il debito che si estingue mediante 15 annualità di lire 500 ciascuna, calcolando l'interesse composto annuale del 4 $^0/_0$?

1999. Dovrei pagare per 6 anni l'annualità di 2500 lire, e desidero estinguere subito il mio debito. Quanto devo pagare se gl'interessi composti annuali si calcolano al 4 $^1/_2$ $^0/_0$?

2000. Feci un prestito di lire 10000, e pagai il debito con due annualità di lire 5275 ciascuna. A qual tassa furono calcolati gli interessi composti?

2001. Ho diritto ad una rendita annuale di lire 1500 durante 20 anni. Voglio riscuotere subito tutto il mio credito. Quanto riceverò se gl'interessi composti annuali si calcolano al 5 $^0/_0$?

2002. Devo pagare per 12 anni l'annualità di lire 2000. Trascorsi quattro anni, voglio estinguere il mio debito con un unico pagamento. Quanto dovrò pagare, se gli interessi composti annuali si calcolano al 5 $^0/_0$?

2003. Voglio estinguere in 12 anni un debito di lire 100000 coi suoi interessi composti annuali del 5 $^0/_0$, pagando ogni anno una medesima somma. Qual'è questa somma?

2004. Per la costruzione d'un ponte si tolsero in prestito lire 100000 da rimborsarsi, cogl'interessi composti annuali del 6 $^0/_0$, in 15 annualità, pagando la 1ª soltanto dopo 6 anni. Si cerchi l'annualità.

2005. Per estinguere un debito di lire 18867,16, pago ogni anno lire 1673,50; e gl'interessi composti annuali si calcolano al 5 $^0/_0$. Dopo quanti anni avrò estinto il mio debito?

2006. Un debito di lire 18867,16 è stato estinto per mezzo di annualità di lire 1673,50 ciascuna, e gli interessi composti annuali si calcolarono al 5 $^0/_0$. Quante annualità si sono pagate?

2007. Un individuo ottiene lire 2000 di rendita vitalizia col pagare lire 54580 ad una società d'assicurazione sulla vita dell'uomo, la quale dà il 5 $^0/_0$ d'interesse composto annuale. Quanti anni la società suppone che egli possa ancora vivere?

2008. Pago annualmente 400 lire per estinguere un debito di lire 5000 cogli interessi composti annuali del 5 $^0/_0$. Quanto dovrò pagare ancora dopo la 10ª annualità?

2009. Contraggo un debito di lire 10000 che estinguo coi suoi interessi composti annuali per mezzo di due annualità di lire 5276 ciascuna. A qual tassa furono calcolati gli interessi?

2010. Una società contrae un debito per la cui estinzione occorrono 40 annualità di lire 50000, essendosi calcolati gli interessi composti annuali al 5 $^0/_0$. Qual è questo debito?

INDICE DEGLI AUTORI

INDICE

PARTE PRIMA

LIBRO PRIMO.

I NUMERI RAZIONALI.

LIBRO SECONDO.

I NUMERI IRRAZIONALI.

LIBRO TERZO.

PROPORZIONI E PROGRESSIONI.

Appendice.

PARTE SECONDA

Esercitazioni relative alla parte prima

LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO.

LIBRO TERZO.

Appendice.
